



PROGRAMA
INFORMÁTICO
EDUCATIVO

Soporte Teórico

**ESCURRIMIENTOS
A PRESIÓN**



HYDROCÁLCULUS - *Programa Informático Educativo*

Soporte Teórico

Escurremientos a Presión

1^{ra} Versión

Año 2025

ÍNDICE

ESCURRIMIENTOS A PRESIÓN.	1
1. Definición.	1
2. Características.	2
3. Aplicaciones.	4
4. Solicitaciones y esfuerzos.	5
5. Distribución de presiones.	10
6. Materiales.	13
7. Aplicación de la ecuación de Bernoulli para fluidos reales.	14
7.1. Conceptos generales.	14
7.2. Aplicación al movimiento gradualmente variado.	14
7.3. Aplicación al movimiento uniforme.	19
8. Régimen laminar.	25
8.1. Hipótesis inicial.	25
8.2. Distribución de velocidades.	25
8.3. Variantes del análisis.	30
8.3.1. Caudal y velocidad media.	30
8.3.2. Gradiente de la pérdida de carga piezométrica.	32
8.3.3. Esfuerzo de corte.	34
8.3.4. Coeficiente de Coriolis.	35
8.3.5. Coeficiente de Boussinesq.	36
8.4. Esgurrimiento entre dos placas paralelas.	36
9. Resistencia de superficie.	43
9.1. Introducción.	43
9.2. Teoría de la capa límite.	44
9.3. Características de la capa límite.	47
10. Régimen turbulento.	59
10.1. Pérdida de energía.	61
10.2. Ecuación de Darcy - Weisbach.	68
10.3. Coeficiente de fricción.	78
10.3.1. Ley de distribución de velocidades.	78
10.3.2. Ecuaciones de velocidad de Von Kármán - Prandtl.	81
10.3.3. Ecuaciones de resistencia de Von Kármán - Prandtl.	93
10.4. Experiencias de Nikuradse.	98
10.4.1. Influencia simultánea de la viscosidad y la rugosidad.	103
10.4.2. Experiencias de Colebrook y White.	109
10.5. Zona crítica.	114

11.	Diagramas universales de H. Rouse y L. Moody.	117
11.1.	Uso del diagrama de H. Rouse.	122
11.1.1.	Cálculo de la pérdida de energía.	122
11.1.2.	Cálculo del gasto o caudal.	123
11.1.3.	Cálculo del diámetro.	124
12.	Tuberías de sección no circular.	127
12.1.	Conductos de sección rectangular.	128
12.2.	Escurrimiento turbulento entre placas paralelas.	131
13.	Fórmulas empíricas.	135
14.	Variación de la rugosidad.	144
15.	Pérdida de energía local.	147
15.1.	Resistencia de forma.	148
15.2.	Ensanchamiento brusco.	160
15.2.1.	Cálculo.	161
15.2.2.	Representación gráfica de las líneas de energía.	166
15.3.	Ensanchamiento gradual.	167
15.4.	Estrechamiento brusco.	170
15.4.1.	Cálculo.	171
15.4.2.	Representación gráfica de las líneas de energía.	173
15.4.3.	Casos particulares.	174
15.5.	Cambio de dirección.	177
15.6.	Válvulas.	183
15.7.	Otros accesorios.	201
15.8.	Método de las longitudes equivalentes.	208
15.9.	Pérdidas de energía locales en régimen laminar.	211
15.10.	Comentarios y recomendaciones.	211
16.	Tuberías con gasto o caudal variable en el recorrido.	216
17.	Tuberías combinadas.	221
17.1.	Consideraciones básicas.	221
17.2.	Tubería individual.	224
17.2.1.	Comentario general.	224
17.2.1.	Regulación con válvula.	224
17.3.	Tuberías en serie.	228
17.3.1.	Definición del problema.	228
17.3.2.	Solución con criterio racional.	229
17.3.3.	Solución con la fórmula empírica de Hazen - Williams.	233
17.3.4.	Ejemplo numérico.	234

17.4.	Tuberías en paralelo.	246
17.4.1.	Definición del problema.	246
17.4.2.	Solución con criterio racional.	247
17.4.3.	Solución con la fórmula empírica de Hazen - Williams.	252
17.4.4.	Ejemplos numéricos.	254
17.5.	Tuberías mixtas – Combinación serie y paralelo.	265
17.5.1.	Consideraciones generales.	265
17.5.2.	Ejemplo numérico.	265
17.6.	Tuberías dispuestas tipo ramal.	279
6-17.6.1.	Definición del problema.	279
6-17.6.2.	Ejemplo numérico.	280

ESCURRIMIENTOS A PRESIÓN.

1. DEFINICIÓN.

Se denominan escurrimientos a presión a aquellos movimientos de fluidos que circulan a través de conducciones cerradas de paredes sólidas, en los cuales la sección hidráulica coincide con la sección geométrica. Es requisito imprescindible que el fluido esté aislado físicamente de la atmósfera y ocupe la totalidad de la sección de la tubería (ver *Figura 1*), es decir que la masa en movimiento esté en contacto con todo el contorno de la sección.

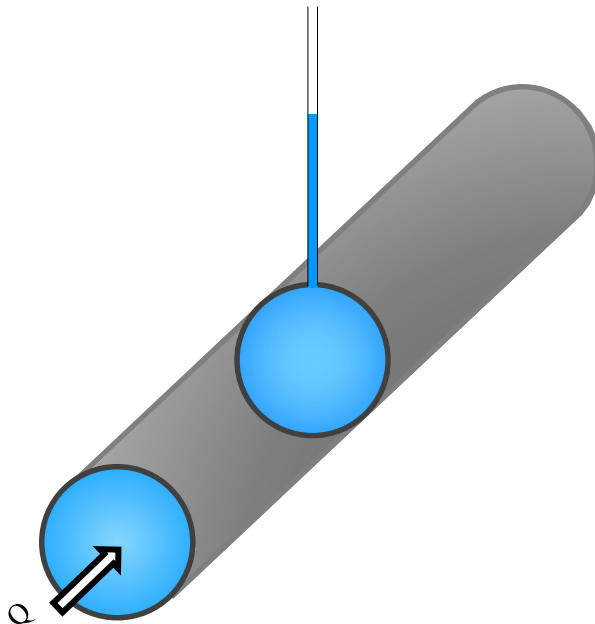


Figura 1 – Perspectiva de un escurrimiento a presión.

Así, el fluido circulante permanece confinado dentro de un conducto cerrado, en el cual se desarrolla una presión que puede variar en el recorrido y simultáneamente, debida a la misma, ejerce un esfuerzo distinto en el contorno de las diversas secciones que conforman la tubería (ver *Figura 2*).

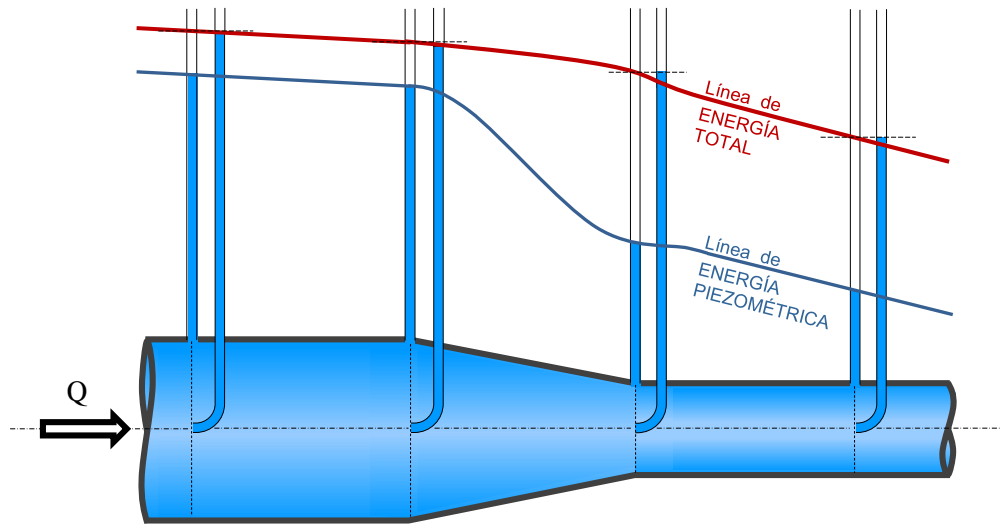


Figura 2 – Esguerrimiento a presión en una tubería de sección variable.

Si no ocurriera de esa manera, y por lo contrario en la misma tubería de contorno cerrado indicada en la *Figura 1* se cumpliera que la sección hidráulica es menor que la geométrica, entonces se genera un plano líquido en el sector superior que está sujeto a la presión atmosférica. En tal circunstancia, se concluye que el esguerrimiento de la corriente es del tipo a *superficie libre*, como sucede por ejemplo con los desagües cloacales y pluviales (ver *Figura 3*).

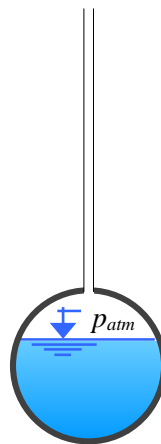


Figura 3 – Sección de un esguerrimiento a superficie libre.

2. CARACTERÍSTICAS.

El esguerrimiento en tuberías a presión se realiza principalmente de forma unidireccional, básicamente porque la dirección de las partículas en movimiento mantienen una única dirección, coincidente con la orientación del eje de la conducción. También es aplicable esa hipótesis para los casos en que la tubería tiene modificaciones suaves en el recorrido, ya que es suficiente que en cada sección considerada las velocidades se mantengan paralelas. Dicha simplificación representa una singular ventaja en los cálculos, ya que los esguerrimientos bi o tridimensionales implican un análisis por demás complejo.

La diferencia de energía piezométrica entre dos secciones de una conducción forzada es la causa que genera y mantiene el movimiento del fluido, independientemente que la tubería este ubicada en forma horizontal (ver *Figura 4*) u oblicua, con sentido ascendente o descendente (ver *Figuras 5 y 6*). Para el caso de la *Figura 4*, en que el eje de la tubería tiene una pendiente longitudinal nula, la circulación del fluido se realiza a expensas de la diferencia de presión exclusivamente.

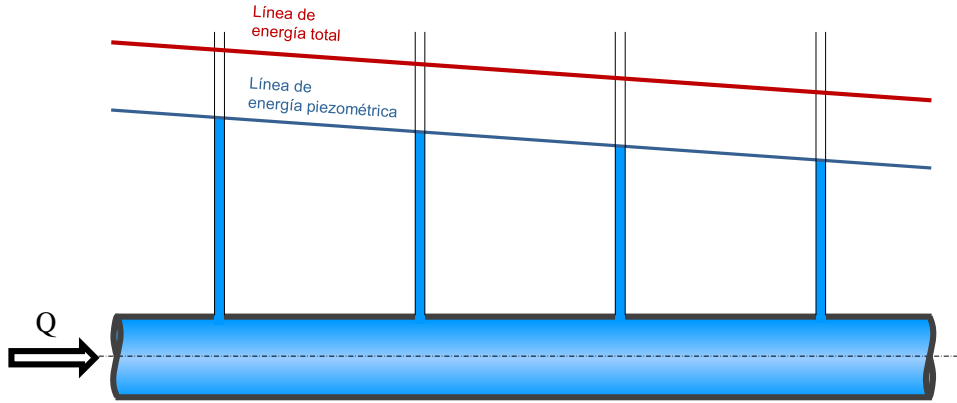


Figura 4 – Tubería a presión en posición horizontal.

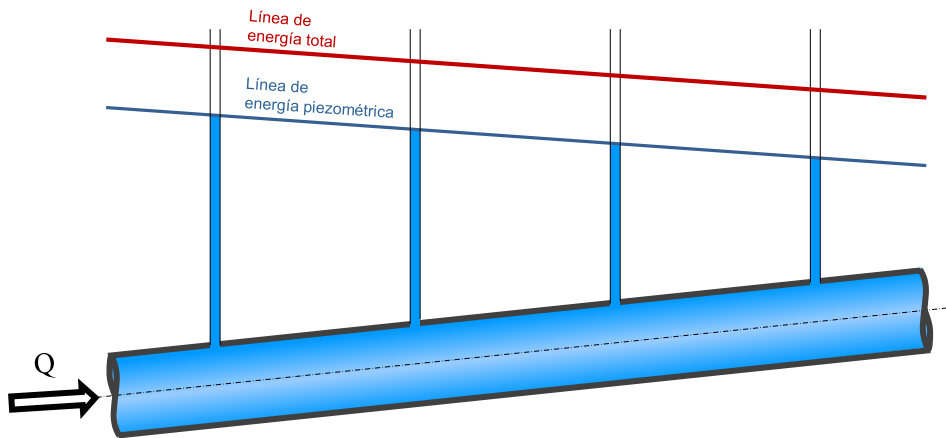


Figura 5 – Tubería a presión en posición oblicua ascendente.

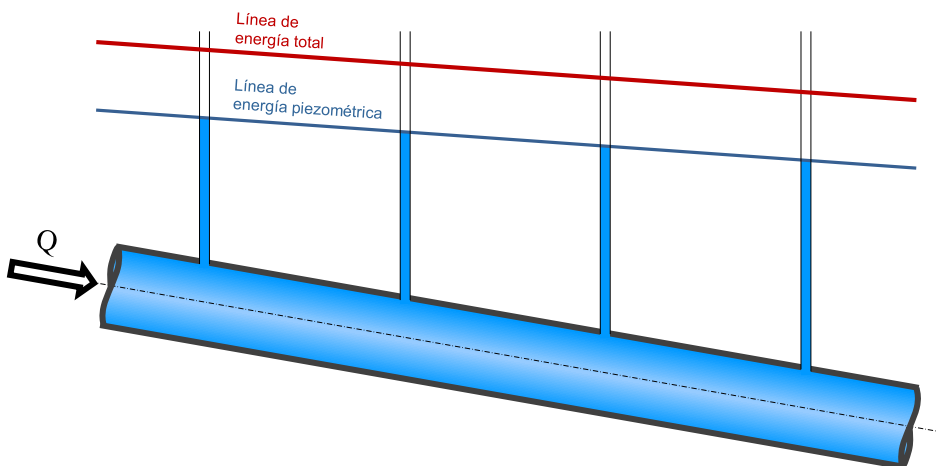


Figura 6 – Tubería a presión en posición oblicua descendente.

Inclusive pueden producirse situaciones de diseño en las cuales el proyectista disponga a las tuberías de modo que el movimiento se produzca verticalmente en elevación (ver *Figura 7*) o bajada.

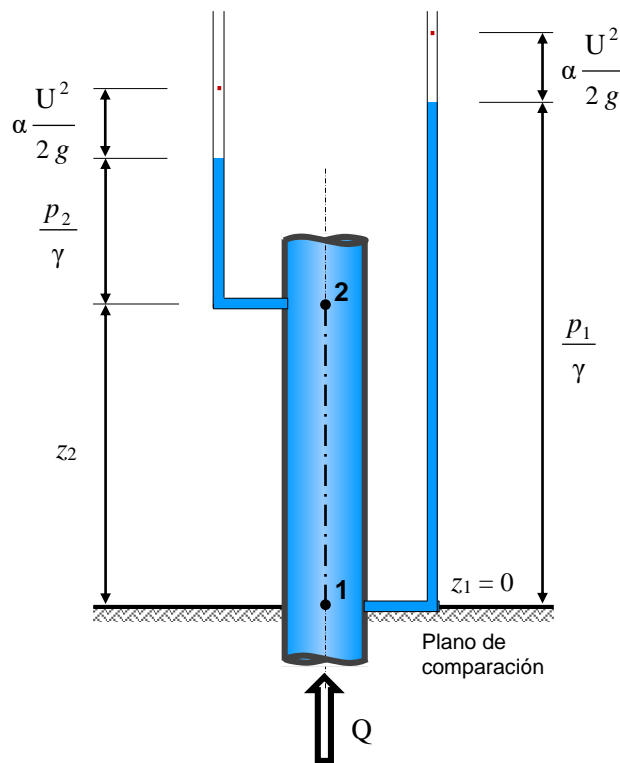


Figura 7 – Tubería a presión en posición vertical ascendente.

Todo lo indicado representa una marcada diferencia con los escurrimientos a superficie libre, los cuales basan su movimiento exclusivamente a expensas de la fuerza gravitatoria, con la sección hidráulica inferior a la geométrica.

Otra característica muy general de cumplimiento en la gran mayoría de los casos, reside en la imposición del mercado respecto a la forma circular de la sección transversal, la cual trae aparejada ventajas tanto hidráulicas como estructurales, además de su facilidad constructiva, lo cual redunda consecuentemente en un menor costo. Este condicionante alivia sensiblemente la labor del proyectista, ya que elimina la variable correspondiente al diseño de la morfología en el cálculo.

3. APLICACIONES.

Los conductos a presión representan una de las formas de mayor difusión de estructuras hidráulicas destinadas a la circulación de gran variedad de fluidos con fines a otros tantos tipos de usos, todo ello dentro inmensa magnitud de caudales.

En efecto, en la práctica se encuentra una gran diversidad y complejidad de ejemplos, que van desde muy pequeños gastos como los empleados en las ciencias médicas y odontológicas hasta los de inmensos caudales, tal como sucede en los grandes acueductos y las conducciones forzadas que derivan el agua a las centrales hidroeléctricas. También el sistema circulatorio de sangre en el hombre y los animales corresponde a este tipo de conducción.

Así, los conductos de transporte de fluidos a presión más comunes que se pueden encontrar en la ingeniería son entre otros:

- Acueductos.
- Gasoductos.
- Oleoductos.
- Conducciones de productos químicos.

Y a su vez, dentro de los acueductos, se pueden distinguir fundamentalmente y de manera parcial:

- Abastecimiento para consumo humano.
- Provisión a industrias.
- Redes distribuidoras domiciliarias de agua potable.
- Instalaciones de agua fría y caliente en edificaciones.
- Redes contra incendio.
- Riego por aspersión o goteo.
- Impulsiones por medio de bombeo hidráulico.
- Sistema de calefacción por agua caliente o vapor.
- Depresión de napa freática o extracción desde pozos acuíferos.

4. SOLICITACIONES Y ESFUERZOS.

Las solicitaciones más comunes a las cuales suelen estar sometidas las tuberías a presión se pueden resumir en:

- Presión interna.
- Flexión.
- Aplastamiento.
- Golpe de ariete.
- Variación de temperatura.

Dichas solicitaciones provocan esfuerzos internos dentro de la estructura sólida de la tubería, la cual a su vez debe ser convenientemente dimensionada para resistir esas acciones y además proporcionar sin inconvenientes los servicios para la cual ha sido proyectada.

a) Presión interna.

Corresponde a la presión innata del fluido circulante, la cual ocasiona esfuerzos internos reactivos en cada sección considerada de la tubería.

En efecto, si se trata de una tubería cuya relación entre el diámetro medio y el espesor es superior a 15 veces, la misma se denomina de *pared delgada* y las tensiones son prácticamente constantes a lo largo de todo el espesor. Planteando con esta hipótesis el equilibrio estático sobre un tramo de longitud unitaria (ver *Figura 8*), se obtiene la fórmula de Mariotte que indica la tensión normal de tracción a la cual está sometida la tubería:

$$p_i D_i = 2 |T| = 2 \sigma e \quad \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{p_i D_i}{2 e} \quad (1)$$

Siendo:

- σ Tensión normal.
- p_i Presión interior.
- D_i Diámetro interno.
- e Espesor.
- D_e Diámetro externo.
- D_m Diámetro medio.

$$D_m = \frac{D_e + D_i}{2}$$

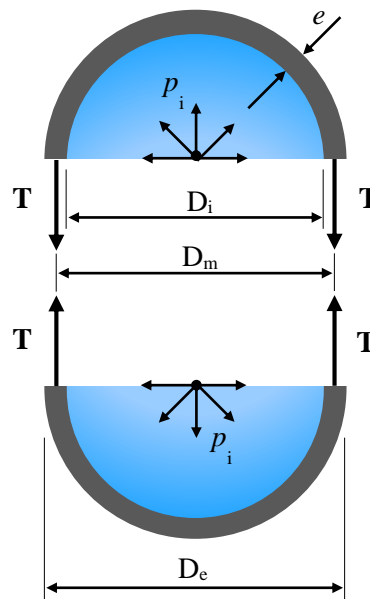


Figura 8– Esfuerzos generados por presión interna del fluido.

Debe verificarse finalmente que la tensión existente sea menor que la tensión admisible del material del conducto ($\sigma < \sigma_{adm}$).

Por otra parte, si la tubería es de características del tipo de *pared gruesa*, el estado tensional deja de ser aproximadamente constante sobre el espesor, y el cálculo de los esfuerzos se torna mucho más complicado, efectuándose el mismo en base a los principios de la elasticidad.

b) Flexión.

Se producen esfuerzos de flexión, por ejemplo, en los casos en que las tuberías se disponen de forma aérea y montadas sobre soportes (ver Figura 9). La conducción se comporta como una viga continua sometida al peso propio del material más el del fluido, debiendo tenerse en cuenta si correspondiera, otras cargas ocasionales.

Las máximas tensiones normales se producen sobre el borde superior e inferior de la sección, correspondiendo su valuación a sollicitaciones del tipo de flexión simple.

$$\sigma = \frac{M}{W} \tag{2}$$

Siendo:

M Momento flector.
 W Módulo resistente.

Para una sección corona circular:

$$W = \frac{\pi}{32} \frac{D_e^4 - D_i^4}{D_e}$$

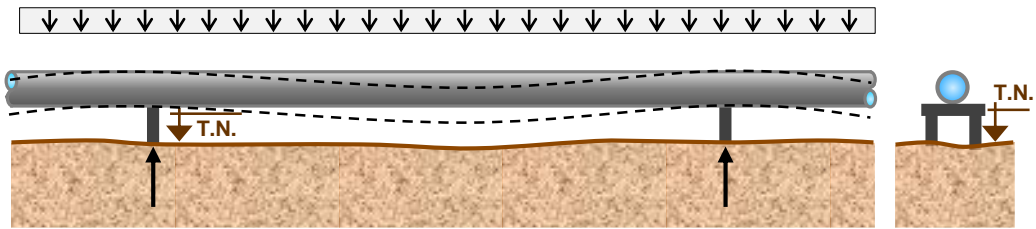


Diagrama de momento flector M

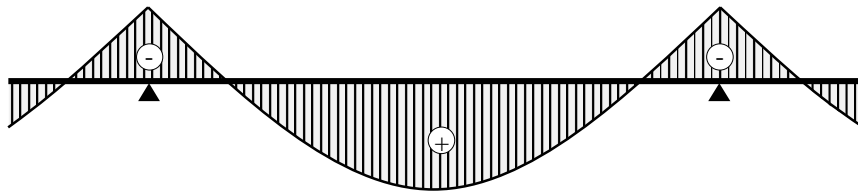


Figura 9– Tubería aérea sometida a esfuerzos de flexión simple.

A su vez, en las tuberías soterradas, se pueden producir esfuerzos de flexión en situaciones en que la misma atraviesa un claro en el terreno producto de un zanjón natural o de una zanja artificial, comportándose en ese tramo como una viga empotrada-empotrada (ver Figura 10). O también como consecuencia de asentamientos diferenciales producto de la falta de homogeneidad en el grado de compactación.

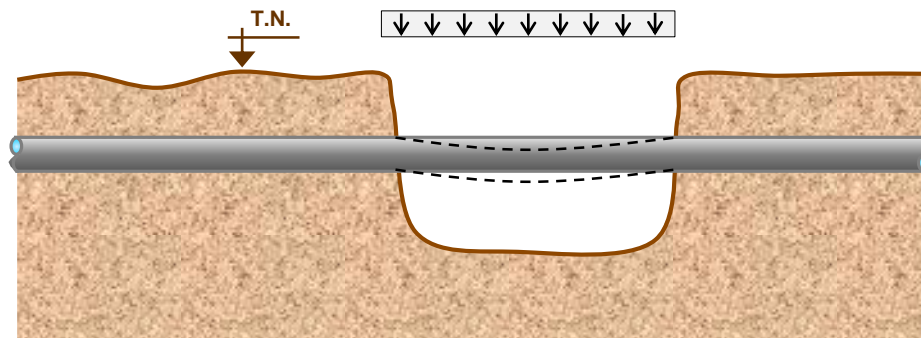


Diagrama de momento flector M

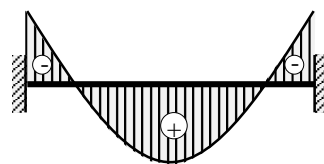


Figura 10– Tubería soterrada sometida a esfuerzos de flexión simple.

c) Aplastamiento.

El aplastamiento consiste en la deformación ocasionada en una tubería sobre el eje vertical de la sección (ver *Figura 11*), produciéndose una deflexión ΔD generalmente a causa de las cargas de relleno y el tránsito, las que ovalizan la forma de la sección originalmente circular.

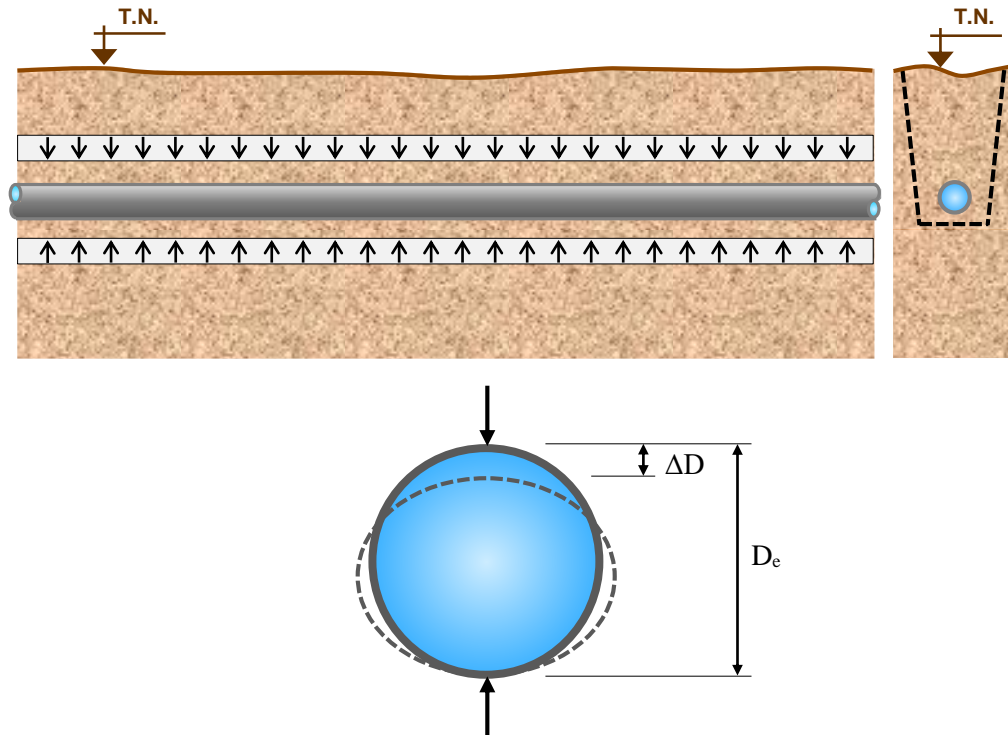


Figura 11– Tubería soterrada sometida al aplastamiento de la sección.

El estudio se realiza con la hipótesis más desfavorable, que consiste en considerar la condición de tubería vacía o desprovista de presión, ya que la misma tiende a mantener intacta la forma primitiva del conducto. En cuanto al cálculo efectivo de la deflexión se tiene en consideración la resistencia propia del material de la tubería y el suelo, las cargas actuantes, las longitudes geométricas y el tipo de apoyo.

Con esas premisas debe verificarse finalmente que la deflexión porcentual referida al diámetro exterior cumpla la condición de ser menor o igual al 5%.

$$\frac{\Delta D}{D_e} \leq 5\% \tag{3}$$

d) Golpe de ariete.

En el caso de tuberías a presión reguladas aguas debajo de un embalse mediante válvulas (ver *Figura 12*), el cierre o apertura de las mismas provocan sobrepresiones Δh por encima de la presión estática, las que deberán evaluarse adicionalmente a la presión interna indicada en el inciso a). La situación más comprometida corresponde al cierre brusco, donde según Allievi, la sobrepresión Δh medida en *m.c.d.a.* es:

$$\Delta h = \frac{c U}{g} \tag{4}$$

Donde:

- c Celeridad. Velocidad de propagación de la onda de sobrepresión.
- U Velocidad media.
- g Aceleración de la gravedad.

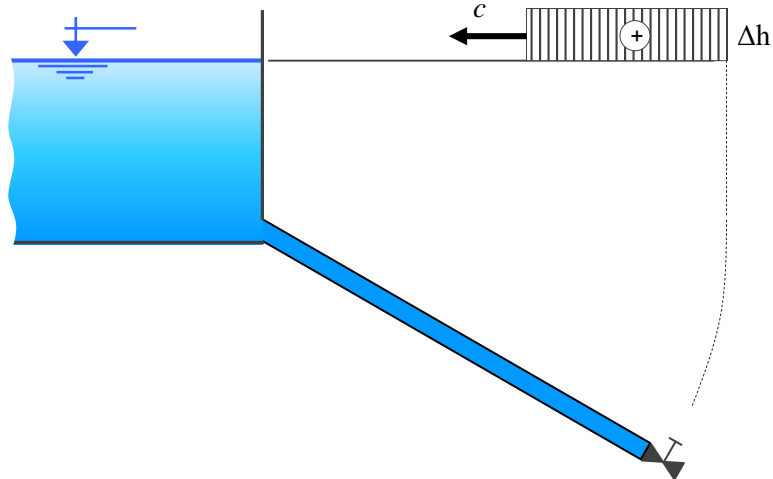


Figura 12– Tubería sometida a la variación de presiones por movimientos transitorios.

e) Variación de temperatura.

Si en una tubería de longitud inicial l_i se produce una alteración positiva de la temperatura, a causa del fenómeno físico de dilatación se modifica su dimensión adoptando una nueva longitud de magnitud superior l_f (ver Figura 13).

$$l_f = l_i (1 + \alpha \Delta T)$$

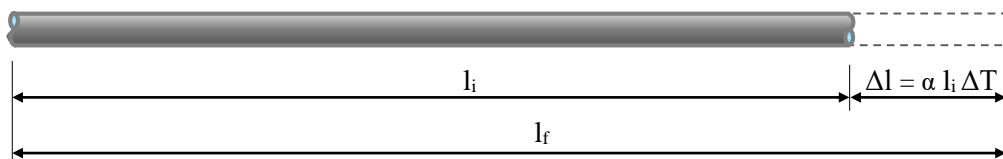


Figura 13– Tubería dilatada por efecto de la temperatura.

Ahora bien, si a esa misma tubería en las condiciones descritas, en vez de tener libertad de movimiento se la fija en sus extremos, no se va a producir el efecto de dilatación, pero a expensas de ello se origina una tensión normal de compresión en la dirección longitudinal que deberá ser compatible con la resistencia del material.

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta l}{l_i} \Rightarrow$$

$$\sigma = E \alpha \Delta T \tag{5}$$

Si por el contrario, a la tubería en cuestión sujeta en ambas puntas se le aplica igual diferencia de temperatura pero negativa, para esta conjetura el conducto tiende a contraerse y se va a generar la misma magnitud tensional pero sometida a tracción.

A todo lo expresado también debe agregarse la consideración y previsión de los posibles ataques químicos a la tubería. Los mismos se pueden originar interiormente a partir del tipo de fluido circulante, como así también los producidos por agentes exteriores, en general proveniente de suelos agresivos.

5. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES.

La energía de posición por unidad de peso z se define, por convención, como la distancia desde un plano arbitrario comparativo horizontal hasta el baricentro de la sección considerada. Así mismo, la energía de presión por unidad de peso p/γ , debe referirse a ese mismo punto (ver **C.G.** en la *Figura 14*).

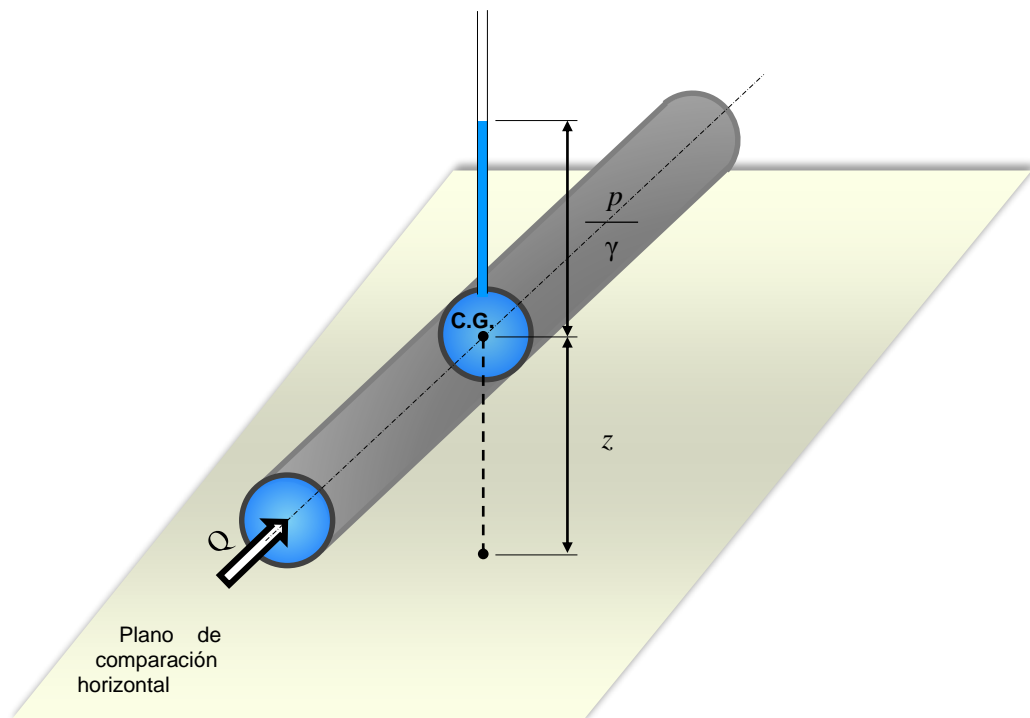


Figura 14 – Punto de referencia en una sección de un conducto a presión.

Se hace hincapié respecto a que el criterio adoptado es puramente convencional, ya que como se ha indicado oportunamente, la energía piezométrica por unidad de peso ($z + p/\gamma$) adopta igual magnitud sea cual fuere el punto de la sección donde se evalúan ambos términos (ver *Figura 15*). Esta suposición es válida, ya que la distribución sobre la sección es de características hidrostáticas, siempre que se imponga al menos una de las reglas de Bresse:

- Trayectorias rectas.
- Velocidad media pequeña.
- Radio de curvatura muy amplio.

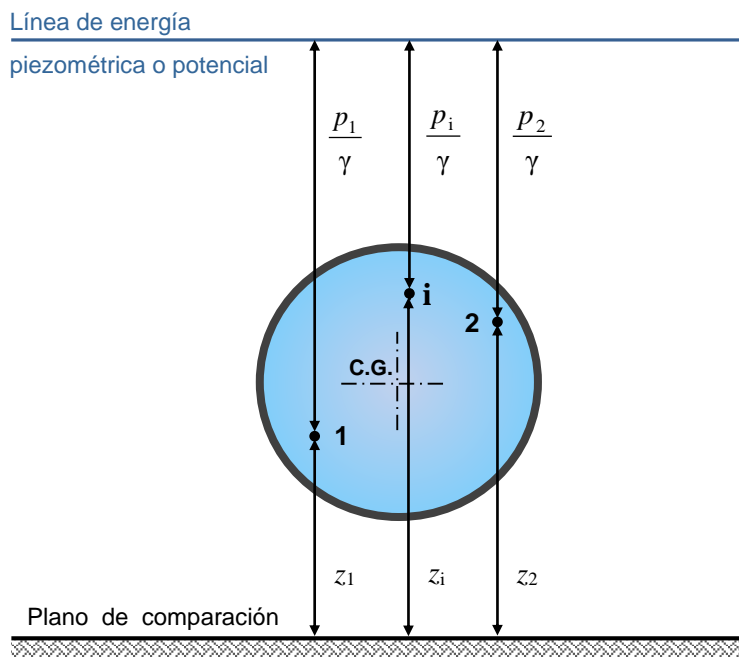


Figura 15 – Energía de presión por unidad de peso en puntos de una sección transversal.

En general es conveniente trabajar con presiones relativas p , resultando el término p/γ siempre positivo.

La medición de la presión se hace a través de una toma que debe efectuarse siguiendo la dirección normal a la superficie de la pared interna de la tubería. Así mismo debe evitarse la existencia de rugosidades que provoquen perturbación en la uniformidad de las mediciones. Diversas normas especifican el diámetro interno de la toma adoptando el mismo como un porcentaje del diámetro nominal de la conducción, aunque algunos autores recomiendan entre 3 y 8 mm.

Para una mayor precisión es conveniente realizar cuatro tomas dispuestas simétricamente, formando ángulos de 90° entre sí. Estas tomas son interconectadas por un anillo piezométrico, donde se ensambla la toma de presión definitiva (ver Figura 16).

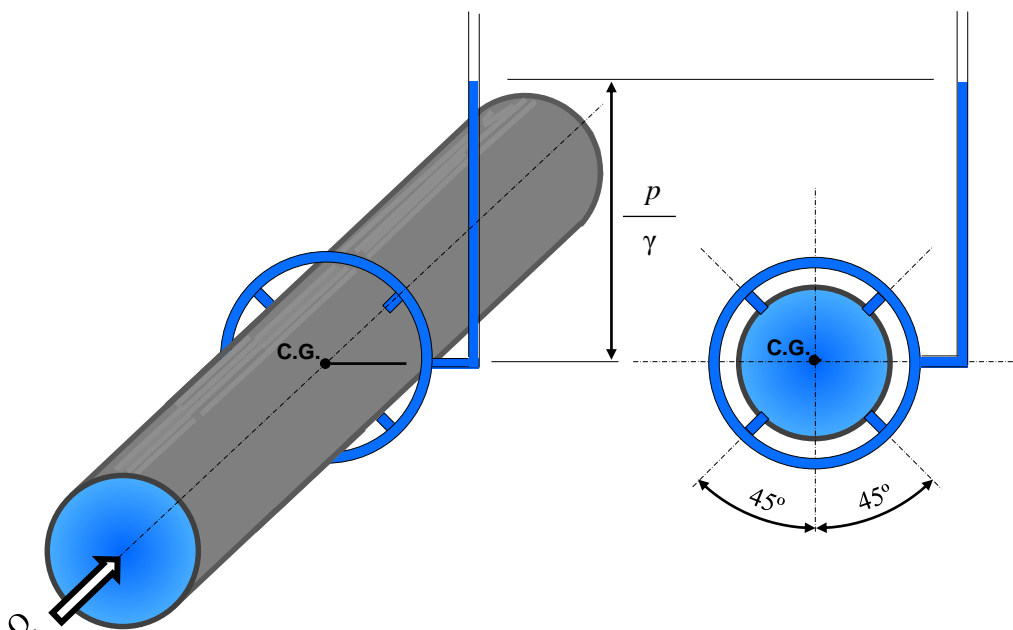


Figura 16 – Perspectiva y corte de tomas para medición de presión.

En una tubería rectilínea, la distribución de la presión a lo largo del diámetro contenido en un plano vertical de una determinada sección, por las consideraciones mencionadas resulta ser lineal entre la presión p_s en el borde superior y p_i en el inferior (ver Figuras 17 y 18).

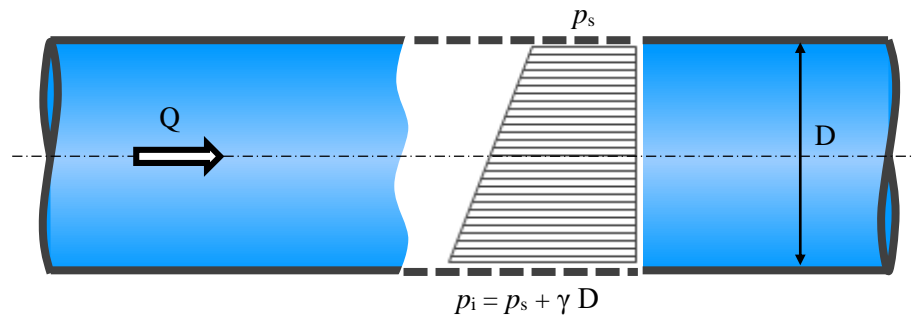


Figura 17 – Distribución de presiones en una tubería rectilínea horizontal.

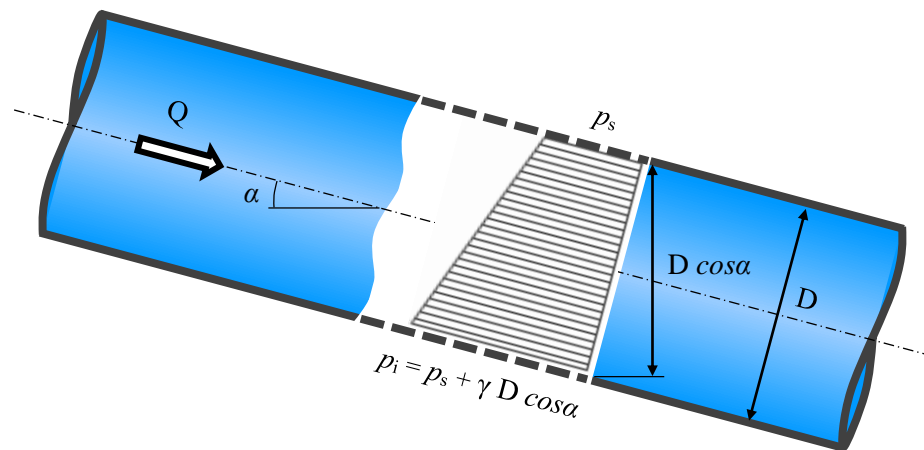


Figura 18 – Distribución de presiones en una tubería rectilínea oblicua.

En cambio, si la sección considerada está situada en un sector de la tubería cuyo eje longitudinal posee un radio con gran curvatura, la presión deja de variar linealmente y adopta valores menores sobre el borde cóncavo y mayores sobre el convexo, influenciados por efecto de la aceleración centrífuga (ver Figura 19).

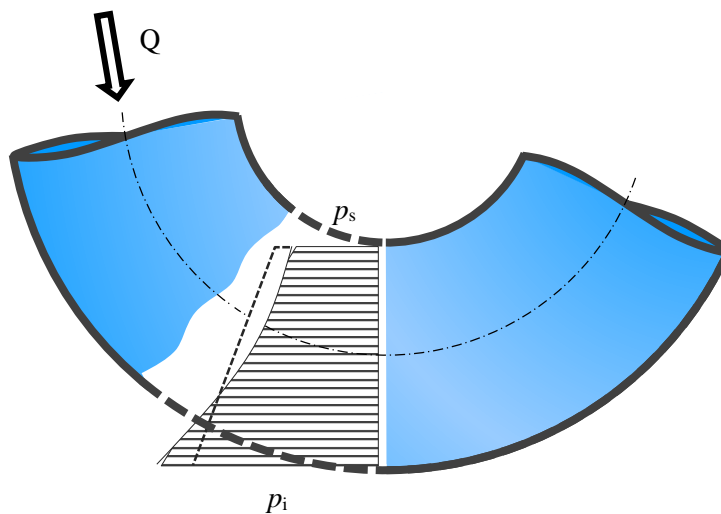


Figura 19 – Distribución de presiones en una tubería curva.

6. MATERIALES.

La industria encargada de fabricar tuberías con el fin de plasmar conducciones para escurrimientos a presión, brinda una muy amplia gama de ofertas con relación a las variantes de materiales, diámetros, espesores, longitudes y acoples.

En particular, la elección del material se canaliza evaluando el proyectista convenientemente tres aspectos fundamentales a considerar:

- Hidráulico.
Se pretende que la superficie interna sea lo más lisa y pareja posible, de modo de lograr transportar un mayor caudal fluido a expensas de una menor pérdida de energía hidráulica.
- Estructural.
La tubería debe ser lo suficientemente capaz de resistir los diversos esfuerzos a los que estará sometida en su vida útil (ver punto 4.).
- Constructivo.
Se buscan conducciones livianas y poco frágiles, que ofrezcan agilidad y resistencia a la manipulación, transporte y colocación, incluidos los accesorios.

En la historia de las conducciones a presión puede encontrarse una extensa lista de utilización de materiales, muchos de ellos en desuso que han dejado lugar a otros más convenientes, desarrollados con nuevos elementos y fabricados con modernas tecnologías.

Así pueden mencionarse las prácticamente obsoletas tuberías de madera, pasando luego por las de hierro fundido F^oF^o y acero galvanizado A^oG^o, que fueron durante muchas décadas los materiales tradicionales para el transporte de agua. Continúan vigentes las tuberías de acero A^o, recomendables para escurrimientos con grandes presiones internas.

También deben mencionarse las tuberías con base cementicia, aunque hayan perdido competitividad, tales como las de hormigón armado H^oA^o y las de asbesto comento A^oC^o.

La tendencia actual está encaminada al uso de conducciones de base plástica, tales como:

- * Policloruro de vinilo PVC.
- * Polietileno. En sus versiones de alta densidad PEAD y baja densidad PEBD.
- * Plástico reforzado con fibra de vidrio.

Si el plástico es:

- . Poliester PRFV.
- . Epoxi ERFV.

Las características ventajosas y comunes de estos últimos tipos de tuberías se pueden resumir en:

- Excelente resistencia térmica y química.
- Bajo peso.
- Fácil instalación.
- No se oxida ni corroe.
- Escaso costo de mantenimiento.
- Estabilidad dimensional.
- No admite incrustaciones.
- Son reciclables por varios métodos.

7. APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA FLUIDOS REALES.

7.1. Conceptos generales.

La ecuación de Navier-Stokes representa la expresión más general del equilibrio dinámico de una partícula de fluido en el movimiento a lo largo de la trayectoria y su interacción con las demás partículas que la circundan. Su integración, para un fluido viscoso e incompresible con régimen permanente en un escurrimiento unidimensional caracterizado por la velocidad media U_i en cada sección, deriva en la ecuación de Bernoulli.

7.2. Aplicación al movimiento gradualmente variado.

Se considera en primera instancia y de manera amplia y general, dos puntos **1** y **2** (separados una distancia Δl_{1-2}) situados sobre el eje hidráulico de una tubería hipotética de sección gradualmente variable dentro de la cual se conforma un escurrimiento a presión en régimen permanente. En estas condiciones, la velocidad media U del fluido circulante se modifica con el recorrido $\partial U/\partial l \neq 0$, por lo que el movimiento resulta variado, o más precisamente en concordancia con la tubería de la *Figura 20*, *movimiento gradualmente variado*.

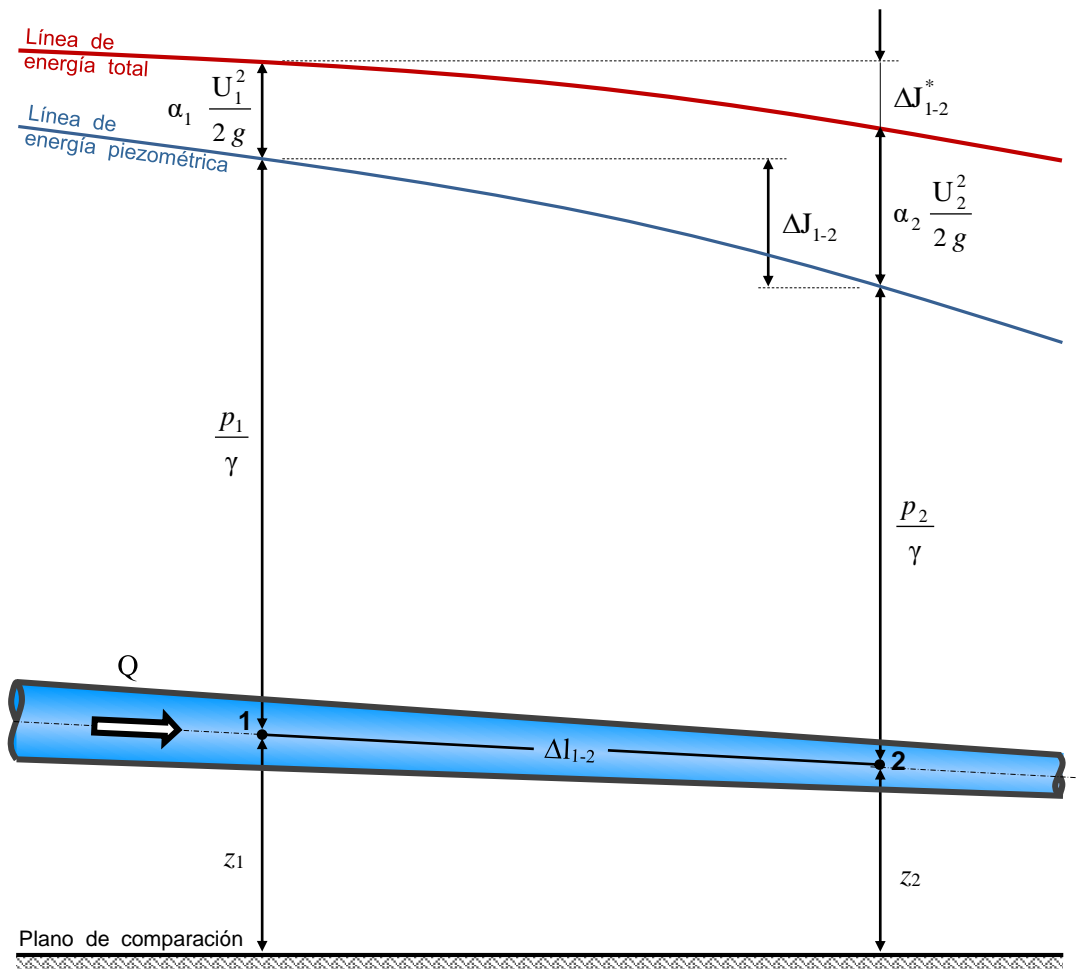


Figura 20 – Conducción con movimiento gradualmente variado.

Es aplicable así la ecuación de Bernoulli entre las secciones Ω_1 y Ω_2 , la cual representa matemáticamente el hecho físico correspondiente a la conservación de la energía.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J_{1-2}^* \quad (6)$$

Donde los siguientes términos genéricos en i (1 o 2 para el caso en estudio) representan:

z_i Energía de posición por unidad de peso.

Está referida a un plano de comparación horizontal y arbitrario, pudiendo ser positiva o negativa, según sea el nivel de elevación del plano comparativo. Conviene elegirlo de manera práctica tal que z_i arroje siempre valores positivos.

$\frac{p_i}{\gamma}$ Energía de presión por unidad de peso

Se indica con referencia al baricentro de la sección Ω_i , siendo además γ el peso específico constante del fluido.

Las presiones consideradas en (6) son relativas, es decir que no tienen en cuenta la presión atmosférica. En este caso, puede ser positiva o negativa, pero si las presiones que se analizan son absolutas, el término en cuestión será siempre positivo.

$\alpha_i \frac{U_i^2}{2g}$ Energía de velocidad por unidad de peso.

También llamada energía cinética por unidad de peso, tiene un valor siempre positivo.

Es evidente que el escurrimiento del fluido se produce a costa de una pérdida de energía hidráulica, y al respecto, para una mejor claridad de conocimiento, se definen y diferencian los siguientes conceptos:

ΔJ_{1-2}^* Pérdida de energía total.

Es la diferencia de energía total por unidad de peso entre 2 secciones (caída correspondiente a la línea de energía total o hidrodinámica). Expresa la pérdida de energía total hidráulica en el debido al efecto de frotamiento en el tramo Δl_{1-2} que se transforma en calor. También es una magnitud positiva.

ΔJ_{1-2} Pérdida de carga.

Es la diferencia de energía piezométrica o potencial entre 2 secciones separadas por una longitud Δl_{1-2} (caída de la línea de energía piezométrica).

Así, la ecuación (6-6), también se puede reordenar de la siguiente manera:

$$\left(z_1 - z_2 \right) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + \left(\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right) = \Delta J_{1-2}^* \quad (7)$$

La (7) interpreta que la diferencia de energía total por unidad de peso entre las secciones Ω_1 y Ω_2 es igual a la pérdida de energía total hidráulica por unidad de peso en el mismo tramo.

Ejemplos prácticos de un escurrimiento gradualmente variado en escurrimientos a presión lo constituyen los tubos de difusión o aspiración que se fabrican para retirar las turbinas del nivel de descarga en las casas de máquinas. Para que los valores de la velocidad sean mínimos en la salida, se los ensancha de forma gradual hasta lograr la velocidad deseada en el canal de fuga.

Si la altura de aspiración es lo suficientemente grande, el tubo puede ejecutarse en el sentido vertical. Ver *Figura 21*.

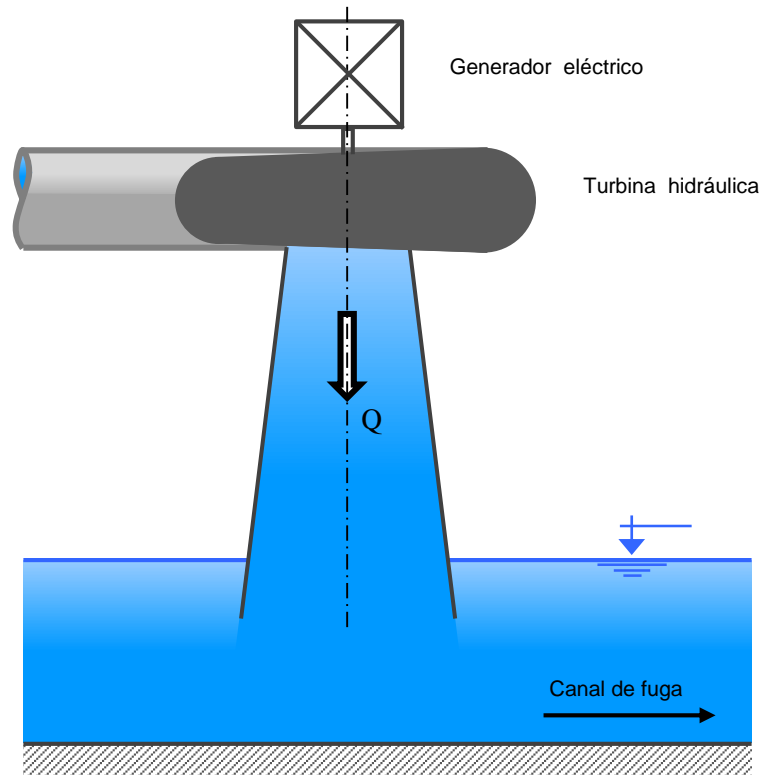


Figura 21 – Tubo de difusión vertical.

En caso contrario, e inclusive si la altura de aspiración es negativa, el tubo se debe construir de forma acodada. Ver *Figura 22*.

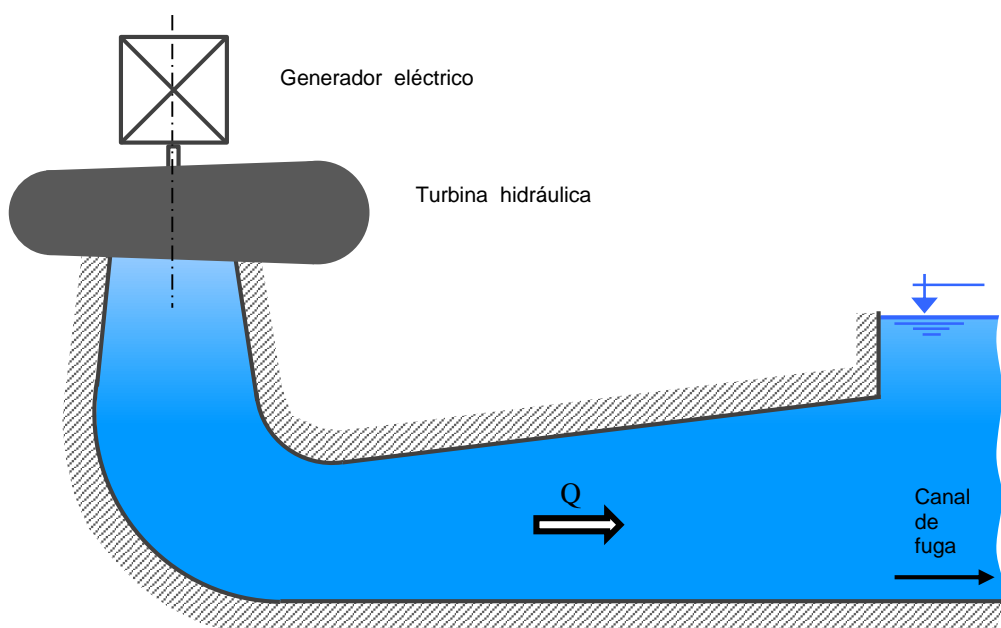


Figura 22 – Tubo de difusión acodado.

Si en el mismo tramo de la tubería señalada en la *Figura 20* se intercala una máquina hidráulica, a la ecuación de Bernoulli se le debe adicionar el término H_t (energía transferida por unidad de peso) a fin de que se mantenga el balance energético. El mismo tendrá signo positivo si se transfiere energía de la máquina al fluido y negativo en caso inverso.

$$\left(z_1 - z_2 \right) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + \left(\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right) = \Delta J_{1-2}^* \pm H_t \quad (8)$$

Si la máquina en cuestión es motora o turbina hidráulica, esta absorbe energía desde la vena fluida para dar movimiento al eje, la cual toma el nombre de *altura útil* $H_t = H_u$ y tiene signo negativo (ver *Figura 23*).

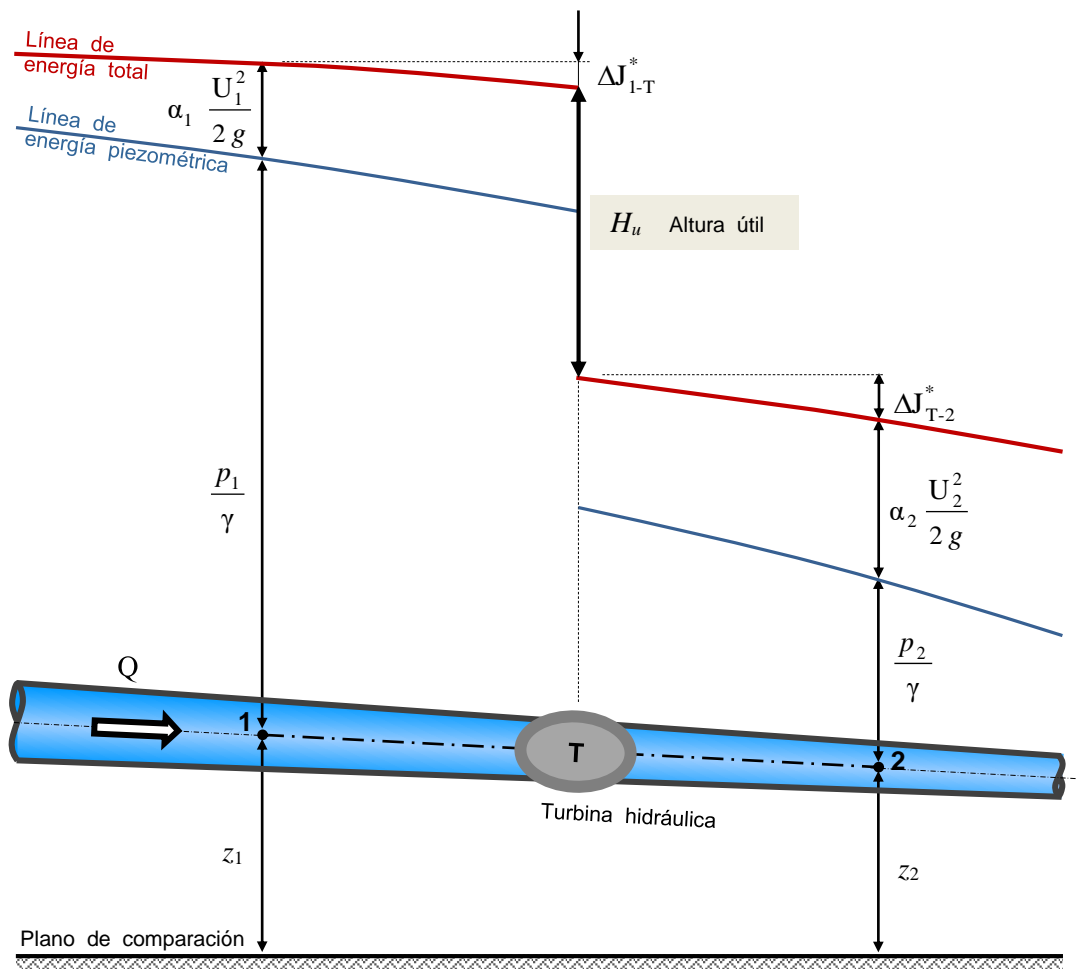


Figura 23 – Conducción con turbina intercalada y movimiento gradualmente variado.

La pérdida de energía por unidad de peso ΔJ_{1-2}^* se ha dividido en dos tramos que toman los valores individuales ΔJ_{1-T}^* y ΔJ_{T-2}^*

$$\Delta J_{1-2}^* = \Delta J_{1-T}^* + \Delta J_{T-2}^* \quad (9)$$

La ecuación de Bernoulli en el tramo de una tubería con una turbina intercalada toma la forma:

$$\left(z_1 - z_2 \right) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + \left(\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right) = \Delta J_{1-2}^* - H_u \quad (10)$$

Por otra parte, si se trata de una máquina operadora o bomba hidráulica, esta inyecta energía al fluido de la conducción, que en este caso se denomina *altura manométrica* $H_t = H_m$ y tiene signo positivo (ver *Figura 24*).

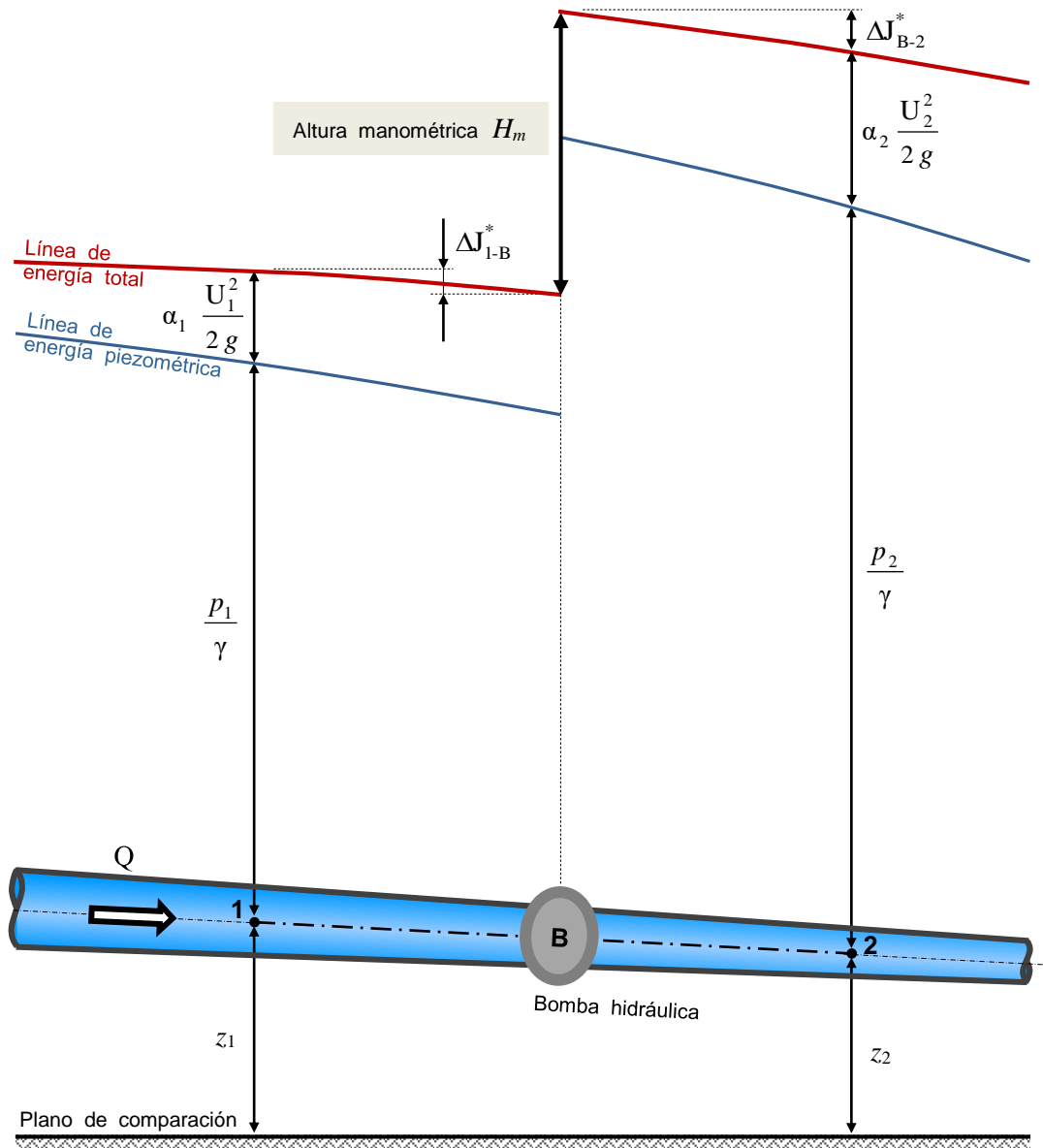


Figura 24 – Conducción con bomba hidráulica intercalada y movimiento gradualmente variado.

La pérdida de energía por unidad de peso en el tramo ΔJ_{1-2}^* resulta:

$$\Delta J_{1-2}^* = \Delta J_{1-B}^* + \Delta J_{B-2}^* \quad (11)$$

La ecuación de Bernoulli para este caso se transforma en:

$$\left(z_1 - z_2 \right) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + \left(\alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right) = \Delta J_{1-2}^* + H_m \quad (12)$$

Los términos individuales que conforman la ecuación de Bernoulli, como ya se ha indicado, corresponden a energías por unidad de peso, no obstante ello, si se observa el análisis deductivo partiendo de la ecuación de Navier-Stokes y aplicada a toda la sección de un tubo de corriente se demuestra que dichos términos implican una potencia por unidad de peso específico γ y de caudal Q .

En efecto, si la energía por unidad de peso H que representa la suma de los tres términos de Bernoulli en una determinada sección (medida en unidades de longitud), se la multiplica por el peso específico γ y por el gasto circulante Q , se obtiene la potencia N del escurrimiento:

$$N = \gamma Q H \quad (13)$$

O bien, dimensionalmente en el sistema técnico:

$$[N] = \frac{F}{L^3} \frac{L^3}{T} \frac{F L}{F} = \frac{F L}{T} \quad (14)$$

Despejando de la ecuación (13) se tiene:

$$H = \frac{N}{\gamma Q} \quad (15)$$

De esta manera se obtiene la energía hidráulica total por unidad de peso H a través de un razonamiento más tecnológico, ya que al tratarse de un movimiento permanente ($Q = cte.$), la expresión (15) concluye siendo independiente del tiempo.

Además, la constancia de la suma de los términos $z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$ en la ecuación de Bernoulli deriva en una forma práctica de interpretar el principio de conservación de la energía.

7.3. Aplicación al movimiento uniforme.

Si se tiene un tubo de corriente con paredes sólidas y sección constante, el escurrimiento del fluido que se produce en el interior del mismo tiene la característica de ser invariable la velocidad media con relación al recorrido $\partial U / \partial l = 0$, denominándose al mismo *movimiento uniforme*.

Se advierte que para este caso, donde la tubería tiene una sección constante (diámetro $D = cte.$ si la tubería es cilíndrica), la pérdida de energía total ΔJ_{1-2}^* es igual a la pérdida de carga ΔJ_{1-2} , ya que al ser constante la velocidad media U , también lo es la energía cinética por unidad de peso $\alpha U^2 / 2g$. Consecuentemente son paralelas las líneas de energía total y piezométrica, por lo que resultan ser en estos casos numéricamente igual ambas pérdidas.

$$\Delta J_{1-2}^* = \Delta J_{1-2} \quad (16)$$

Por ello puede resultar indistinto en los cálculos el uso de la pérdida de energía total o la pérdida de carga.

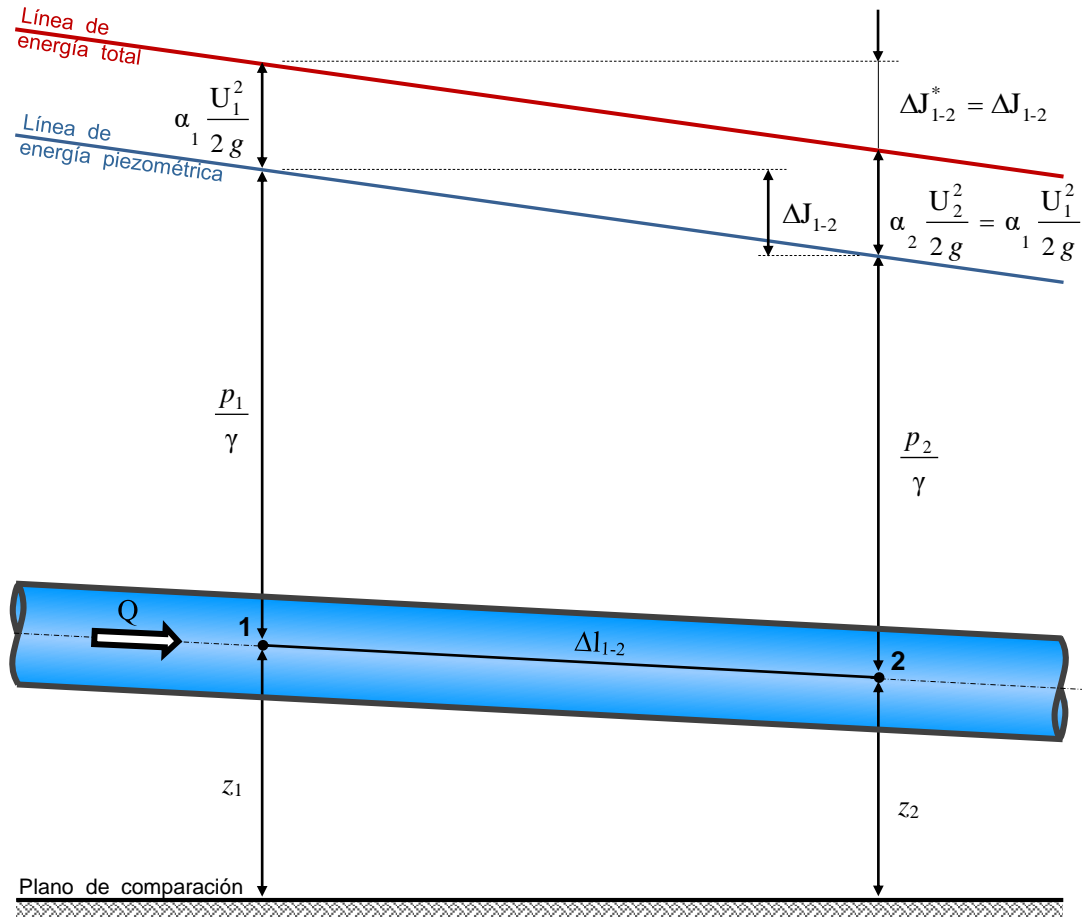


Figura 25 – Conducción con movimiento uniforme.

Las pérdidas consideradas se generan de manera uniforme a lo largo de la conducción y se denominan pérdidas de energía generales.

La pérdida de energía total ΔJ_{1-2}^* producida en el tramo Δl_{1-2} se supone que se desarrolla en proporción lineal al recorrido, y a partir de esta concepción se define la *pérdida de energía total unitaria* a la siguiente relación:

$$j^* = \frac{\Delta J_{1-2}^*}{\Delta l_{1-2}} \quad (17)$$

De forma similar se obtiene la pérdida de carga unitaria, haciendo la relación entre la pérdida de carga o pérdida de energía piezométrica ΔJ_{1-2} y la longitud considerada Δl_{1-2} :

$$j = \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} \quad (18)$$

El movimiento de la masa fluida en un escurrimiento a presión con régimen uniforme se establece como consecuencia de la diferencia de energía piezométrica por unidad de peso entre las secciones consideradas:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \quad (19)$$

A fin de dar una mayor precisión y mejor entendimiento del concepto, a continuación se describe y analiza la variación de la energía total por unidad de peso entre dos secciones de una misma tubería, con los siguientes condicionantes según los valores de presión que adoptan:

a) Presión en la sección Ω_2 menor que en la sección Ω_1 .

Condición:
$$\frac{p_2}{\gamma} < \frac{p_1}{\gamma} \quad (20)$$

a₁) Caso de una tubería en posición horizontal.

(ver Figura 26).

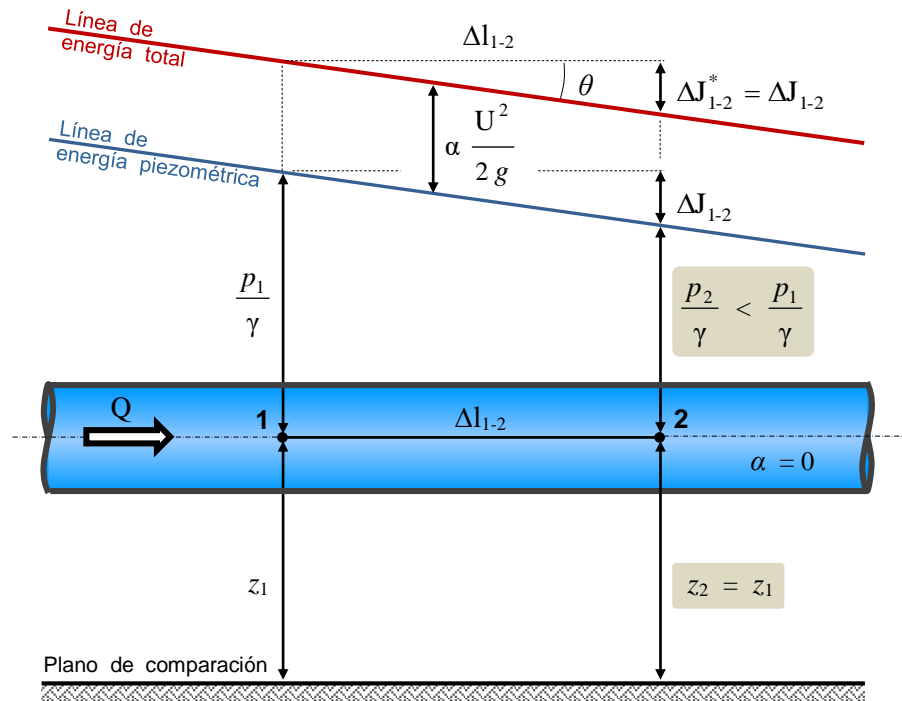


Figura 26 – Conducción en tubería horizontal con movimiento uniforme.

Planteando la tangente trigonométrica en el triángulo rectángulo que se forma en la Figura 26, se tiene:

$$tg\theta = \frac{\Delta J_{1-2}^*}{\Delta l_{1-2}} = \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} = j^* = j \quad (21)$$

El movimiento se genera a expensas exclusivamente de la diferencia de energía de presión por unidad de peso:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}$$

Es en este solo caso particular en que la pendiente o tangente trigonométrica de las líneas de energía total y piezométrica $tg\theta$ coinciden con las pérdidas unitarias de energía total j^* y de carga j . Esta situación se presenta de la forma indicada como consecuencia de la coincidencia del tramo Δl_{1-2} de la tubería con el cateto del triángulo de la Figura 26.

En las demás posiciones de la conducción (oblicua o vertical) nunca concuerdan los valores de la pendiente de las líneas energéticas con las pérdidas unitarias de energía.

a2) Caso de una tubería oblicua con escurrimiento ascendente.

(ver Figura 27).

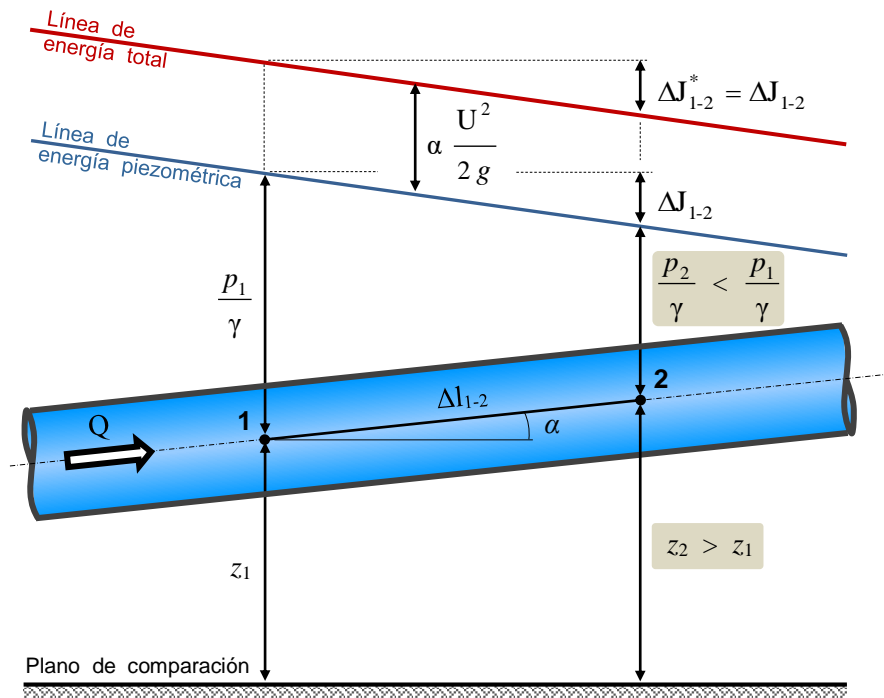


Figura 27 – Conducción en tubería oblicua ascendente con movimiento uniforme.

a3) Caso de una tubería vertical con escurrimiento ascendente.

(ver Figura 28).

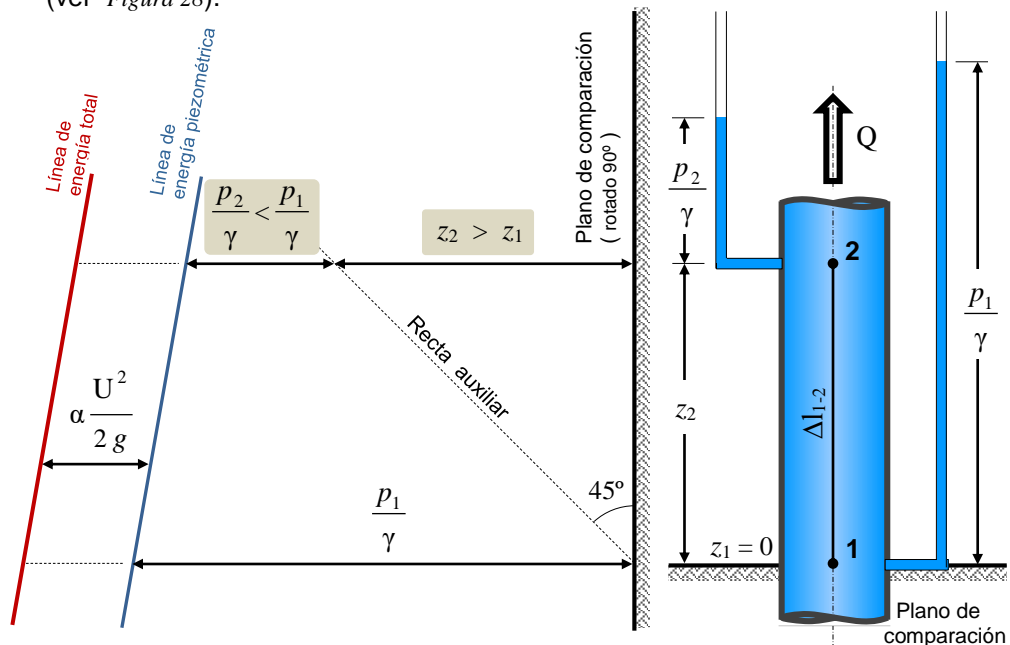


Figura 28 – Conducción en tubería vertical ascendente con movimiento uniforme.

a4) Caso de una tubería levemente oblicua con escurrimiento descendente.

Se cumple con la condición (20) cuando el ángulo α de inclinación correspondiente al eje del conducto está comprendido entre la posición horizontal y el ángulo θ de las líneas de energía (ver Figura 29).

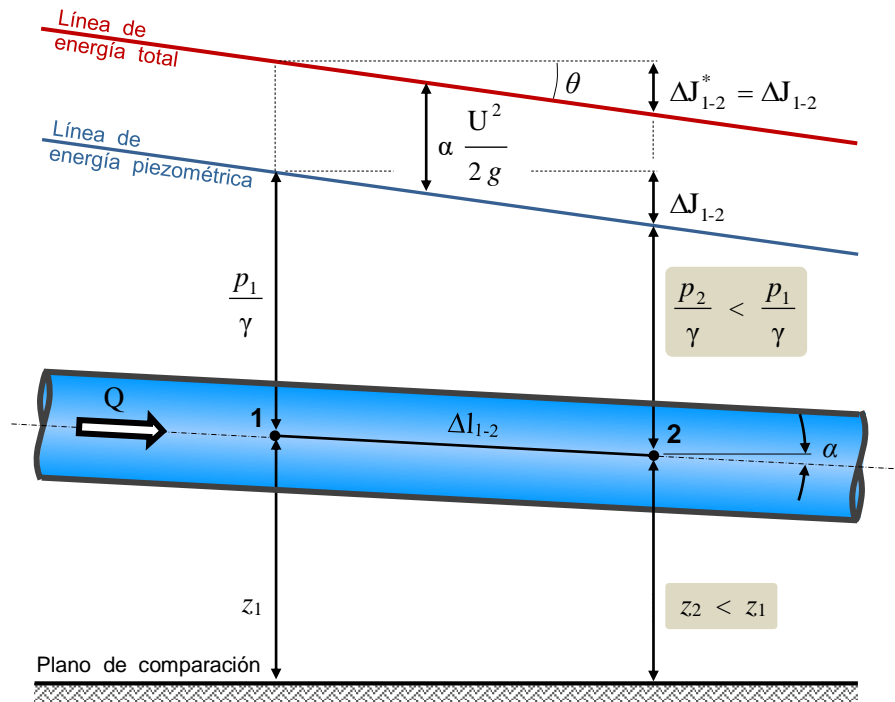


Figura 29 – Conducción en tubería oblicua descendente con movimiento uniforme y $\partial p/\partial l > 0$.

b) Presión en la sección Ω_2 igual que en la sección Ω_1 .

Condición:
$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} \quad (22)$$

El movimiento se desarrolla por efecto único e individual de la diferencia de energía de posición por unidad de peso ($z_1 - z_2$) ya que la presión permanece constante en todo el recorrido. Se debe cumplir la igualdad de los ángulos de inclinación entre el eje del conducto α y las líneas de energía θ . Ver Figura 30.

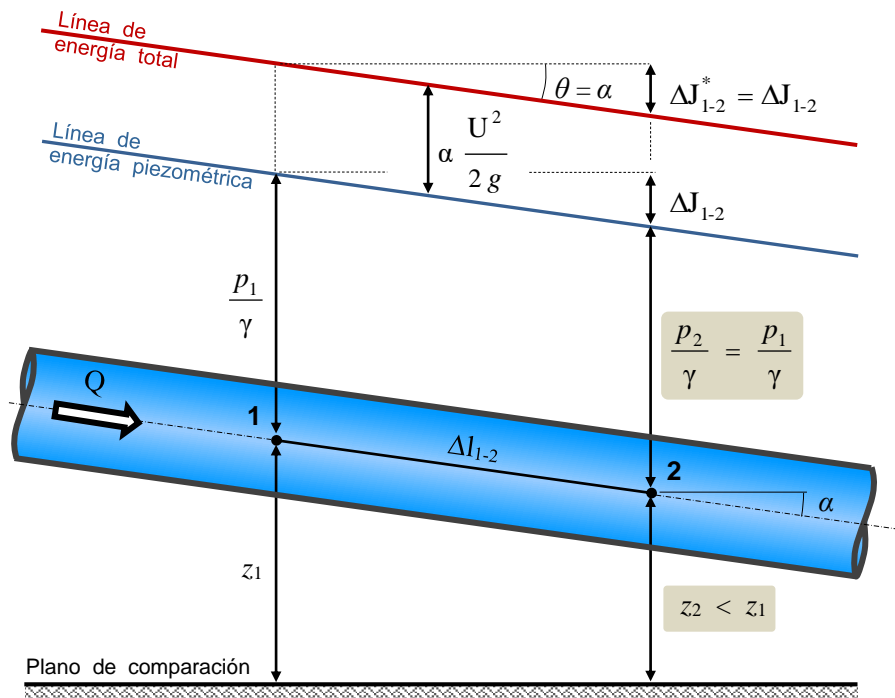


Figura 30 – Conducción en tubería oblicua descendente con movimiento uniforme y $\partial p/\partial l = 0$.

c) Presión en la sección Ω_2 mayor que en la sección Ω_1 .

Condición:
$$\frac{P_2}{\gamma} > \frac{P_1}{\gamma} \tag{23}$$

c₁) Caso de una tubería fuertemente oblicua con escurrimiento descendente.

El ángulo del eje hidráulico α debe ser mayor que el de las líneas de energía θ .
(ver Figura 31).

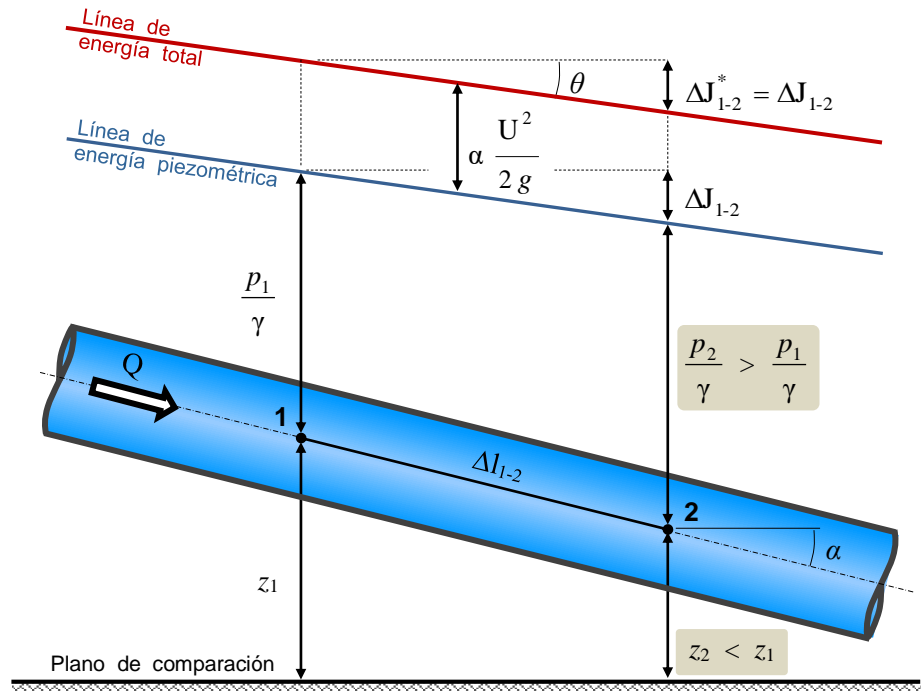


Figura 31 – Conducción en tubería oblicua descendente con movimiento uniforme y $\partial p/\partial l > 0$.

c₂) Caso de una tubería vertical con escurrimiento descendente.

(ver Figura 32).

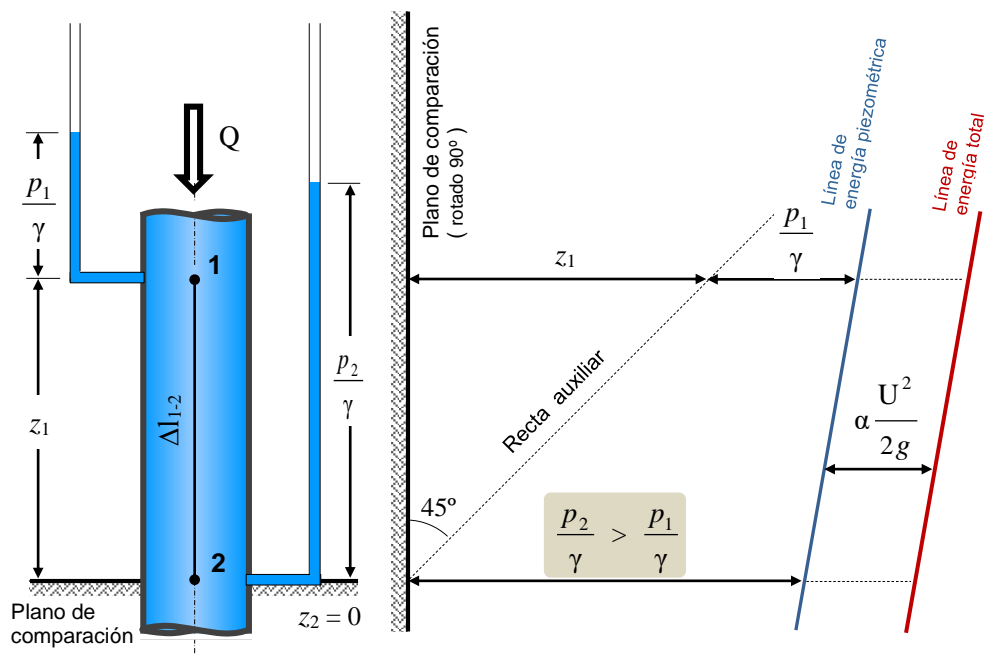


Figura 32 – Conducción en tubería vertical descendente con movimiento uniforme.

En general es común realizar los cálculos de diseño o verificación en acueductos o redes tomando de referencia la línea de energía piezométrica en lugar de la línea de energía total, como correspondería con toda precisión hidráulica. Esta práctica se sustenta en el hecho que la proporción de la energía cinética resulta insignificante si se confronta con respecto a la energía piezométrica.

En efecto, si por ejemplo se considera un conducto donde el fluido escurre con una velocidad media $U = 1 \text{ m/seg}$ (orden de magnitud por demás frecuente y adecuada en los escurrimientos de agua a presión), se obtiene en consecuencia el término correspondiente a la energía cinética:

$$\alpha \frac{U^2}{2g} = \frac{1^2}{2 \cdot 9,81} \frac{\text{m}^2/\text{seg}^2}{\text{m}/\text{seg}^2} \cong 0,05 \text{ m}$$

Evidentemente se trata de un valor muy pero muy pequeño contrastado con la magnitud de la energía piezométrica ($z + p/\gamma$), razón por la cual en las representaciones gráficas la línea de energía total puede coincidir confundiendo con la de energía piezométrica. Consecuentemente y por simplicidad suele utilizarse frecuentemente la línea piezométrica a los fines de los cálculos hidráulicos.

8. RÉGIMEN LAMINAR.

El régimen de un escurrimiento a presión se comporta como *laminar* cuando el movimiento se presenta de forma ordenada, suave, estratificada (en láminas o capas), con apariencia transparente e inmóvil del fluido. En estas condiciones resulta preponderante la acción de las fuerzas viscosas sobre las inerciales, no existiendo transferencia lateral de masa, razón por la cual no se producen torbellinos ni se mezclan los filetes del fluido.

Este tipo de régimen es característico de aquellos fluidos que circulan a bajas velocidades y/o con altas viscosidades, y se manifiesta en tuberías cilíndricas para escurrimientos con valores menores del número de Reynolds crítico ($Re_{\text{crítico}} = 2000$). Son muy pocos los casos de régimen laminar y un ejemplo de ello es la circulación sanguínea.

8.1. Hipótesis inicial.

El análisis del presente tipo de escurrimiento se efectúa partiendo de las siguientes premisas básicas:

- Régimen laminar. Corresponde a números de Reynolds bajos.
- Movimiento permanente. ... $\partial Q/\partial t = 0 \rightarrow$ aceleración local nula.
- Movimiento uniforme. $\partial U/\partial l = 0 \rightarrow$ aceleración convectiva cero.
- Fluido incompresible. $\rho = \text{cte}$.
- Conducto cerrado.
- Tubería cilíndrica. \rightarrow Implica velocidad media constante.

No se consideran las fuerzas debidas a la energía superficial ni las de origen elástico, debido a lo irrelevante de su influencia en el movimiento.

8.2. Distribución de velocidades.

Si bien el objetivo principal es determinar una expresión que permita cuantificar la pérdida de carga en un régimen laminar, es necesario en primer término precisar la distribución de

velocidades en la sección. Para este fin se procede efectuando un planteo físico del problema, para lo cual se define previamente un tramo Δl_{1-2} en la tubería de radio R , y concéntricamente a la misma, otro cilindro de la misma longitud y radio genérico r menor (ver Figura 33).

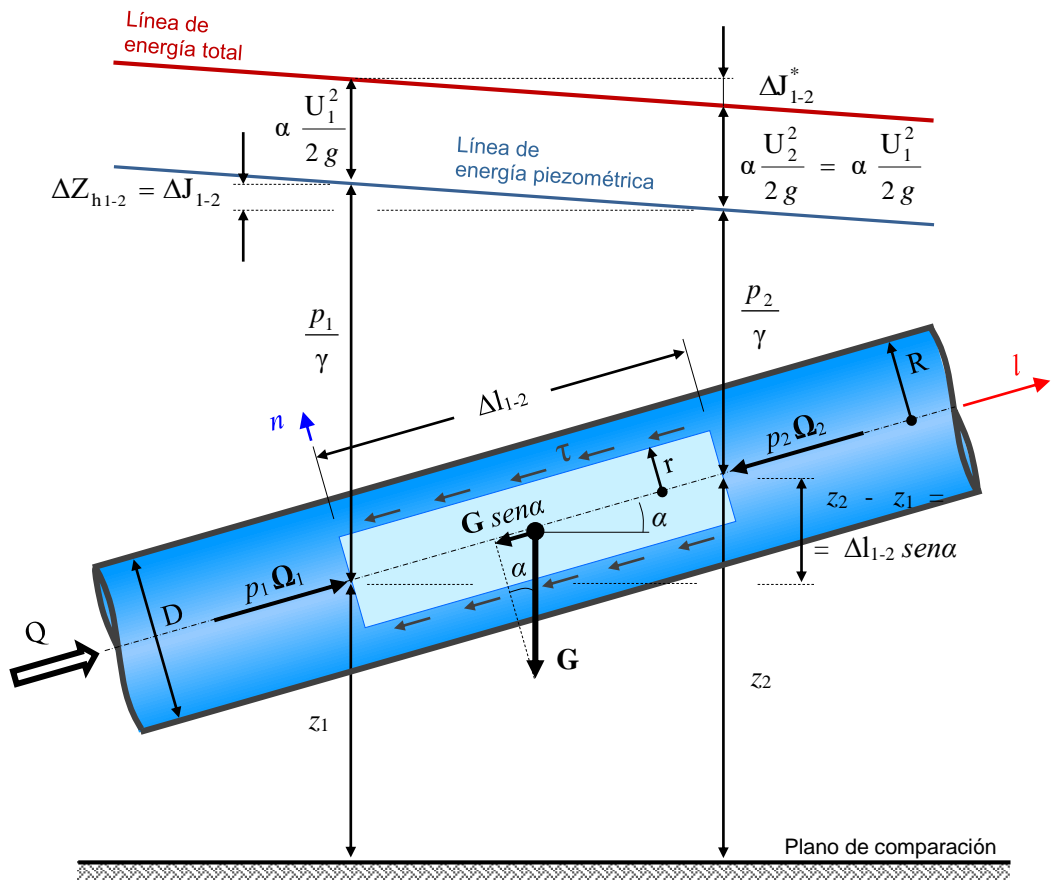


Figura 33 – Fuerzas actuantes en una tubería con régimen laminar.

Sobre este último cilindro se realiza el estudio correspondiente al equilibrio de las fuerzas activas actuantes, recordando de las hipótesis planteadas que la aceleración total es nula (en los postulados de partida se suponen individualmente tanto la aceleración local como la convectiva, ambas iguales a cero).

Las fuerzas actuantes consideraras relevantes para el presente análisis, se agrupan en:

- a) Fuerzas de superficie.
 - a1) Fuerzas de presión \mathbf{F}_p .
Actúan dos de ellas forma perpendicular a cada una de las secciones Ω_1 y Ω_2 respectivamente.
 - a2) Fuerzas de roce \mathbf{F}_r .
Corresponde solamente una fuerza que se origina mediante la acción de las tensiones tangenciales τ que operan sobre la superficie lateral del cilindro considerado. Es una fuerza de tipo resistente que se debe a la viscosidad del fluido.
- b) Fuerzas de masa \mathbf{F}_m .
Solo interviene el peso propio \mathbf{G} del fluido.

Dividiendo por $\gamma \pi r$ y reordenando:

$$r \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = - \mu \frac{2 \Delta l_{1-2}}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (29)$$

La ecuación de Bernoulli aplicada al movimiento uniforme es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J_{1-2}^*$$

Para este caso se cumple:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \\ \Delta J_{1-2}^* = \Delta J_{1-2} \end{array} \right.$$

Entonces la pérdida de carga resulta:

$$\Delta J_{1-2} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \quad (30)$$

Reemplazando (30) en (29):

$$r \Delta J_{1-2} = - \mu \frac{2 \Delta l_{1-2}}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (31)$$

Al tratarse de un movimiento permanente y uniforme, la velocidad se comporta de forma constante respecto al tiempo y al recorrido, por lo solo resulta variar con relación al radio. Consecuentemente se puede afirmar que la derivada parcial de la velocidad V con respecto al radio r es igual a la derivada total:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr} \quad (32)$$

Introduciendo (32) en (31) y despejando dV :

$$dV = - \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} \frac{\gamma}{2 \mu} r dr = - \frac{j \gamma}{2 \mu} r dr \quad (33)$$

Por ser un escurrimiento en régimen laminar, se comporta la viscosidad dinámica de manera constante ($\mu = cte.$). Además, previo a la integración de la ecuación (33), se fijan las condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si: } r = R \quad \Rightarrow \quad V = 0 \quad (\text{principio de Meyer}) \\ \text{Si: } r = r \quad (\text{radio genérico}) \quad \Rightarrow \quad V = V \quad (\text{velocidad genérica}) \end{array} \right.$$

Integrando:

$$\int_0^V dV = -\frac{j \gamma}{2 \mu} \int_R^r r dr \quad \Rightarrow$$

$$V = \frac{j \gamma}{4 \mu} (R^2 - r^2) \quad (34)$$

La fórmula (34) es una expresión de variación parabólica que permite determinar el valor de la velocidad en cualquier punto de una sección transversal correspondiente a un conducto cilíndrico, en régimen laminar con movimiento permanente y uniforme.

En los extremos se obtiene, por aplicación directa de la (34):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } r = R \quad (\text{sobre los bordes sólidos}) \quad \Rightarrow \quad V = 0 \\ \text{Para } r = 0 \quad (\text{en el eje hidráulico}) \quad \Rightarrow \quad V = V_{\text{máx}} \end{array} \right.$$

La velocidad máxima $V_{\text{máx}}$ que se produce en coincidencia con el baricentro de la sección, resulta ser igual a:

$$V_{\text{máx}} = \frac{j \gamma}{4 \mu} R^2 \quad (35)$$

Ver *Figura 34*.

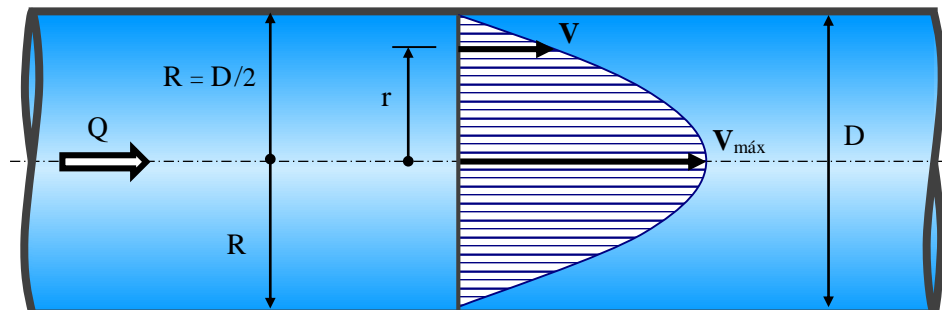


Figura 34– Distribución de velocidades en un tubo cilíndrico con régimen laminar.

Teniendo en cuenta la misma representación anterior pero ahora aplicada de manera tridimensional, en esa situación la distribución de velocidades se describe mediante un volumen con forma de paraboloides de revolución (ver *Figura 35*).

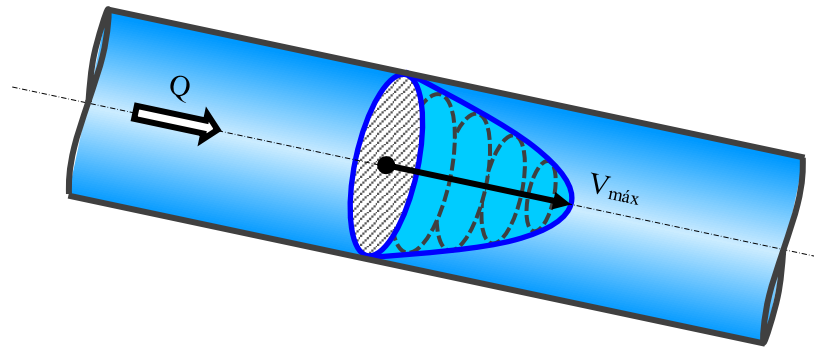


Figura 35 – Perspectiva de la distribución tridimensional de velocidades en régimen laminar.

8.3. Variantes del análisis.

8.3.1. Caudal y velocidad media.

Sabiendo la distribución de velocidades en una determinada sección transversal Ω de una conducción, se puede calcular sencillamente el gasto o caudal Q resolviendo la integral:

$$Q = \int_{\Omega} dQ = \int_{\Omega} V d\Omega \tag{36}$$

El diferencial de sección $d\Omega$ debe ser seleccionado de forma tal que la velocidad V resulte constante en todos sus puntos. Para tuberías cilíndricas corresponde velocidad V constante en las coronas circulares concéntricas de ancho dr en el sentido del radio (ver Figura 36).

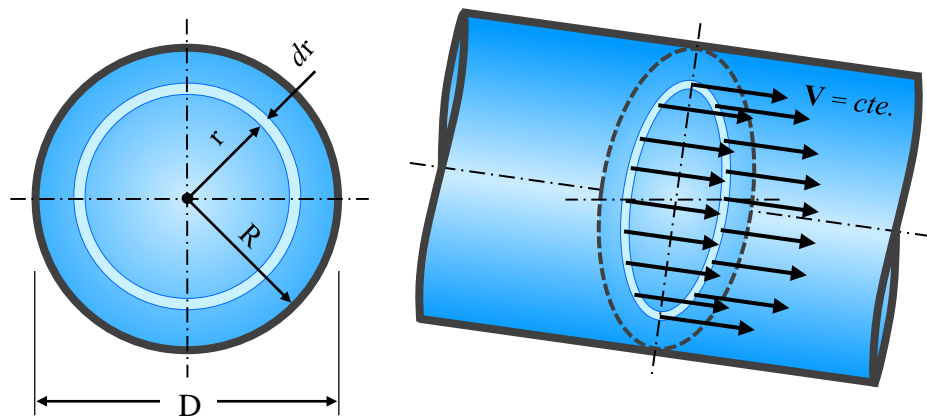


Figura 36 – Corte y perspectiva de una sección con escurrimiento en régimen laminar.

Por consiguiente:

$$d\Omega = 2\pi r dr \tag{37}$$

Reemplazando (34) y (37) en (36):

$$Q = \int_0^R \frac{j \gamma}{4 \mu} (R^2 - r^2) 2 \pi r dr$$

Sacando los términos constantes de la operación integral a excepción del número 2:

$$Q = \frac{j \gamma \pi}{4 \mu} \int_0^R (R^2 - r^2) 2 r dr \quad (38)$$

CÁLCULO AUXILIAR

Aplicando el método de sustitución se resuelve la integral que forma parte de la fórmula (38). Para ello se define una nueva variable u que contiene a la variable original r :

$$u = R^2 - r^2$$

$$\therefore du = -2 r dr \quad \Rightarrow \quad dr = -\frac{du}{2 r}$$

$$\int_0^R (R^2 - r^2) 2 r dr = - \int_{R^2}^0 u du = \left[-\frac{u^2}{2} \right]_{R^2}^0 =$$

$$= \left[-\frac{(R^2 - r^2)^2}{2} \right]_0^R = 0 - \left[-\frac{(R^2)^2}{2} \right] = \frac{R^4}{2}$$

$$\int_0^R (R^2 - r^2) 2 r dr = \frac{R^4}{2} \quad (39)$$

Insertando (39) en (38):

$$Q = \frac{j \gamma \pi}{8 \mu} R^4 \quad (40)$$

O bien, la misma anterior pero enunciada en función del diámetro D :

$$Q = \frac{j \gamma \pi}{128 \mu} D^4 \quad (41)$$

La ecuación (41) expresa el gasto o caudal Q que circula a través de una tubería cilíndrica en régimen laminar con movimiento permanente y uniforme.

La velocidad media U en cualquier sección Ω de la conducción se obtiene simplemente relacionando el gasto Q con dicha sección:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{j \gamma \pi}{8 \mu} R^4 \frac{1}{\pi R^2} =$$

$$U = \frac{j \gamma}{8 \mu} R^2 \tag{42}$$

O sino referenciada al diámetro D , tal como es más habitual su uso en la práctica:

$$U = \frac{j \gamma}{32 \mu} D^2 \tag{43}$$

Si se efectúa la relación entre las ecuaciones (35) y (43) se puede observar que en régimen laminar la velocidad máxima $V_{m\acute{a}x}$ es justamente el doble que la velocidad media U (ver *Figura 37*).

$$\frac{V_{m\acute{a}x}}{U} = \frac{\frac{j \gamma}{4 \mu} R^2}{\frac{j \gamma}{8 \mu} R^2} = 2 \Rightarrow$$

$$V_{m\acute{a}x} = 2 U \tag{44}$$

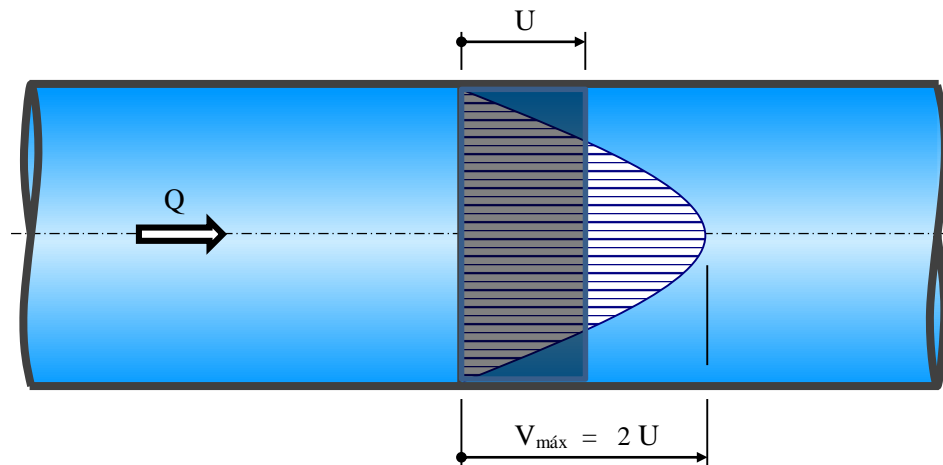


Figura 37 – Velocidad media y velocidad máxima en un escurrimiento con régimen laminar.

8.3.2. Expresión de Hagen - Poiseuille.

El gradiente de la pérdida de carga piezométrica se determina simplemente despejando el término correspondiente de la ecuación (43):

$$j = 32 \frac{\mu U}{\gamma D^2} \quad (45)$$

O bien, la pérdida de carga en el tramo Δl_{1-2} :

$$\Delta J_{1-2} = 32 \frac{\mu U \Delta l_{1-2}}{\gamma D^2}$$

Si en lugar de analizar un tramo de la tubería Δl_{1-2} entre las secciones Ω_1 y Ω_2 , se estudia sobre la totalidad de la conducción l , la nomenclatura correspondiente a la pérdida de carga pasa a denominarse J en vez de su variación parcial ΔJ_{1-2} . Por lo tanto, para esta situación planteada y expresando básicamente el mismo concepto, la ecuación anterior queda:

$$J = 32 \frac{\mu U l}{\gamma D^2} \quad (46)$$

Las expresiones (45) y (46) se conocen en el ámbito de la hidráulica como las *ecuaciones de Hagen – Poiseuille* en honor a los investigadores Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (Alemania 1797-1884) y Jean Léonard Marie Poiseuille (Francia 1797-1869). Analizando en particular la (46), la cual se emplea puntualmente para el cálculo de la pérdida de carga en una tubería de longitud l , se puede observar que dicha pérdida resulta ser directamente proporcional a la velocidad media U del escurrimiento.

La misma evalúa la pérdida J en función de las siguientes variables:

- Propiedades físicas de los fluidos: μ y γ .
- Geométricas: D y l .
- Cinemáticas: U .

Así mismo, la (46) se puede reformular en función del gasto o caudal Q , para lo cual se procede multiplicando y dividiendo simultáneamente por la sección Ω , y luego se considera la igualdad $U \Omega = Q$:

$$J = 32 \frac{\mu U l}{\gamma D^2} \frac{\Omega}{\Omega} = 32 \frac{\mu Q l}{\gamma D^2} \frac{4}{\pi D^2} =$$

$$J = 128 \frac{\mu Q l}{\gamma \pi D^4} \quad (47)$$

Esta es otra forma de presentar la expresión de Hagen - Poiseuille, en la que se puede apreciar la significativa influencia por parte del diámetro D en la pérdida de carga J . En efecto, para un escurrimiento en un régimen laminar resulta ser inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro D .

Si por ejemplo se tiene una conducción por la cual circula un gasto Q de un determinado fluido con viscosidad μ a través de una sección de diámetro D , en el tramo l se va producir una pérdida de energía J tal como se deduce si se aplica la ecuación (47). Luego, manteniendo las mismas condiciones del escurrimiento (igual caudal Q) y del fluido (igual viscosidad μ), pero reduciendo a la mitad el diámetro de la tubería ($D/2$), entonces se tendrá que la pérdida de energía se va a incrementar 16 veces.

Por el contrario, si el nuevo diámetro considerado aumenta al doble ($2 D$), la pérdida de energía se va a ver disminuida en esa misma proporción.

8.3.3. Esfuerzo de corte.

La tensión cortante aplicada a una conducción cilíndrica con régimen laminar responde a la ley de Newton ajustada al presente caso en estudio:

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr} \quad (48)$$

El objetivo consiste en determinar la variación del esfuerzo tangencial cortante τ con respecto al radio r , para lo cual se procede introduciendo la ecuación (34) en (48):

$$\tau = -\mu \frac{d}{dr} \left[\frac{j \gamma}{4 \mu} (R^2 - r^2) \right] = -\mu \frac{j \gamma}{4 \mu} \frac{d}{dr} (R^2 - r^2) = -\frac{j \gamma}{4} (-2r) =$$

$$\tau = \frac{j \gamma}{2} r \quad (49)$$

Observando la fórmula (49) se desprende que la tensión cortante τ varía de forma lineal con el radio r (ver *Figura 38*), y adopta los siguientes valores límites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si: } r = 0 \quad (\text{en el eje hidráulico}) \quad \Rightarrow \quad \tau = 0 \\ \text{Si: } r = R \quad (\text{en los bordes sólidos}) \quad \Rightarrow \quad \tau = \tau_0 = \tau_{\text{máx}} \end{array} \right.$$

El esfuerzo tangencial que genera un fluido sobre un sólido se denomina τ_0 y en este caso coincide con el esfuerzo de corte máximo $\tau_{\text{máx}}$ que vale:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{j \gamma}{2} R \quad (50)$$

Otra forma de expresar la tensión máxima $\tau_{\text{máx}}$ sobre los bordes sólidos de una tubería resulta de reemplazar la pérdida de carga unitaria j , la que se despeja previamente de la ecuación (42), en la (50):

$$\begin{aligned} \tau_{\text{máx}} &= 8 \frac{\mu U}{\gamma R^2} \frac{\gamma}{2} R \quad \Rightarrow \\ \tau_{\text{máx}} &= 4 \frac{\mu U}{R} \quad (51) \end{aligned}$$

O bien, la misma $\tau_{\text{máx}}$ enunciada en la (51) pero en función del gasto Q y el diámetro D :

$$\tau_{\text{máx}} = 32 \frac{\mu Q}{\pi D^3} \quad (52)$$

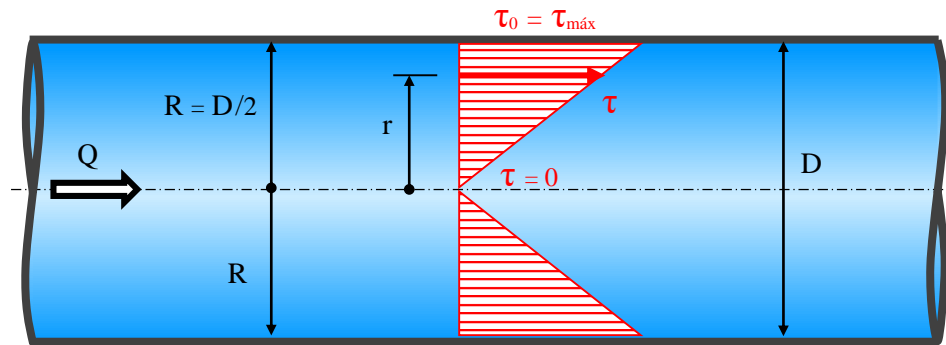


Figura 38 – Distribución del esfuerzo de corte en un escurrimiento con régimen laminar.

8.3.4. Coeficiente de Coriolis.

Recordando en primer término la expresión general del coeficiente de Coriolis α :

$$\alpha = \frac{1}{U^3 \Omega} \int_{\Omega} V^3 d\Omega \quad (53)$$

Reemplazando en la fórmula (53) las expresiones particulares de U y V concernientes a tuberías con régimen laminar, dadas por las ecuaciones (42) y (34), se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{\left(\frac{j \gamma}{8 \mu}\right)^3 (R^2)^3 \pi R^2} \int_0^R \left(\frac{j \gamma}{4 \mu}\right)^3 (R^2 - r^2)^3 2 \pi r dr \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{8}{R^8} \int_0^R (R^2 - r^2)^3 2 r dr \quad (54)$$

CÁLCULO AUXILIAR

Resolución de la integral que compone la ecuación (54):

$$u = R^2 - r^2$$

$$\therefore du = -2 r dr \Rightarrow dr = -\frac{du}{2 r}$$

$$\int_0^R (R^2 - r^2)^3 2 r dr = - \int_{R^2}^0 u^3 du = \left[-\frac{u^4}{4} \right]_{R^2}^0 =$$

$$= \left[-\frac{(R^2 - r^2)^4}{4} \right]_0^R = 0 - \left[-\frac{(R^2)^4}{4} \right] = \frac{R^8}{4}$$

$$\int_0^R (R^2 - r^2)^3 2 r dr = \frac{R^8}{4} \quad (55)$$

Introduciendo (55) en (54):

$$\alpha = \frac{8}{R^8} \frac{R^8}{4} \Rightarrow$$

$$\alpha = 2$$

(56)

Finalmente queda demostrado analíticamente que el coeficiente de Coriolis α es igual a dos, resultando ser el único valor posible en escurrimientos a través de tuberías de sección circular con regímenes laminares.

8.3.5. Coeficiente de Boussinesq.

El coeficiente de Boussinesq se puede determinar mediante la aplicación de su fórmula general:

$$\beta = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{U}{V} \right)^2 d\Omega$$

O sino, más sencillamente, su cálculo se puede realizar teniendo en cuenta la relación existente con el coeficiente de Coriolis α :

$$\beta = 1 + \frac{\alpha - 1}{3}$$

A partir de esta última expresión se cuantifica la magnitud del coeficiente de Boussinesq para un régimen laminar, el que resulta:

$$\beta = 1 + \frac{2 - 1}{3} = \frac{4}{3} =$$

$$\beta = 1,33$$

(57)

8.4. Escurrimiento entre dos placas paralelas.

Se estudia a continuación un escurrimiento laminar de un fluido que circula limitado entre dos placas planas paralelas con movimiento permanente y uniforme.

Además se supone la inexistencia de cualquier tipo de confinamientos laterales y por otra parte se señala que los análisis teóricos tienen similares características a los realizados para conductos cilíndricos con el fin de determinar la magnitud de las variables intervinientes en el movimiento.

Un ejemplo práctico que de este tipo de escurrimiento en la naturaleza, lo da la hidráulica subterránea con el movimiento del agua a través de mantos de suelos permeables.

Ver *Figura 39*.

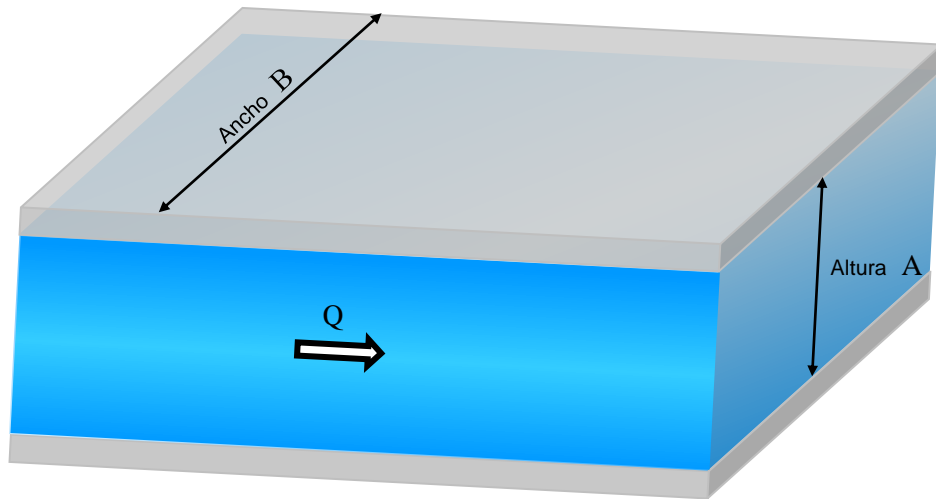


Figura 39 – E scorrimento entre placas planas paralelas con régimen laminar.

a) Distribución de velocidades.

A tal fin se plantea el equilibrio de fuerzas actuantes sobre el eje l de la terna intrínseca, definido de forma coincidente con la línea media entre ambas placas, para lo cual se selecciona una porción de fluido con forma de paralelepípedo recto, ubicado simétricamente respecto a la altura A (ver Figura 40) y de dimensiones:

- Longitud: Δl_{1-2}
- Alto: $2h$
- Ancho: B

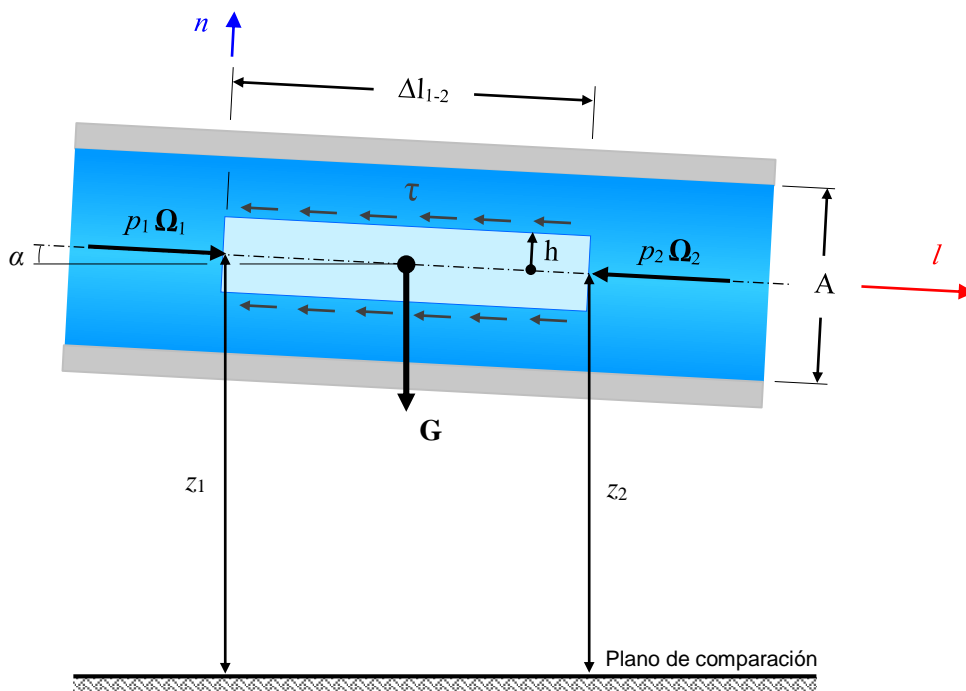


Figura 40 – Fuerzas actuantes sobre un paralelepípedo con régimen laminar.

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2 & - & 2 \tau \Delta l_{1-2} B & + & G \operatorname{sen} \alpha & = & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (F_p)_l & & (F_r)_l & & (F_m)_l & & (F_i)_l
 \end{array} \quad (58)$$

Donde:

1º) Secciones:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 2 h B \quad (59)$$

2º) Tensión tangencial:

$$\tau = \mu \left(- \frac{\partial V}{\partial h} \right) = - \mu \frac{dV}{dh} \quad (60)$$

3º) Peso $\rightarrow G = \gamma V = \gamma 2 h B \Delta l_{1-2}$

Término: $G \operatorname{sen} \alpha = \gamma 2 h B \Delta l_{1-2} \operatorname{sen} \alpha =$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow} \\
 (z_1 - z_2)$$

$$G \operatorname{sen} \alpha = \gamma 2 h B (z_1 - z_2) \quad (61)$$

Introduciendo (59), (60) y (61) en (58):

$$(p_1 - p_2) 2 h B + 2 \mu \frac{dV}{dh} B \Delta l_{1-2} + \gamma 2 h B (z_1 - z_2) = 0$$

Dividiendo por $\gamma 2 h B$ y reordenando:

$$\underbrace{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)}_{\downarrow} = - \frac{\mu \Delta l_{1-2}}{\gamma h} \frac{dV}{dh}$$

$$\Delta J_{1-2}$$

$$\Rightarrow j = \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} = - \frac{\mu}{\gamma h} \frac{dV}{dh}$$

Despejando dV :

$$dV = - \frac{j \gamma}{\mu} h dh \quad (62)$$

Condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si: } h = A/2 & \Rightarrow V = 0 \quad (\text{principio de Meyer}) \\ \text{Si: } h = h \quad (\text{distancia genérica}) & \Rightarrow V = V \quad (\text{velocidad genérica}) \end{array} \right.$$

Integrando:

$$\int_0^V dV = -\frac{j\gamma}{\mu} \int_{A/2}^h h dh \Rightarrow$$

$$V = \frac{j\gamma}{2\mu} \left(\frac{A^2}{4} - h^2 \right) \quad (63)$$

La ecuación (63) indica que en un escurrimiento entre dos placas planas y paralelas con régimen laminar y movimiento permanente y uniforme, la variación de la velocidad en la sección considerada es de tipo parabólica.

Mediante la aplicación de la (63), en los puntos extremos se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Para } h = \pm A/2 \quad (\text{sobre los bordes sólidos}) & \Rightarrow V = 0 \\ \text{Para } h = 0 \quad (\text{en el eje hidráulico}) & \Rightarrow V = V_{\text{máx}} \end{array} \right.$$

La velocidad máxima $V_{\text{máx}}$ vale:

$$V_{\text{máx}} = \frac{j\gamma}{8\mu} A^2 \quad (64)$$

Ver *Figura 41*.

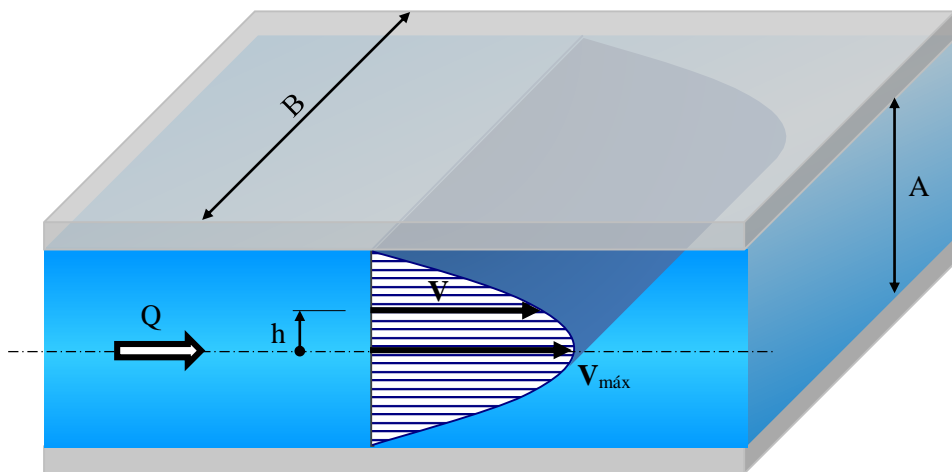


Figura 41 – Distribución de velocidades en un escurrimiento entre placas con régimen laminar.

b) Gasto o caudal Q:

$$Q = \int_{\Omega} dQ = \int_{-A/2}^{+A/2} V B dh \quad (65)$$

Reemplazando la ecuación (6-63) en (6-65) y resolviendo la integral, se obtiene:

$$Q = \int_{-A/2}^{+A/2} V B dh = \frac{j \gamma B}{2 \mu} \int_{-A/2}^{+A/2} \left(\frac{A^2}{4} - h^2 \right) dh =$$

$$Q = \frac{j \gamma B}{2 \mu} \left[\frac{A^2}{4} h - \frac{h^3}{3} \right]_{-A/2}^{+A/2} = \frac{j \gamma B}{2 \mu} \frac{A^3}{6} =$$

$$Q = \frac{j \gamma B}{12 \mu} A^3 \quad (66)$$

c) Velocidad media U.

Se calcula mediante la relación:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\frac{j \gamma B}{12 \mu} A^3}{A B} =$$

$$U = \frac{j \gamma}{12 \mu} A^2 \quad (67)$$

Haciendo el cociente entre las ecuaciones (64) y (67) se obtiene la relación existente, para este tipo de escurrimiento, entre la velocidad máxima $V_{\text{máx}}$ y la velocidad media U:

$$\frac{V_{\text{máx}}}{U} = \frac{\frac{j \gamma}{8 \mu} A^2}{\frac{j \gamma}{12 \mu} A^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$V_{\text{máx}} = \frac{3}{2} U \quad (68)$$

Recordando que para un escurrimiento a través una tubería de sección circular con régimen laminar la velocidad máxima $V_{\text{máx}}$ es el doble de la media U, esa relación disminuye a una vez y media si el movimiento se produce entre placas paralelas.

d) Gradiente de la pérdida de carga j .

Despejando j de la (67):

$$j = 12 \frac{\mu U}{\gamma A^2} \quad (69)$$

O sino, expresando la anterior en función del gasto Q :

$$j = 12 \frac{\mu}{\gamma A^2} \frac{Q}{A B} = \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} =$$

$$j = 12 \frac{\mu Q}{\gamma A^3 B} \quad (70)$$

e) Esfuerzo de corte τ .

Al presente caso aplica la ley de Newton:

$$\tau = \mu \left(- \frac{\partial V}{\partial h} \right) = - \mu \frac{dV}{dh} \quad (71)$$

De (63) se determina la derivada de V respecta a h , resultando:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{j \gamma}{2 \mu} (- 2 h) \quad (72)$$

Introduciendo la fórmula (72) en (71):

$$\tau = - \mu \frac{j \gamma}{2 \mu} (- 2 h) =$$

$$\tau = j \gamma h \quad (73)$$

En los límites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si: } h = 0 \quad (\text{en el eje de referencia}) \quad \Rightarrow \quad \tau = 0 \\ \text{Si: } h = A/2 \quad (\text{en los bordes sólidos}) \quad \Rightarrow \quad \tau = \tau_0 = \tau_{\text{máx}} \end{array} \right.$$

Siendo:

$$\tau_{\text{máx}} = j \gamma \frac{A}{2} \quad (74)$$

O bien, insertando la (70) en (74), queda expresada de forma más explícita:

$$\tau_{\text{máx}} = 12 \frac{\mu Q}{\gamma A^3 B} \gamma \frac{A}{2} =$$

$$\tau_{\text{máx}} = 6 \frac{\mu Q}{A^2 B} \tag{75}$$

De la ecuación (73) se puede visualizar que la tensión tangencial τ es mínima (igual a cero) sobre el eje de referencia, mientras que resulta máxima junto a los bordes sólidos de las placas que contienen al fluido en movimiento.

f) Coeficiente de Coriolis α .

Las ecuaciones (63) y (67) se reemplazan primeramente en la expresión general de α dada por la (53), y luego se resuelve:

$$\alpha = \frac{1}{\left(\frac{j \gamma}{12 \mu} A^2\right)^3 B A} \int_{-A/2}^{+A/2} \left[\frac{j \gamma}{2 \mu} \left(\frac{A^2}{4} - h^2 \right) \right]^3 B dh$$

$$\downarrow$$

$$\frac{54}{35} \left(\frac{j \gamma}{12 \mu} \right)^3 B A^7$$

Finalmente se determina el valor del coeficiente de Coriolis α , válido solo para escurrimientos laminares de líquidos circulantes entre placas planas paralelas:

$$\alpha \cong 1,54 \tag{76}$$

g) Coeficiente de Boussinesq β .

Se puede demostrar que la relación entre el coeficiente de Boussinesq β y el de Coriolis α permanece inalterada para el caso de escurrimientos entre placas con respecto a lo estudiado referente a la circulación por conductos cilíndricos. Haciendo uso de dicha relación, se obtiene:

$$\beta = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{U}{V} \right)^2 d\Omega = 1 + \frac{\alpha - 1}{3} = 1 + \frac{1,54 - 1}{3} =$$

$$\beta \cong 1,18 \tag{77}$$

9. RESISTENCIA DE SUPERFICIE.

9.1. Introducción.

Si un fluido real en movimiento se encuentra en contacto con un sólido, el mismo genera un esfuerzo cortante τ sobre la superficie que resulta ser directamente proporcional al gradiente transversal de velocidades dV/dn .

En efecto, la velocidad del fluido en contacto con el sólido supuestamente en reposo resulta ser nula, dando cumplimiento a lo estipulado por el principio de Meyer. Así se tiene que las sucesivas capas adyacentes están animadas de una velocidad que provocan un gradiente transversal que genera a su vez un esfuerzo cortante sobre la superficie del sólido.

Si el fluido circulante fuera ideal, en esta circunstancia no existe viscosidad como propiedad característica del fluido y las partículas junto a los bordes sólidos sí están en movimiento con velocidad V .

En el caso concreto de los fluidos reales pueden presentarse dos realidades debidamente diferenciadas, o bien que las tensiones tangenciales se produzcan como consecuencia de un escurrimiento con régimen laminar o sino de tipo turbulento, pudiendo llegar a coexistir simultáneamente una zona con régimen laminar y otra turbulenta.

a) Régimen laminar.

La fuerza de resistencia de superficie se cuantifica a partir de la ley de Newton:

$$\tau = \mu \frac{dV}{dn}$$

Asumiendo la existencia de esta fuerza y considerando las demás intervinientes se obtiene el gradiente de la pérdida de carga dada por la expresión de Hagen – Poiseuille en escurrimientos a través de tuberías de sección circular. La distribución de velocidades es parabólica (ver *Figura 42*).

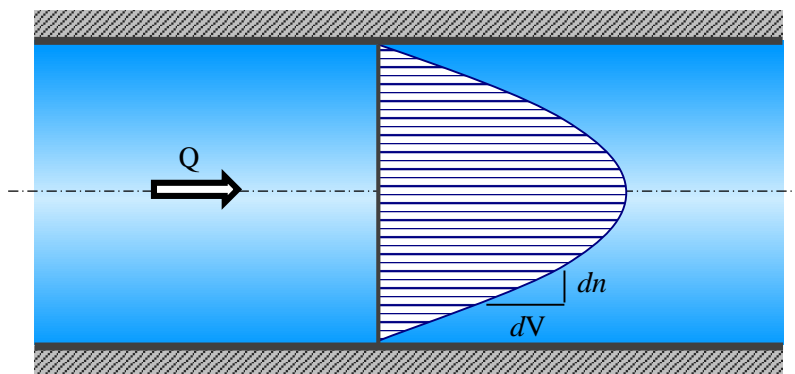


Figura 42 – Distribución de velocidades en régimen laminar.

b) Régimen turbulento.

En los movimientos con elevados números de Reynolds los efectos de la viscosidad se concentran en una zona delgada muy próxima a los bordes sólidos.

Inicialmente todos los estudios se orientaban hacia el agua y se estimaba que existía una velocidad distinta de cero en contacto con los contornos sólidos, pero el desarrollo de otras disciplinas vinculadas a la ingeniería química, naval y aeronáutica probaron la nulidad de dicha velocidad.

En efecto, investigaciones realizadas por el físico alemán Ludwig Prandtl (1875-1953) a comienzos del siglo XX probaron que también en régimen turbulento se

cumple la nulidad de las velocidades en contacto con las superficies sólidas en reposo, concentrándose en una región muy próxima los efectos viscosos y distribuyéndose las velocidades con una ley logarítmica (ver *Figura 43*).

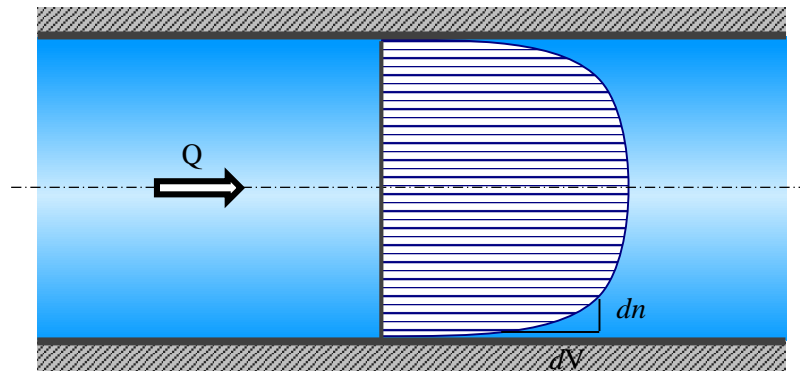


Figura 43 – Distribución de velocidades en régimen turbulento

9.2. Teoría de la capa límite.

La teoría de la capa límite fue desarrollada por Prandtl y la misma establece que para un fluido en movimiento todas las pérdidas friccionales se producen en una delgada franja adyacente al contorno sólido, también conocido como estrato límite.

En general se puede afirmar que debido a la baja viscosidad de la mayoría de los fluidos, las fuerzas cortantes son apreciables solo donde existan grandes gradientes de velocidad dV/dn , mientras que por otra parte, el escurrimiento en las demás zonas se puede describir sin mayor error por medio de la teoría de los movimientos potenciales que considera una circulación con fluido ideal.

Para un mejor entendimiento del concepto de capa límite se supone en principio el escurrimiento unidireccional de un fluido no confinado, es decir sin la presencia de contornos ni obstáculos sólidos como así tampoco la existencia de superficies libres, animado con velocidad constante unidireccional y no perturbada V_0 . En esas condiciones descritas, se introduce un elemento compacto de forma aerodinámica, haciendo coincidir su eje principal con la dirección del movimiento, el cual provocará las respectivas alteraciones que se propagarán dentro de la zona de influencia del perfil en reposo (ver *Figura 44*).

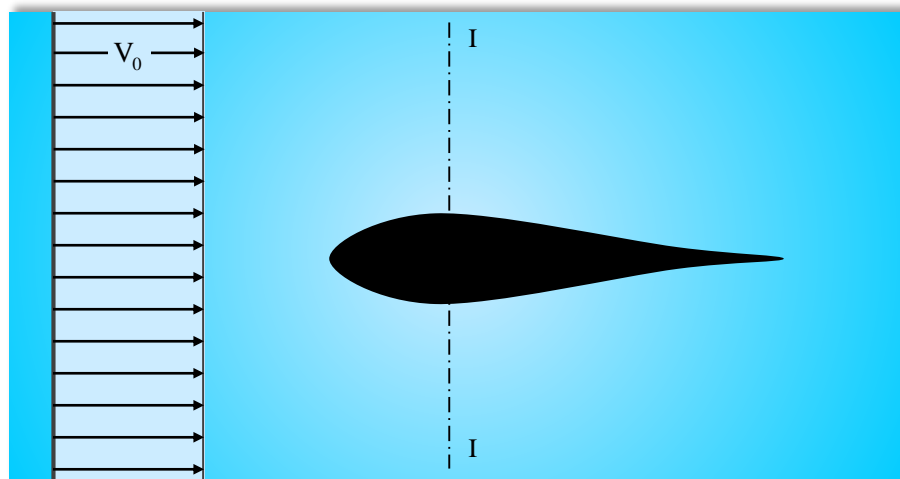


Figura 44 – Perfil alar inmerso en un fluido con movimiento unidireccional.

Particularmente en la sección I-I donde se efectúa el estudio, la alteración del movimiento se prolongará hacia ambos sectores de la pieza sólida introducida de manera indefinida, pero a los efectos tecnológicos prácticos se acepta que el escurrimiento deja de estar modificado cuando la velocidad alcanza el 99% del valor de la velocidad no perturbada V_0 . Esta diferencia de 1% es el error porcentual que se asume convencionalmente como aceptable en el presente análisis.

Continuando con el estudio y prestando especial atención a la zona comprendida entre el contorno sólido y el lugar donde el movimiento deja de estar perturbado, se procede a analizar el movimiento teniendo en cuenta el escurrimiento de tres tipos diferentes de fluidos:

- Fluido ideal.
- Fluido real en régimen laminar.
- Fluido real en régimen turbulento.

a) Fluido ideal.

Si el escurrimiento se efectúa con fluido ideal, la descripción del movimiento se realiza siguiendo la teoría de la hidrodinámica correspondiente a los movimientos potenciales. En este caso se consideran los aspectos aceleradores del movimiento que dependen exclusivamente de la forma geométrica del sólido involucrado, desechando los efectos viscosos.

Así, la red de corriente da una idea cabal y permite calcular a través de las líneas de corriente la distribución de las velocidades (ver Curva A en la *Figura 45*).

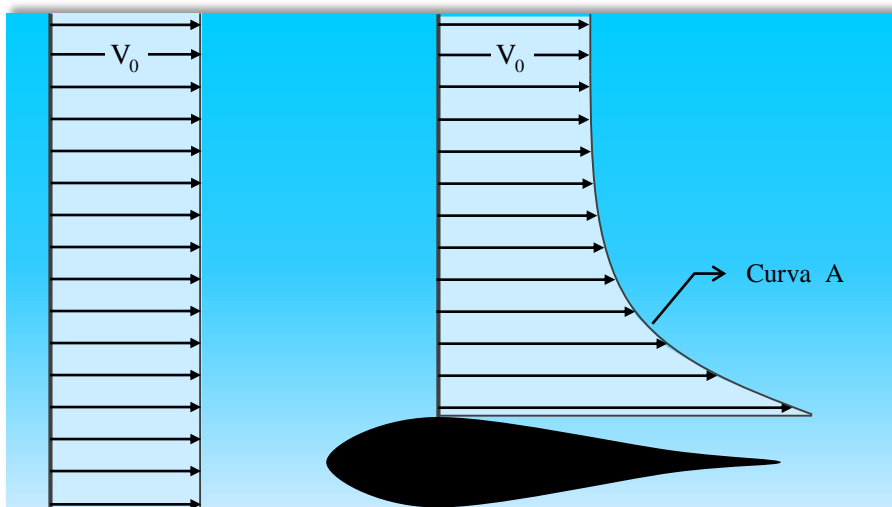


Figura 45 – Perfil alar inmerso en un fluido ideal con movimiento unidireccional.

c) Fluido real con régimen laminar.

Cuando el escurrimiento se produce con la presencia de un fluido real animado con movimiento laminar, o sea que en su evaluación le corresponde un número de Reynolds relativamente bajo, en este caso los efectos de la viscosidad son muy apreciables e influyentes. Además, en contacto con el borde sólido la velocidad es nula, dando cumplimiento con el principio de Meyer y luego se tendrá una distribución de velocidades que respeta una ley parabólica hasta coincidir con la velocidad no perturbada V_0 (ver Curva B en la *Figura 46*).

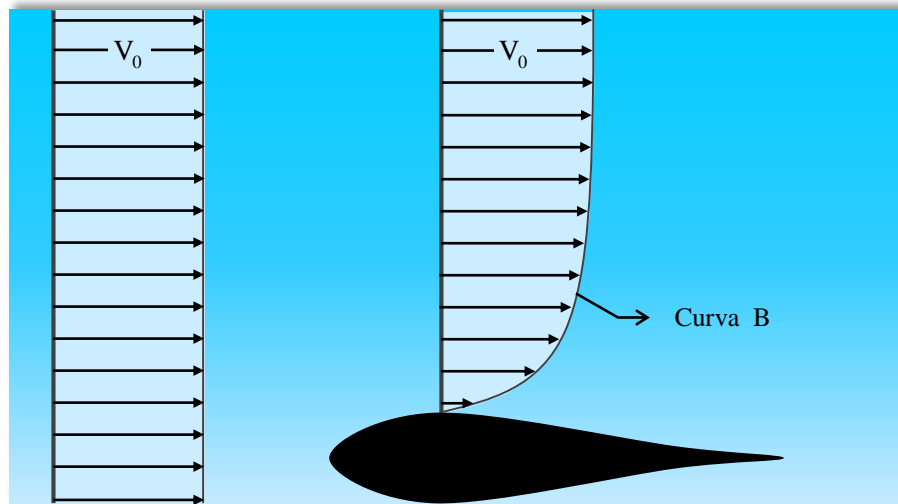


Figura 46 – Perfil alar inmerso en un fluido real con régimen laminar.

c) Fluido real con régimen turbulento.

Si el escurrimiento de un fluido real se establece con régimen turbulento (número de Reynolds relativamente alto), los efectos de la viscosidad son muy poco importantes y la distribución de las velocidades es de tipo logarítmica.

Se sabe que en los escurrimientos impulsados con régimen turbulento, la velocidad de sus partículas son naturalmente muy impermanentes, tanto en intensidad como en dirección, todo ello aun considerando que las causas que lo generan son permanentes. Por consiguiente no todos los vectores velocidad mantienen la dirección del escurrimiento, ya que si bien las partículas más veloces se entremezclan con las más lentas, intercambiando cantidad de movimiento, la velocidad del escurrimiento tiende a uniformarse a un valor medio que no es instantáneo, sino medido sobre un intervalo denominado pulsación (corresponde a la aplicación del criterio de Boussinesq).

De esta forma se logra un trazo medio del diagrama de velocidades que resulta muy similar con el que corresponde al movimiento potencial, excepto en las adyacencias del borde sólido, lugar donde se localiza un muy fuerte gradiente transversal de velocidades (ver Curva C en la Figura 47). En esa zona, donde se concentra la mayor parte de la resistencia al movimiento, se denomina *capa* o *estrato límite*.

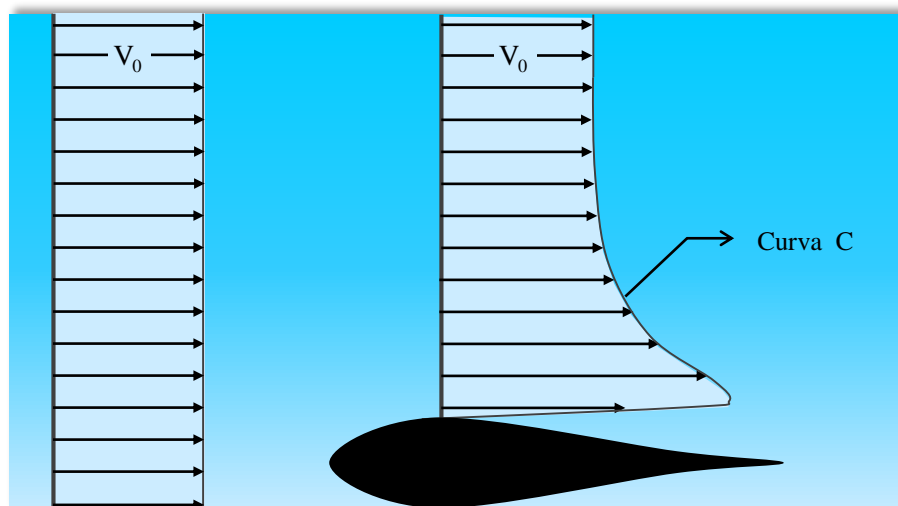


Figura 47 – Perfil alar inmerso en un fluido real con régimen turbulento.

Si bien en teoría la resistencia debida a la viscosidad alcanza a la totalidad de la masa fluida, en la práctica dicha resistencia solo tiene importancia comparativa en las inmediaciones del contorno sólido.

Así, en un fluido con régimen turbulento, caracterizado por un elevado número de Reynolds como sucede en la gran mayoría de las aplicaciones en la ingeniería civil-hidráulica, se tiene:

- Red de corriente.
Destinada para describir los aspectos aceleradores del movimiento.
- Capa límite.
Permite determinar los efectos viscosos del escurrimiento.

A fin de lograr una mejor interpretación y comparación de los conceptos vertidos, en el cuadro sinóptico de la *Figura 48* se dispone de un resumen gráfico, volcando simultáneamente las distribuciones de la velocidad de cada uno de los escurrimientos anteriormente descritos.

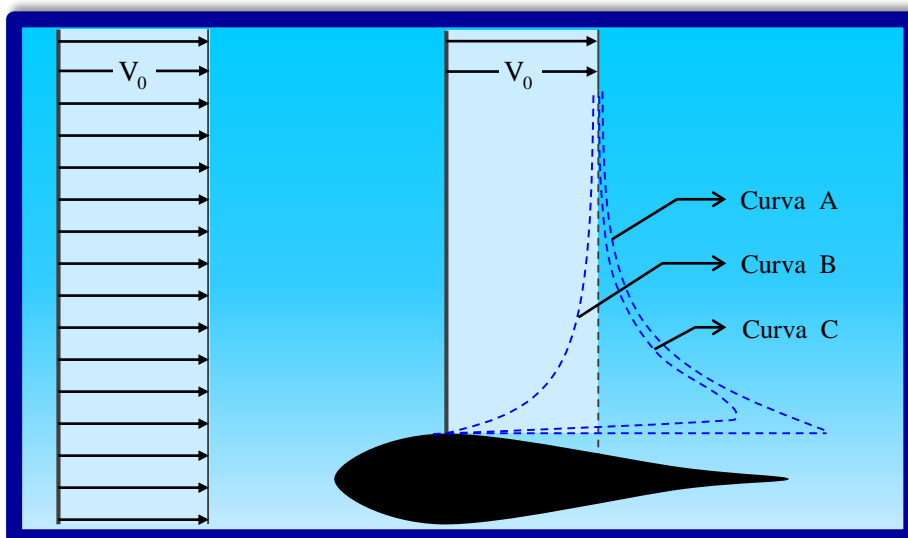


Figura 48 – Cuadro-resumen de un perfil alar inmerso en distintos tipos de fluidos.

9.3. Características de la capa límite.

La capa límite se estudia para analizar la variación de las velocidades en la zona de contacto entre un fluido y un sólido contenido en su seno. La existencia de dicha capa límite se debe fundamentalmente a la propiedad viscosa del fluido que produce una variación en el posicionamiento de las líneas de corriente próximas a la misma.

El hecho que la viscosidad sea una propiedad física significativa en la zona del estrato límite, invalida la aplicación de la red de corriente en ese sector, ya que la misma es solo válida cuando las fuerzas viscosas son despreciables.

Las características más sobresalientes de la capa límite se pueden describir de forma más didáctica con un ejemplo en el cual se examina el caso particular de una placa rectangular fija con superficie plana y espesor despreciable, ubicada de forma paralela dentro de un fluido no confinado con movimiento unidireccional, permanente y uniforme (ver *Figura 49*).

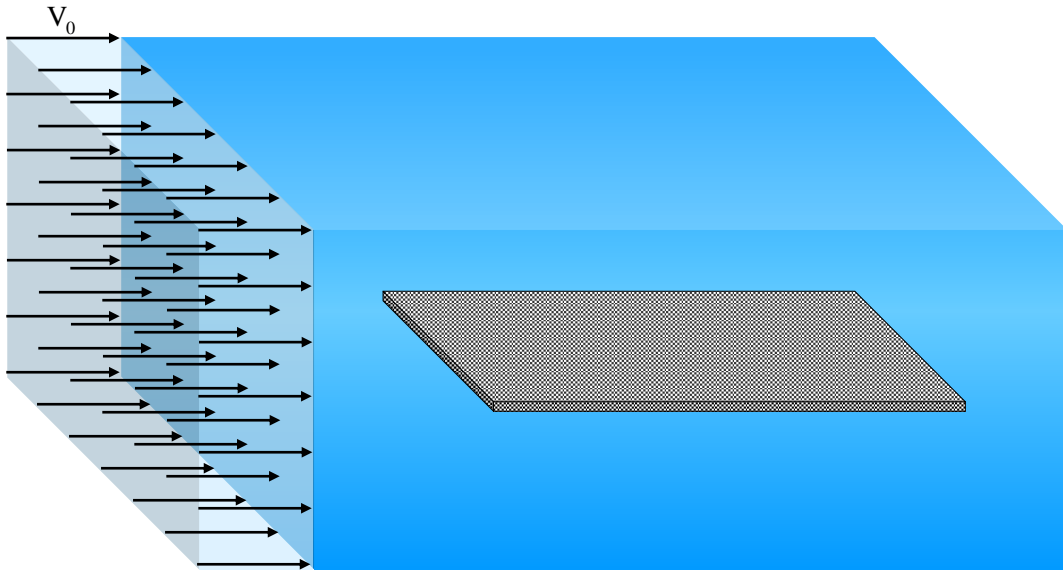


Figura 49 – Placa rectangular fija inmersa en un fluido con movimiento unidireccional.

Los efectos del movimiento se distinguen según el tipo de fluido que conforma el escurrimiento:

a) Fluido ideal.

Si el fluido circulante es ideal, los diagramas de velocidad coinciden con los correspondientes a los del movimiento no perturbado, ya que en estas circunstancias la presencia de la placa plana no modifica en absoluto los aspectos aceleradores del movimiento (ver Figura 50).

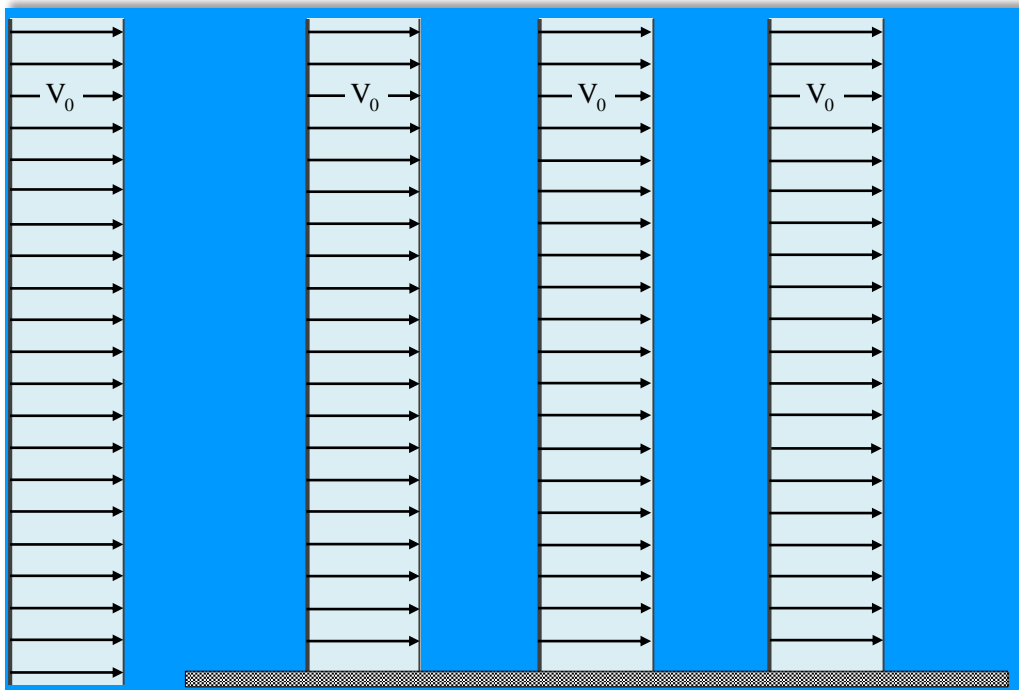


Figura 50 – Placa rectangular fija inmersa en un fluido ideal con movimiento unidireccional.

Consecuentemente no se producirá ninguna alteración y la velocidad permanecerá constante, siendo la misma tanto al comienzo como al final de la placa.

b) Fluido real.

Analizando particularmente una placa de espesor despreciable o borde biselado para evitar vórtices localizados en los extremos, se puede constatar la aparición de dos zonas bien diferenciadas que corresponden según el tipo de movimiento a:

- Régimen laminar.
- Régimen turbulento.

Para el estudio primeramente se divide la longitud de la placa en varios tramos delimitados por las secciones 1-1, 2-2, etc. (ver *Figura 51*) y luego se trazan los diagramas de velocidad en correspondencia a cada uno de ellos.

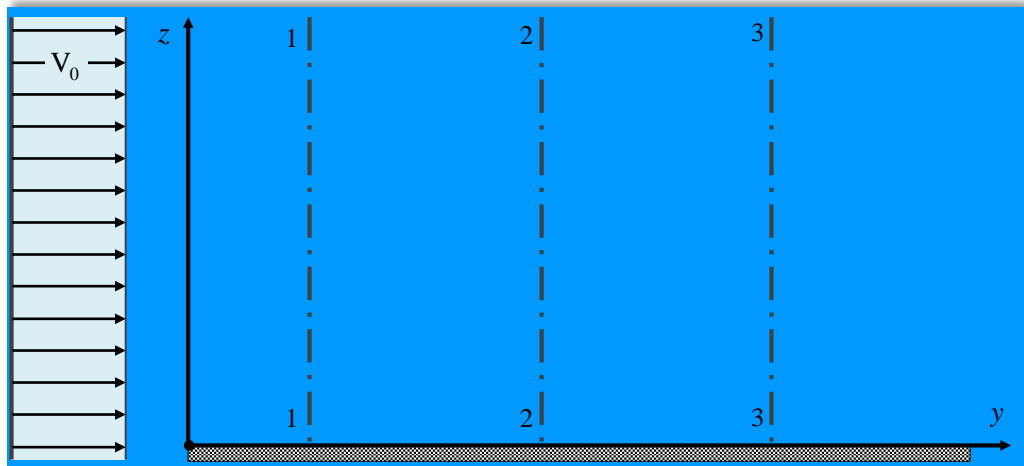


Figura 51 – Placa rectangular fija inmersa en un fluido real dividida en varias secciones.

Además, denominando a la capa límite como la altura δ , que mide la distancia entre la superficie de la placa y el punto donde la velocidad vuelve a ser no perturbada V_0 y luego graficando cada valor en correspondencia con cada sección de los tramos en que se ha dividido la longitud de la placa, se obtiene una curva que se denomina *contorno de la capa límite*, tal como se detalla a continuación.

Descripción:

- En un movimiento con régimen inicialmente laminar, las partículas del fluido en contacto con la placa son frenadas, ya que no puede existir velocidad junto a ella. En la *Figura 52*, para la primera sección en estudio, se indica el espesor δ_1 de la capa límite a una distancia y_1 del borde de ataque de la placa.

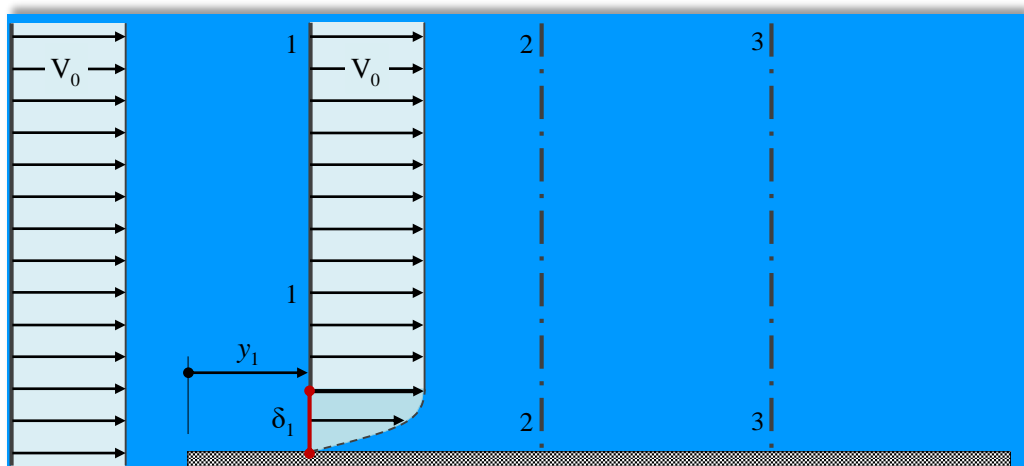


Figura 52 – Espesor de la capa límite en la sección 1-1 de una placa fija inmersa en un fluido real.

- A medida que se va progresando en la dirección longitudinal y de la placa y se analiza en la siguiente sección 2-2 la ley de variación de velocidades, se puede observar que el efecto retardador sobre la superficie sólida causado por la influencia viscosa del fluido, hace aumentar un poco más la capa límite hasta una magnitud δ_2 (ver Figura 53).

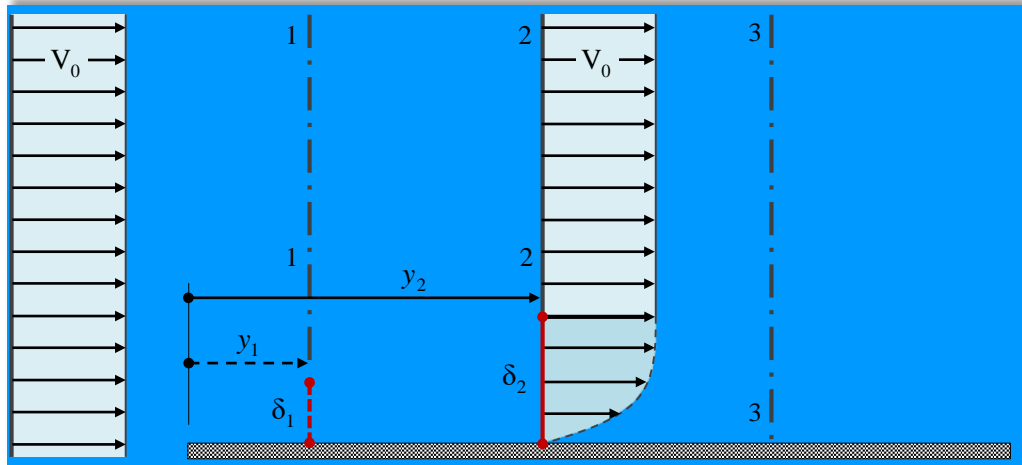


Figura 53 – Espesor de la capa límite en la sección 2-2 de una placa fija inmersa en un fluido real.

- En ese proceso se va definiendo la Curva I de la Figura 54 que representa el contorno correspondiente a la capa límite para el escurrimiento en régimen laminar.

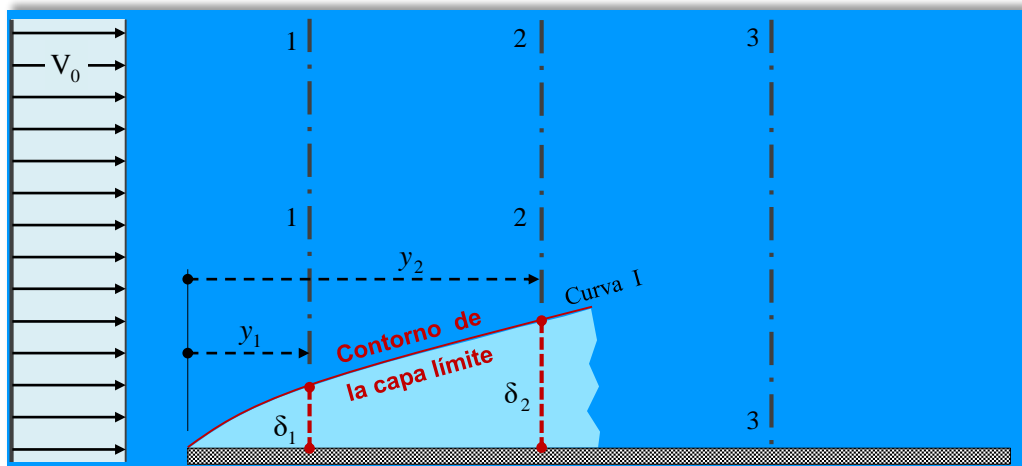


Figura 54 – Contorno de la capa límite sobre una placa fija en un fluido real con régimen laminar.

- Avanzando así sucesivamente se desarrolla la capa límite laminar, pudiendo llegar a un punto en que el movimiento se hace inestable, convirtiéndose el régimen en turbulento debido a nuevas condiciones en la viscosidad y la velocidad. La causa por la que el escurrimiento se puede transformar de laminar a turbulento debe buscarse en el interior del movimiento que hace que una pequeña perturbación forme un torbellino.
- En el caso que el régimen continúe de forma turbulenta, se provocará un crecimiento más rápido de la capa límite (ver Curva II de la Figura 55), pero simultáneamente dentro de la capa límite en cuestión se ubica una pequeña capa en el estrato próximo a la placa, donde las velocidades son muy bajas y consecuentemente el régimen sigue siendo laminar. La misma se denomina *subcapa laminar* y corresponde al sector inferior de la Curva III sita en la Figura 55.

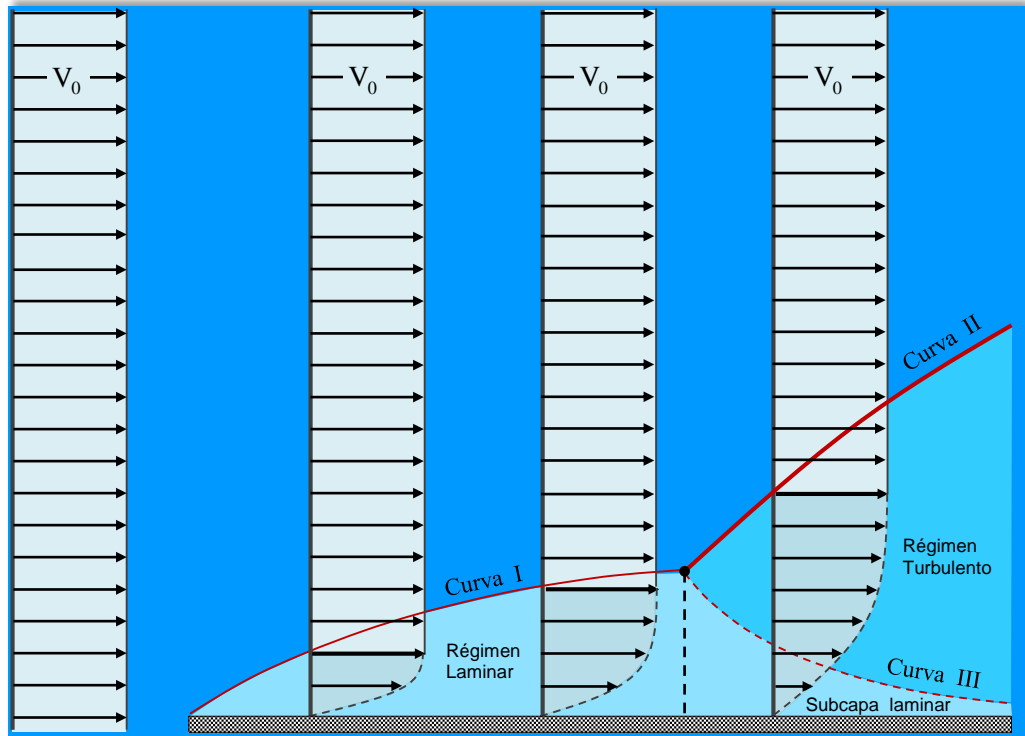


Figura 55 – Capa límite sobre una placa inmersa en un fluido real con transición laminar-turbulento.

- El régimen del escurrimiento se evalúa a partir del número de Reynolds Re , teniendo en cuenta que para este caso en que se trata de una placa rectangular inmersa en un fluido con movimiento unidireccional, los parámetros que lo definen son los siguientes:

$$Re = \frac{V_0 y}{\nu} \tag{78}$$

Siendo:

- V_0 velocidad no perturbada.
- y distancia desde el borde de ataque de la placa hasta la sección considerada.
- ν viscosidad cinemática del fluido.

Entonces, cuando se tiene un movimiento de una masa fluida que circula con régimen laminar, la misma se puede transformar en inestable al aumentar el número de Reynolds Re . En efecto, si debido al incremento de esta magnitud adimensional por efecto exclusivo del aumento de la distancia y (se mantienen constantes V_0 y ν), y si es que la longitud de la placa es lo suficientemente grande, en una determinada sección se pueden comenzar a generar vórtices o remolinos que originan rápidamente el traspaso al régimen turbulento.

- Independientemente de la descripción hasta aquí desarrollada, puede presentarse otra situación que corresponde al caso en que el escurrimiento se comporta como plenamente turbulento desde el comienzo (ver Curva IV de la Figura 56). En este otro contexto se debe remarcar que además siempre existirá en las proximidades de la placa sólida una zona o subcapa en el cual el comportamiento del movimiento es de tipo laminar.

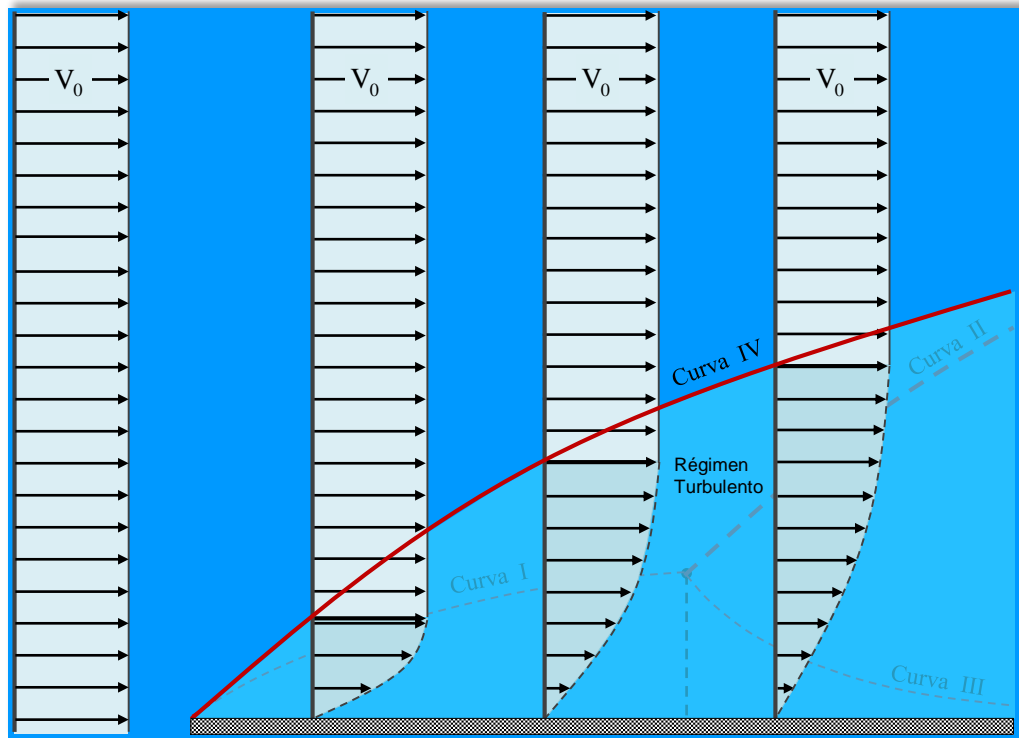


Figura 56 – Contorno de la capa límite sobre una placa fija en un fluido real con régimen turbulento.

Consideraciones y conclusiones:

- A medida que se avanza sobre la longitud de la placa y aumenta la capa límite, disminuye el esfuerzo de corte τ , ya que es menor el gradiente de velocidades.
- El movimiento no perturbado puede ser laminar o turbulento. En el primer caso probablemente toda la capa límite sea laminar.

Si en cambio es turbulento, otra opción es que el régimen sea laminar en sus comienzos y luego transformarse en turbulento.

También puede darse que el movimiento sea turbulento desde el comienzo, pero siempre acompañado con la presencia de una subcapa laminar en la zona adyacente a la placa, donde los efectos viscosos predominan sobre los turbulentos.

- En general el espesor de la capa límite es pequeño con relación a las dimensiones geométricas de la placa. Dentro del mismo tienen gran importancia las fuerzas resistentes a consecuencia de los elevados gradientes de velocidad que se generan.
- La capa límite en régimen turbulento es ligeramente mayor que en régimen laminar, y como el fluido en el primer caso se mueve con pulsaciones en todas las direcciones, consecuentemente disipa más energía y la fuerza de fricción derivada de ella es superior.

- e) Fuera de la capa límite, o sea en la *zona de fluido libre* (ver *Figura 57*), un fluido poco viscoso como por ejemplo el agua o el aire, se comporta como carente de viscosidad, o sea como un fluido ideal.

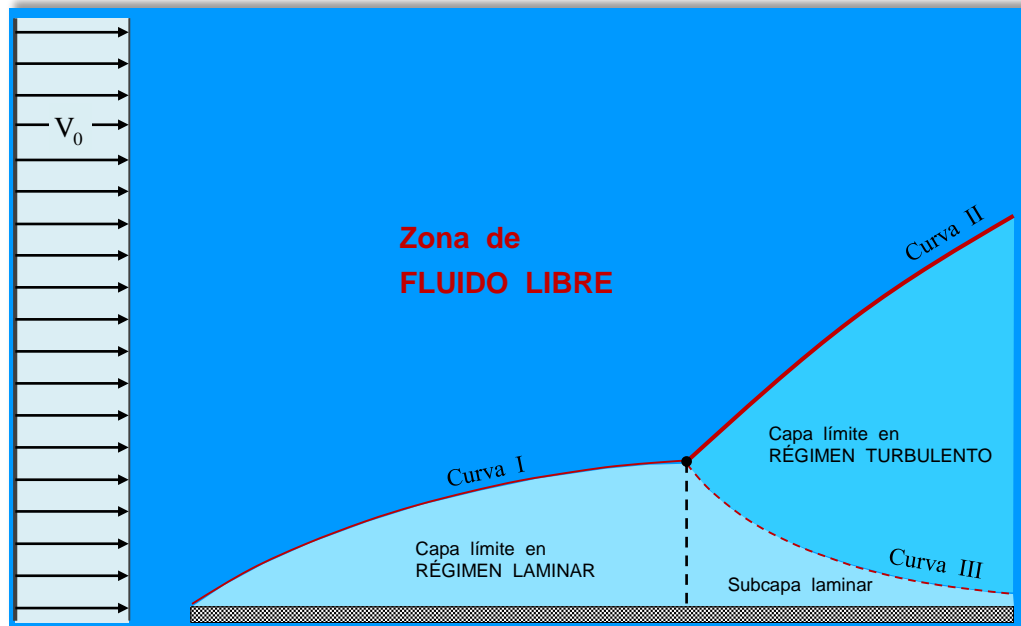


Figura 57 – Zona de fluido libre en un fluido real con transición laminar-turbulento.

- f) La presión dentro de la capa límite puede ser considerada constante a lo largo de la placa e igual a la presión fuera de la misma.
- g) Experimentalmente se ha determinado que la transición de régimen laminar a turbulento se produce cuando el valor del número de Reynolds Re está comprendido entre los siguientes límites:

$$500.000 \leq Re \leq 3.000.000 \quad (79)$$

Entonces se cumple:

- Para $Re < 500.000 \rightarrow$ Capa límite laminar.
- Para $Re > 3.000.000 \rightarrow$ Capa límite turbulenta.

Además debe tenerse bien en claro que el número de Reynolds es una magnitud que a través de la velocidad, la viscosidad y la distancia permite efectuar la medición de la mayor o menor turbulencia, pero no la causa que la provoca. El origen por el cual un movimiento dentro de la capa límite pase de laminar a turbulento se encuentra en el interior del escurrimiento, donde una pequeña perturbación genera un vórtice que en general comienza desde el borde sólido y se propaga hacia el centro integrando un amplio espectro de frecuencias fluctuantes.

- h) La variación del espesor de la capa límite es distinto según el tipo de régimen del escurrimiento.

A continuación se indican distintas expresiones matemáticas, producto de diversas experiencias de investigación en laboratorios hidráulicos, que permiten obtener y graficar el espesor en función de la longitud y consecuentemente establecer la delimitación del contorno del estrato límite.

- Capa límite en régimen laminar.

Ecuación de Blasius:

$$\frac{\delta}{y} = \frac{4,96}{Re_y^{1/2}} \quad (80)$$

En la práctica y sin posibilidad de cometer errores mayores, es común reemplazar el coeficiente numérico 4,96 directamente por el número entero 5. Por consiguiente suele utilizarse la expresión (80) modificada de la siguiente manera:

$$\frac{\delta}{y} = \frac{5}{\sqrt{\frac{V_0 y}{\nu}}} \Rightarrow$$

$$\delta = f(y) = \frac{5 y}{\sqrt{\frac{V_0 y}{\nu}}} \quad (81)$$

- Capa límite en régimen turbulento.

Expresión de Prandtl:

$$\frac{\delta}{y} = \frac{0,377}{Re_y^{1/5}} \quad (82)$$

$$\frac{\delta}{y} = \frac{0,377}{\sqrt[5]{\frac{V_0 y}{\nu}}} \Rightarrow$$

$$\delta = f(y) = \frac{0,377 y}{\sqrt[5]{\frac{V_0 y}{\nu}}} \quad (83)$$

- i) El empuje total P que efectúa el fluido sobre ambas caras de la placa de ancho B y largo L se calcula integrando la tensión tangencial τ actuante, la cual adopta distinto valor según se trate de un régimen laminar u otro turbulento. Así mismo se desprecian en la evaluación los efectos de la corriente sobre el borde, por tratarse de un espesor despreciable o bien por estar biselado el mismo.

En la *Figura 58* se indica la acción y el sentido de la tensión tangencial que es provocada por el efecto viscoso de una masa de fluido real en movimiento sobre las caras de la placa rectangular.

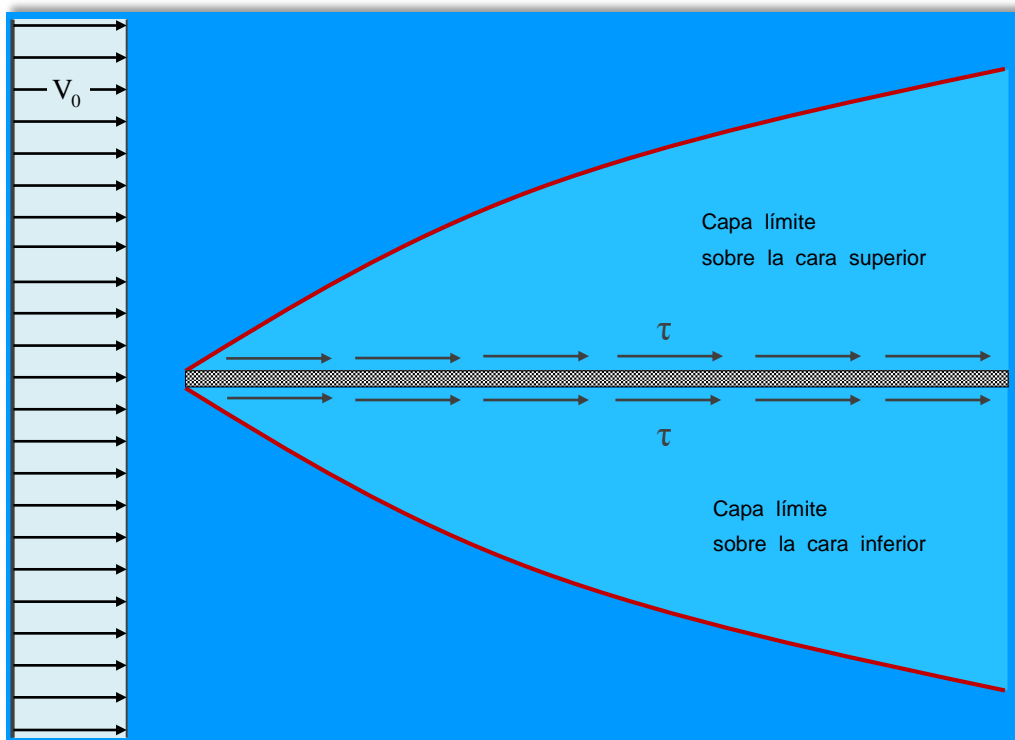


Figura 58 – Tensión tangencial sobre una placa fija inmersa en un fluido en movimiento.

La tensión tangencial τ se expresa en función de las siguientes variables:

Producto entre peso específico y energía cinética por unidad de peso. ... $\gamma \frac{V_0^2}{2g} = \frac{\rho V_0^2}{2}$

Coefficiente de empuje. c_f

Por lo tanto:

$$\tau = c_f \frac{\rho V_0^2}{2} \tag{84}$$

- Empuje en régimen laminar.

Se puede demostrar analíticamente y corroborar experimentalmente que el coeficiente de empuje c_f en régimen laminar vale:

$$c_f = \frac{0,664}{Re^{1/2}} \tag{85}$$

Con la ecuación general de la tensión tangencial τ dada por la ecuación (6-84) e introduciendo en la misma la (85), que expresa la magnitud particular del coeficiente de empuje c_f para un régimen laminar, se procede al cálculo del empuje sobre una de las caras, el cual resultará ser la mitad del empuje total P sobre la placa:

$$\frac{P}{2} = \int_0^L B \tau dy = \int_0^L B \frac{0,664}{Re^{1/2}} \frac{\rho V_0^2}{2} dy =$$

$$\frac{P}{2} = \frac{0,664 B}{(V_0/\nu)^{1/2}} \frac{\rho V_0^2}{2} \int_0^L y^{-1/2} dy = \frac{0,664 B}{(V_0/\nu)^{1/2}} \frac{\rho V_0^2}{2} \left[\frac{y^{1/2}}{1/2} \right]_0^L =$$

$$\frac{P}{2} = \frac{0,664 B}{(V_0/\nu)^{1/2}} \frac{\rho V_0^2}{2} 2 L^{1/2} \frac{L^{1/2}}{L^{1/2}} = 2 \frac{0,664 BL}{(V_0 L/\nu)^{1/2}} \frac{\rho V_0^2}{2} =$$

$$\frac{P}{2} = \frac{1,328}{Re^{1/2}} BL \frac{\rho V_0^2}{2} \tag{86}$$

El empuje total P, por efecto de la viscosidad sobre ambas caras de la placa rectangular es:

$$P = \frac{2,656}{Re^{1/2}} BL \frac{\rho V_0^2}{2} \tag{87}$$

El número de Reynolds *Re* que forma parte de las ecuaciones (86) y (87), está constituido en este caso por la distancia L como longitud característica.

- Empuje en régimen turbulento.

En los escurrimientos con régimen turbulento, el coeficiente de empuje *c_f* adquiere el valor dado por la expresión (88):

$$c_f = \frac{0,059}{Re^{1/5}} \tag{88}$$

El empuje sobre una de las caras de la placa se evalúa nuevamente con la ecuación general de la tensión tangencial τ (84), utilizando además el coeficiente de empuje *c_f* particular para un régimen turbulento (ecuación 88).

Así se obtiene el 50% del empuje total P que actúa sobre toda la placa rectangular:

$$\frac{P}{2} = \int_0^L B \tau dy = \int_0^L B \frac{0,059}{Re^{1/5}} \frac{\rho V_0^2}{2} dy =$$

$$\frac{P}{2} = \frac{0,059 B}{(V_0/\nu)^{1/5}} \frac{\rho V_0^2}{2} \int_0^L y^{-1/5} dy = \frac{0,059 B}{(V_0/\nu)^{1/5}} \frac{\rho V_0^2}{2} \left[\frac{y^{4/5}}{4/5} \right]_0^L =$$

$$\frac{P}{2} = \frac{0,059 B}{(V_0/\nu)^{1/5}} \frac{\rho V_0^2}{2} \frac{5}{4} L^{4/5} \frac{L^{1/5}}{L^{1/5}} = \frac{5}{4} \frac{0,059 BL}{(V_0 L/\nu)^{1/5}} \frac{\rho V_0^2}{2} =$$

$$\frac{P}{2} = \frac{0,074}{Re^{1/5}} BL \frac{\rho V_0^2}{2} \quad (89)$$

Entonces, el empuje total P que actúa íntegramente sobre la placa resulta:

$$P = \frac{0,148}{Re^{1/5}} BL \frac{\rho V_0^2}{2} \quad (90)$$

j) Los resultados obtenidos de la teoría precedentemente desarrollada, enfocada particularmente a una placa plana inmersa en un fluido real en movimiento unidireccional, pueden ser extrapolados a una tubería cilíndrica. Habiéndose realizado numerosas experiencias en laboratorio sobre conductos circulares, se ha arribado a las siguientes conclusiones:

- Si el número de Reynolds es pequeño.

En la entrada al tubo comienza a desarrollarse la capa límite laminar que se va extendiendo gradualmente en el recorrido hasta que las capas límites de las paredes opuestas se encuentran en el centro, a una distancia y del borde de entrada, cumpliendo con la siguiente ley que es producto de la experimentación:

$$\frac{y}{D} = 0,07 Re = 0,07 \frac{V_0 D}{\nu} \Rightarrow$$

$$y = 0,07 \frac{V_0 D^2}{\nu} \quad (91)$$

A partir de esa sección (ver sección 1-1 en la *Figura 59*), el escurrimiento se torna uniforme y la circulación continúa su recorrido con una distribución parabólica, propia del régimen laminar.

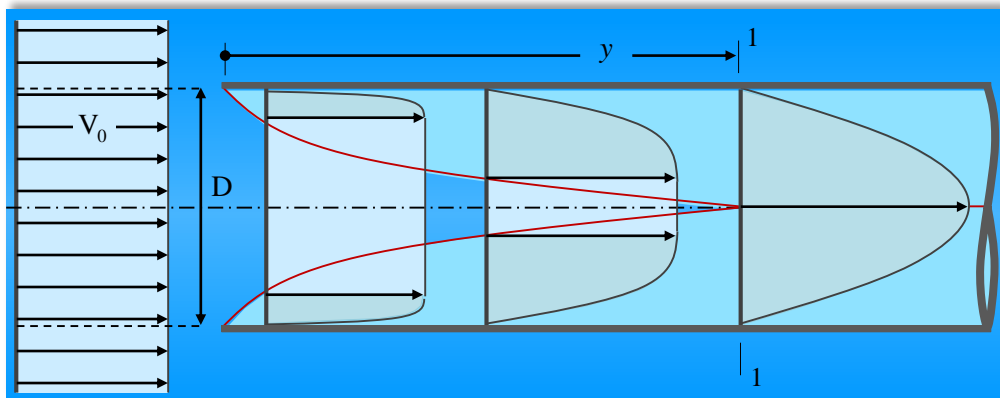


Figura 59 – Capa límite en una tubería cilíndrica con régimen laminar.

- Si el número de Reynolds es suficientemente grande.

Suponiendo el caso en que la capa límite tiene comienzo laminar y luego de un cierto recorrido se transforma en turbulento. En esta situación el régimen laminar se vuelve inestable antes de alcanzar el eje baricéntrico desde la pared, y a partir de allí, la capa límite aumenta considerablemente de acuerdo a los principios del régimen turbulento (ver *Figura 60*).

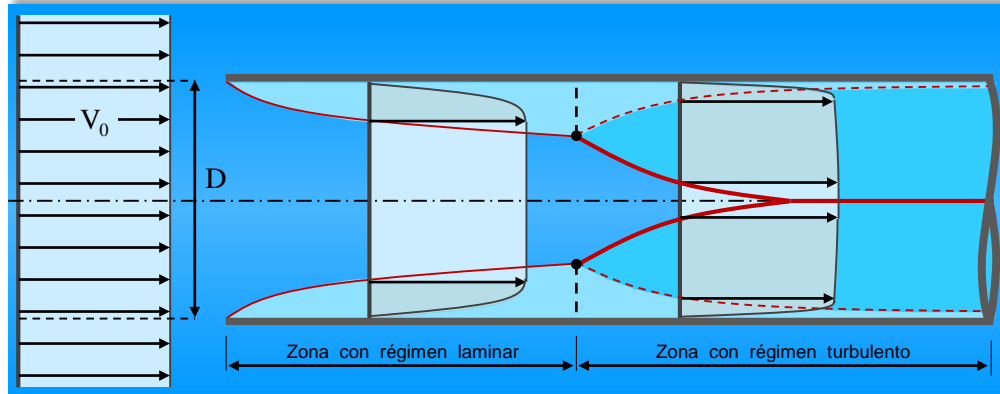


Figura 60 – Capa límite en una tubería cilíndrica con régimen en transición laminar-turbulento.

- Si el número de Reynolds es muy grande.

La capa límite es tipo turbulenta desde el comienzo, uniéndose los contornos enfrentados en coincidencia con el eje de simetría de la tubería a una distancia un tanto superior a los cincuenta veces el diámetro ($50 D$). A partir de allí el escurrimiento será uniforme, siempre con régimen turbulento salvo en las proximidades de las paredes sólidas, donde invariablemente va a existir una delgada capa laminar (ver *Figura 61*).

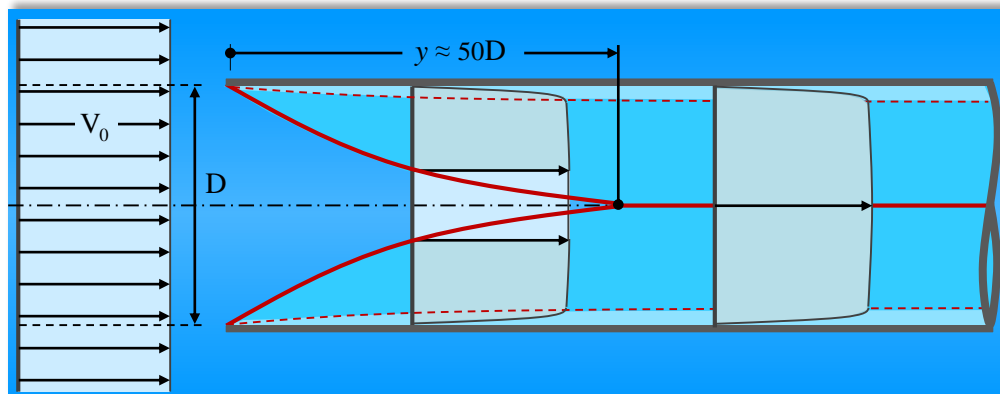


Figura 61 – Capa límite en una tubería cilíndrica con régimen turbulento.

- k) El régimen turbulento es el tipo de movimiento que se establece normalmente en los escurrimientos a través de las tuberías industriales. De ahí proviene el particular interés que tiene el estudio de las pérdidas de energía provocadas por la turbulencia del mismo, ya que se produce una configuración muy distinta a la estudiada para el caso del régimen laminar.

La distribución de velocidades en el régimen turbulento es de tipo logarítmica con una pequeña capa sublaminaar, pero su configuración es prácticamente constante en toda la sección, asemejándose al diagrama de velocidad media U . Comparar los diagramas de velocidad graficados en la *Figura 62*.

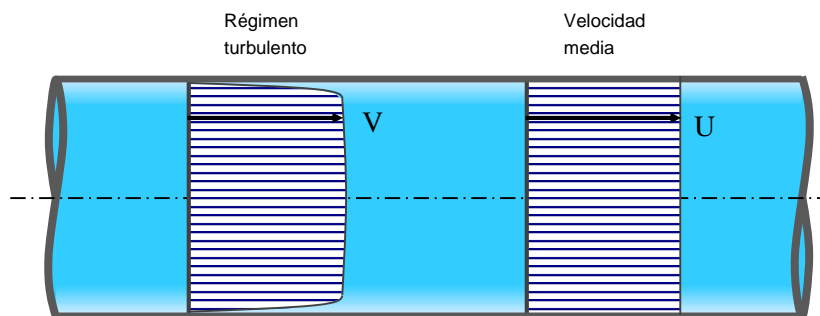


Figura 62 – Diagramas de distribución de velocidades en tuberías.

10. RÉGIMEN TURBULENTO.

El escurrimiento de un líquido viscoso real a través de una tubería a presión con régimen turbulento se caracteriza por la rápida y continua oscilación de la velocidad y la presión alrededor de un valor medio en cada punto de la masa fluida considerado. Dicha oscilación es de naturaleza tridimensional y se manifiesta tanto en magnitud como en dirección.

En esas condiciones las trayectorias resultan quebradas, variables y caóticas, produciéndose por efecto de la aparición de remolinos aperiódicos un entremezclado con un constante intercambio de masas entre zonas que hacen que una misma partícula ocupe distintos niveles posicionales con respecto a cada sección en el sucesivo avance del fluido dentro de la conducción. Esas variaciones no se originan a causa de una provocación artificial, sino que son consecuencia de las características propias naturales del escurrimiento.

La irregularidad de las trayectorias hace que las partículas con escasa energía cinética, próximas a los bordes sólidos, se trasladen hacia el centro como consecuencia de la turbulencia y simultáneamente las del centro se desplacen hacia el contorno.

Tal como se expresara anteriormente, la velocidad en un punto cualquiera del escurrimiento es variable respecto al tiempo, pero si el caudal principal parte de una causa que hace que el movimiento sea permanente, la magnitud de la velocidad oscilará alrededor de un valor promedio que se denomina *velocidad media temporal*. De esta manera se tiene que en un punto cualquiera de la corriente, la velocidad se puede interpretar de dos formas:

- Velocidad instantánea:
Es variable en módulo y dirección respecto al tiempo.
- Velocidad media temporal:
Es invariable con relación al tiempo y mantiene la dirección de la corriente. El valor medio se calcula sobre un lapso de tiempo no menor a $\Delta t \approx 1,5$ a 2 minutos, en el cual Bazin encontró que los valores de la velocidad resultaban constantes.

La naturaleza aleatoria y por demás compleja del régimen turbulento encauza el estudio hacia un análisis estadístico, en el cual Boussinesq propone reemplazar la velocidad real instantánea en cada punto por la velocidad media temporal. A este modelo con un campo de velocidades ficticio se lo llama movimiento medio local de Boussinesq, siendo sus principales características el haber considerado una velocidad constante por otra variable y un escurrimiento unidimensional en reemplazo de otro quebrado.

Así, el fenómeno de la turbulencia puede admitirse como un movimiento secundario superpuesto al principal. Así mismo, debe tenerse presente que si bien las ecuaciones de conservación de la masa continúan cumpliéndose en las integrales simplificadas, no ocurre lo mismo con la ley de Newton de la viscosidad que es de tipo diferencial, ya que no es válida para velocidades medias temporales.

Son válidas en el presente estudio las mismas hipótesis iniciales señaladas para el régimen laminar (ver punto 8.1.), con la única excepción que los escurrimientos ahora en análisis se corresponden al régimen turbulento, con números de Reynolds Re elevados.

En investigaciones de laboratorio, mediante el empleo de medidas de extrema precaución para evitar la transmisión de vibraciones y utilizando además tuberías muy lisas con cuidados especiales se ha logrado obtener escurrimientos en régimen laminar con números de Reynolds Re de hasta 50.000. Estos valores, denominados *números críticos superiores de Reynolds*, carecen de sentido práctico ya que de hecho las tuberías de uso corriente tienen protuberancias sobre la superficie y cuya rugosidad motiva la formación de remolinos y consecuente aparición de escurrimientos con régimen turbulento para números de Reynolds Re menores que el indicado.

Dentro de la práctica en la ingeniería hidráulica se acepta que el número de Reynolds crítico Re_c no es superior en general a 4.000 por una parte, y por otra se ha demostrado a su vez y de forma fehacientemente a través de diversas investigaciones que su magnitud nunca es menor de 2.000, aunque algunos científicos adopten 2.200 y hasta 2.300. Por consiguiente, existe un intervalo $2.000 < Re_c < 4.000$ para el cual no se puede predecir a ciencia cierta si el escurrimiento se realiza bajo régimen laminar o turbulento, pero a los efectos prácticos se adopta como número de Reynolds crítico $Re_c = 2.000$, aceptando que para valores menores el escurrimiento siempre es de tipo laminar.

Así, para un escurrimiento que supere el número de Reynolds crítico se supone inestable, puesto que si aparece cualquier perturbación puede generar la aparición de fluctuaciones aleatorias propias del régimen turbulento. Por debajo de $Re_c = 2.000$, la magnitud de la fuerza estabilizante existente es lo suficientemente grande para eliminar los efectos de cualquier alteración local, de manera que el escurrimiento es siempre ordenado y laminar.

Para un mejor entendimiento del concepto, se recuerda que dentro de una masa fluida en movimiento existen perturbaciones que producen torbellinos o remolinos, siendo la fuerza desestabilizante que causa este efecto del tipo inercial, ya que para desviar una partícula de su estado original con movimiento uniforme se hace necesario acelerarla. En contraposición, a esa fuerza se opone otra fuerza que es estabilizante la cual depende de la viscosidad del fluido.

Cuanto mayor sea la viscosidad del fluido, mayor es la energía que se disipa por fricción entre las partículas, y en ese caso será muy significativo el consumo de energía necesaria para dar origen a los torbellinos. Las fuerzas viscosas se evalúan teniendo en cuenta la ley de Newton referente a la viscosidad.

En resumen se tiene:

$$\begin{aligned} - \text{ Fuerza desestabilizante: } & F_i = m a \\ - \text{ Fuerza estabilizante: } & F_\mu = \tau \Omega = \mu \frac{\partial V}{\partial n} \Omega \end{aligned}$$

Haciendo la relación entre las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{F_i}{F_\mu} &= \frac{m a}{\mu \frac{\partial V}{\partial n} \Omega} = \frac{L^3 \rho \frac{V}{t}}{\mu \frac{V}{L} L^2} = \frac{V L}{\frac{\mu}{\rho}} = \\ & \frac{F_i}{F_\mu} = \frac{V L}{\nu} \end{aligned} \quad (92)$$

Los valores de la velocidad V y la longitud L son arbitrarios, pero si se desea efectuar alguna comparación entre distintos movimientos, esas magnitudes deben ser homólogas. En el caso de tuberías con escurrimientos a presión se adopta por convención:

- Velocidad V : \rightarrow Velocidad media U
- Longitud característica L : \rightarrow Diámetro D

La relación que resulta al reemplazar los valores particulares de V y L en la ecuación (92) es el denominado número de Reynolds Re :

$$Re = \frac{U D}{\nu} \quad (93)$$

La expresión (93) es de tipo adimensional y refleja claramente el significado físico del número de Reynolds Re , el cual representa un parámetro que mide la relación entre las fuerzas que provocan turbulencia (F_i) y las que intentan hacerla desaparecer (F_μ).

Consecuentemente se tendrá:

- a) Si las fuerzas inerciales F_i son pequeñas en comparación con las viscosas F_μ , entonces el número de Reynolds Re será pequeño y el régimen laminar.
- b) Si las fuerzas inerciales F_i son superiores con relación a las viscosas F_μ , consecuentemente el número de Reynolds Re que se obtendrá será grande y el régimen turbulento.

10.1. Pérdida de energía.

Las pérdidas de energía hidráulica a las que se han hecho referencia, se tratan específicamente a las llamadas *pérdidas de energía generales*, las cuales se producen de manera uniforme y continua a lo largo de la tubería. Todo lo expresado es con el fin de dejar explícitamente diferenciado con otro tipo de pérdidas que corresponden a las *pérdidas de energía localizadas* y son consecuencia de la resistencia al movimiento por cambio de forma y/o dirección en el recorrido del conducto.

La determinación de las pérdidas de energía hidráulica resulta ser un dato de singular importancia para el proyectista, en el cual radica la base para el cálculo hidráulico de los escurrimientos de fluidos a presión.

En los escurrimientos laminares, de características ordenadas, estratificadas y aspecto inmóvil (ver *Figura 63*), se probó que la pérdida de energía hidráulica se evalúa a través de la expresión de Hagen - Poiseuille (ecuación 46), la cual es consecuencia de un desarrollo a partir del equilibrio hidrodinámico de las fuerzas en el cual se tiene en cuenta la resistencia superficial dada por la ley de Newton $\tau = \mu \, dV/dn$ y la aplicación del principio de Meyer, es decir que la velocidad en contacto con los bordes sólidos es nula.





Figura 63 – Gráfico y fotografía de un escurrimiento laminar a presión.

Para el caso de los escurrimientos con régimen turbulento, de movimiento errático y aleatorio como se indica en la *Figura 64*, no se puede efectuar un estudio tan riguroso del fenómeno como el realizado para régimen laminar, razón por la cual se recurre a un análisis que requiere de algunas simplificaciones en las que se considera simultáneamente un desarrollo racional acompañado de varios resultados experimentales.



Figura 64 – Gráfico y fotografía de un escurrimiento turbulento a presión.

Un ejemplo sencillo y de fácil visualización en el que se producen simultáneamente en distintos tramos los dos tipos de regímenes, lo brinda la mecánica de los fluidos a través de la circulación del humo emanado de un cigarrillo encendido. En el primer sector se genera un movimiento de característica laminar y luego, por efecto del aumento de la velocidad (consecuentemente también un incremento del número de Reynolds Re) pasa a ser turbulento.

Sirva la fotografía de la *Figura 65* como una simple muestra para que el lector aprecie gráficamente sobre una misma corriente fluida la diferencia entre un escurrimiento laminar y otro turbulento, y después en forma intuitiva extrapole la idea hacia la *hidráulica de los líquidos en tuberías a presión*, según el tipo de régimen que se desarrolle en el interior del conducto.

Hasta la demostración de la existencia de una capa límite por medio de la mecánica de los fluidos, se llegó a suponer la presencia de partículas fluidas con velocidad junto a la pared del conducto. Esa posibilidad solo sería factible si se tratara de un fluido exento de viscosidad (fluido ideal), pero como los fluidos con que se cuenta en la práctica son los reales, se concluye entonces que por más exigua que sea la viscosidad también se da pleno cumplimiento al principio de Meyer para movimientos con régimen turbulento.

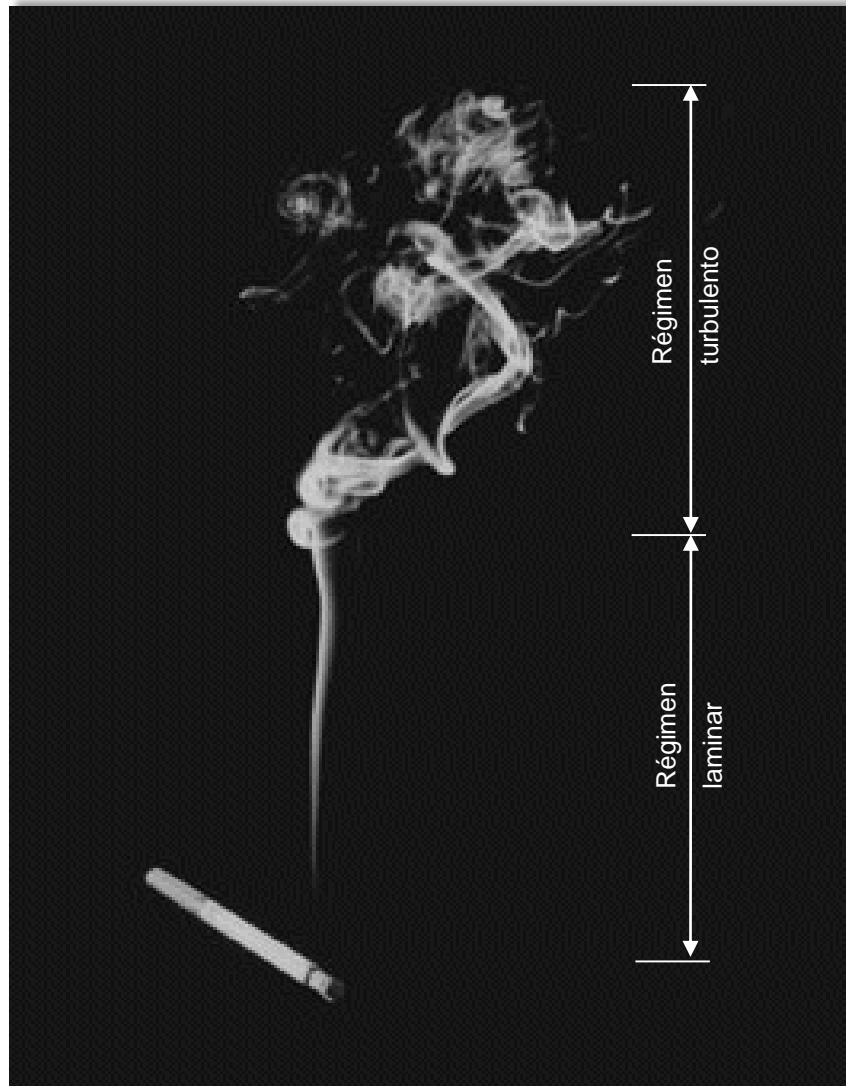


Figura 65 – Movimiento del humo de un cigarrillo.

A los efectos de realizar el estudio físico-matemático para precisar la pérdida de energía hidráulica en régimen turbulento, se puede avanzar en el mismo teniendo en cuenta el concepto ficticio de movimiento medio local introducido por Boussinesq. Así, el escurrimiento se considera compuesto por dos movimientos:

- Movimiento principal.
Es de tipo permanente y representa el efecto de la causa que lo produce.
- Movimiento secundario.
Está superpuesto al principal y consiste en un sistema constantemente variable de remolinos.

Considerando el criterio de Boussinesq, se ha establecido para el régimen turbulento una expresión de la tensión tangencial que conserva la misma estructura de la ley de Newton aplicable al régimen laminar. Así se establece:

$$\bar{\tau} = \eta \frac{d\bar{V}}{dn} \quad (94)$$

Donde:

$\bar{\tau}$ y $d\bar{V}$ representan valores medios producidos en un intervalo de tiempo comprendido entre 1,5 y 2 minutos al que se denomina *pulsación*.

η Viscosidad de remolino.

El valor medio de la viscosidad de remolino η , que reemplaza a la viscosidad dinámica μ en la ley de Newton, no es un valor constante para un determinado fluido a una temperatura dada, ya que depende de las condiciones instantáneas del movimiento.

A consecuencia de ello, no se puede resolver la integración de la distribución de velocidades, ya que la viscosidad de remolino η no es una magnitud constante como lo es la viscosidad dinámica μ para el régimen laminar. Dado que η no responde a ninguna propiedad física del fluido, sino que satisface a la característica natural del escurrimiento turbulento, consecuentemente el modo de determinar su valor se hace por la vía experimental.

Las pérdidas de energía total y de carga en un determinado tramo Δl_{1-2} de una conducción se representan como la diferencia existente a partir de las líneas de energía total y energía piezométrica entre las secciones Ω_1 y Ω_2 de la longitud considerada. A fin de dar mayor generalidad al concepto, en la *Figura 66* se supone una tubería de sección variable con forma troncocónica.

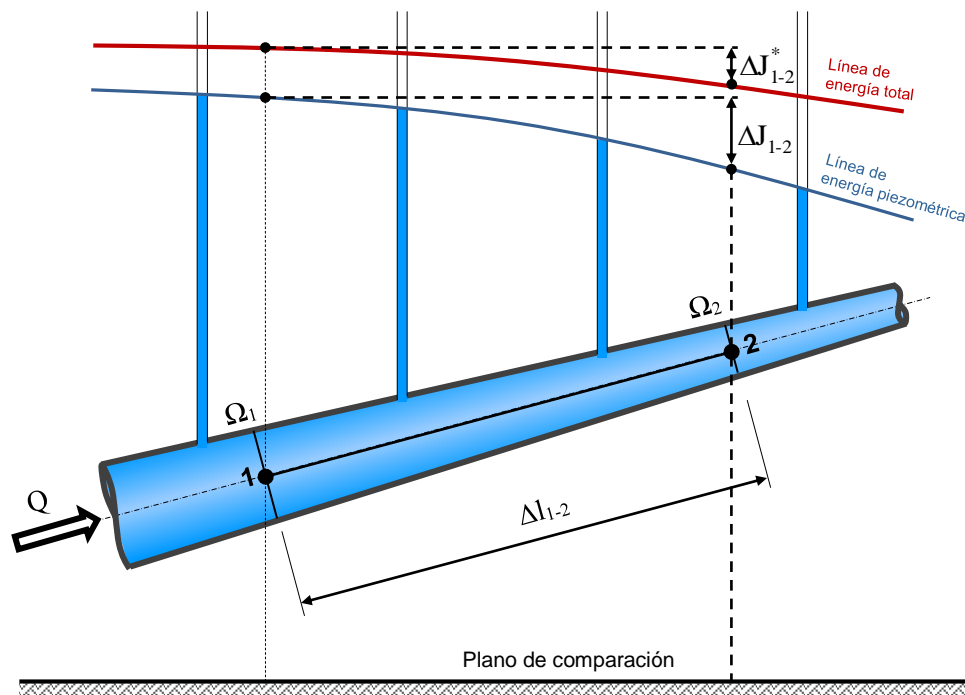


Figura 66 – Pérdidas de energía total y piezométrica.

En la práctica, las tuberías son en general de forma cilíndrica, por lo que las secciones a lo largo del recorrido son constantes ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$) y consecuentemente las pérdidas de energía total ΔJ_{1-2}^* resultan numéricamente igual a la pérdida de carga ΔJ_{1-2} .

Considerando ahora un fluido con movimiento permanente a lo largo de un conducto de sección circular constante en el cual se ha logrado la uniformidad del régimen turbulento, se analiza a continuación el equilibrio de las fuerzas actuantes entre dos secciones Ω_1 y Ω_2 de igual distribución de velocidades, separadas una distancia Δl_{1-2} sobre el eje baricéntrico coincidente con el local tangente l (ver *Figura 67*).

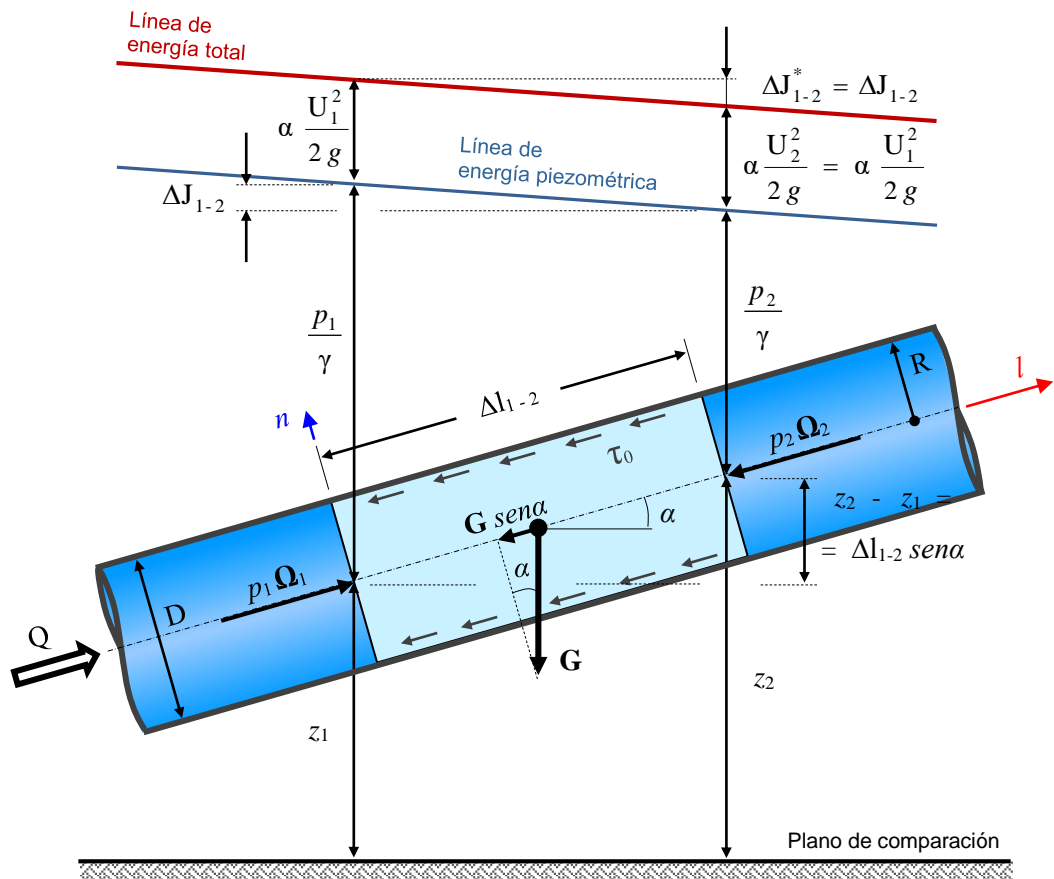


Figura 67 – Fuerzas actuantes en una tubería con régimen turbulento.

Fuerzas actuantes sobre el eje \$l\$:

a) Fuerzas de superficie.

a1) Fuerzas de presión \$\mathbf{F}_p\$.

$$(\mathbf{F}_p)_l = p_1 \Omega_1 = p_1 \frac{\pi D^2}{4} \quad (95)$$

$$(\mathbf{F}_p)_l = p_2 \Omega_2 = p_2 \frac{\pi D^2}{4} \quad (96)$$

a2) Fuerza de roce \$\mathbf{F}_r\$.

La fuerza de roce \$\mathbf{F}_r\$ es función de la tensión tangencial media \$\tau_0\$ actuante sobre los bordes sólidos laterales del cilindro de conducción \$\pi D \Delta l_{1-2}\$.

$$(\mathbf{F}_r)_l = \tau_0 \pi D \Delta l_{1-2} \quad (97)$$

b) Fuerzas de masa \$\mathbf{F}_m\$.

Solo actúa el peso propio \$\mathbf{G}\$.

$$(\mathbf{F}_m)_l = G \operatorname{sen} \alpha = \gamma V \operatorname{sen} \alpha = \gamma \frac{\pi D^2}{4} \Delta l_{1-2} \operatorname{sen} \alpha =$$

$$(\mathbf{F}_m)_l = \gamma \frac{\pi D^2}{4} (z_2 - z_1) \tag{98}$$

c) Fuerza de inercia \mathbf{F}_i .

Por tratarse de un movimiento permanente y uniforme, la aceleración es nula y consecuentemente también es cero la fuerza inercial.

$$(\mathbf{F}_i)_l = 0 \tag{99}$$

Desarrollando la ecuación de equilibrio dinámico aplicada al eje longitudinal baricéntrico l , se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2 & - & \tau_0 \pi D \Delta l_{1-2} & - & G \operatorname{sen} \alpha & = & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathbf{F}_p)_l & & (\mathbf{F}_r)_l & & (\mathbf{F}_m)_l & & (\mathbf{F}_i)_l
 \end{array} \tag{100}$$

Reemplazando (95), (96), (97), (98) y (99) en (100), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi D^2}{4} (p_1 - p_2) - \tau_0 \pi D \Delta l_{1-2} - \gamma \frac{\pi D^2}{4} (z_2 - z_1) &= 0 \\
 \Rightarrow \tau_0 \pi D \Delta l_{1-2} &= \gamma \frac{\pi D^2}{4} \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente despejando τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{1}{4} \gamma D \underbrace{\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right]}_{\Delta J_{1-2}} \frac{1}{\Delta l_{1-2}} = \frac{1}{4} \gamma D \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{4} \gamma D j \tag{101}$$

O bien, la misma ecuación anterior pero enunciada en función del radio R de la tubería:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \gamma R j \tag{102}$$

Las expresiones (101) y (102) permiten indistintamente cuantificar el esfuerzo tangencial medio τ_0 sobre los puntos del perímetro de la tubería.

Al ser siempre nula la velocidad en el contorno sólido, inclusive en el régimen turbulento, existe así mismo una subcapa donde el régimen es laminar. En este contexto se debe analizar la influencia de la rugosidad de la tubería, representada por el tamaño de altura de la protuberancia k (ver *Figura 68*) con relación a la magnitud de la subcapa laminar.

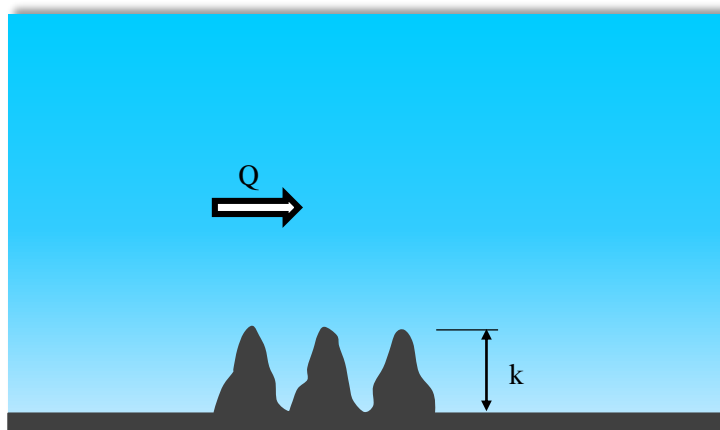


Figura 68 – Rugosidad de las paredes.

El cálculo de las pérdidas de energía que se generan es distinto según las siguientes alternativas que se considere:

- El espesor de la subcapa laminar δ' envuelve totalmente las irregularidades de la pared (Caso I de la *Figura 69*). La altura k de las protuberancias quedan inmersas en el espesor δ' y la tubería se comporta hidráulicamente como lisa.
- La altura k de la rugosidad supera el espesor de la subcapa laminar δ' , dando lugar a turbulencias adicionales que hacen que el comportamiento hidráulico del conducto sea rugoso (Casos II, III, IV y V de la *Figura 69*).

Normalmente la rugosidad de las paredes está conformada por protuberancias de formas irregulares, carentes de una geometría particular y regular. A los efectos de hacer más sencillo el estudio se considera una rugosidad artificial y uniforme.

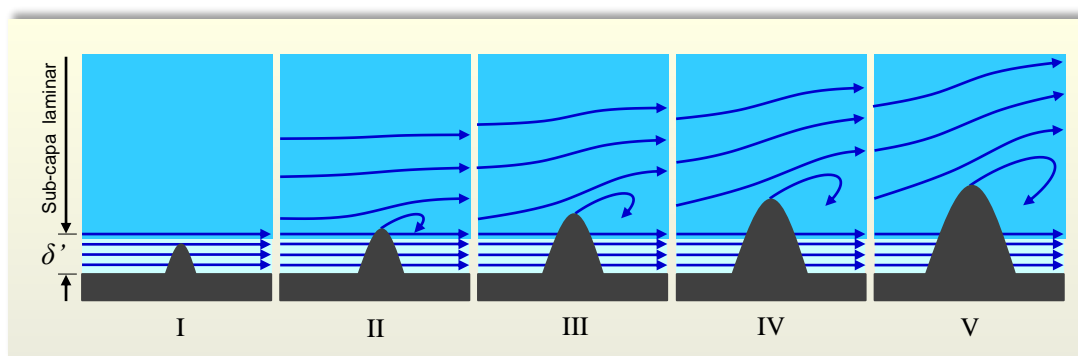


Figura 69 – Altura de la rugosidad relacionada con la subcapa laminar.

El espesor de la subcapa laminar δ' está definido en función de razones inherentes a la estabilidad del escurrimiento del fluido y la resistencia al movimiento está ligada a dicho espesor, por lo que de la *Figura 69* se sacan las siguientes conclusiones:

- Caso I: La rugosidad queda totalmente cubierta por el espesor de la subcapa laminar δ' y el comportamiento del movimiento de la masa fluida no se altera por efecto de la misma. La resistencia depende de la viscosidad μ o bien del número de Reynolds Re .
- Casos II al V: Corresponden a protuberancias de la rugosidad cuya altura k sobresale de la subcapa laminar δ' . Esas protuberancias provocan en su borde superior la separación de las líneas de corriente, generando a su vez remolinos o vórtices.
- Casos II y III: Se caracterizan por la proximidad de la subcapa laminar δ' con la altura de la rugosidad k , dando lugar a una configuración de remolinos intermedios entre las situaciones extremas indicadas como casos I y IV, en los cuales la resistencia al avance del fluido depende simultáneamente del número de Reynolds Re y la relación entre altura de la rugosidad y el diámetro de la conducción k/D .
- Casos IV y V: En estas circunstancias las alturas de las protuberancias k son significativamente superiores que la subcapa laminar δ' , permitiendo la formación de vórtices que resultan prácticamente independientes de las características de la capa límite. La influencia de la subcapa laminar δ' es despreciable y la resistencia al movimiento dependerá exclusivamente de la relación k/D .

10.2. Ecuación de Darcy - Weisbach.

La evaluación de las pérdidas de energía es la base imprescindible que se requiere para el cálculo hidráulico en los escurrimientos de fluidos a presión. Para ello es fundamental relacionar de alguna forma las pérdidas de energía, generales o locales, con las características geométricas e hidráulicas del movimiento y su contorno.

La ecuación de Darcy - Weisbach es una fórmula cuyo desarrollo está definido con una base teórico - racional y complementada con numerosas experiencias. De hecho permite realizar los cálculos hidráulicos con un grado de exactitud por demás aceptable en la resolución de los problemas tecnológicos que se presentan en la práctica profesional.

La justificación y determinación de la expresión de Darcy - Weisbach, aplicada a escurrimientos turbulentos para movimientos permanentes y uniformes, no se puede obtener mediante un procedimiento analítico directo como ocurre con la fórmula de Hagen - Poiseuille, indicada en la ecuación (46) para régimen laminar. Pero para la obtención de la misma, se puede encarar su análisis a través de dos distintos razonamientos a saber:

- Teórico - experimental.
- Análisis dimensional.

1º) Deducción teórico – experimental.

A través de diversas experiencias obtenidas de distintos investigadores se ha comprobado la relación que mantiene la pérdida de energía hidráulica J con diversas magnitudes intervinientes en los escurrimientos a presión con régimen turbulento.

Así se tiene que la pérdida de energía general J es aproximadamente proporcional a las siguientes magnitudes geométricas de la tubería (incluyendo la rugosidad de los contornos sólidos) y características del movimiento y el fluido:

a- Superficie lateral de la tubería. $\pi D l$

Es el área mojada en la cual se produce el contacto entre el fluido y el sólido que lo contiene, siendo el lugar donde actúan las tensiones tangenciales τ_0 que intervienen frenando el avance del movimiento.

b- Inversa de la sección transversal. $\frac{1}{\frac{\pi D^2}{4}}$

Resulta muy lógico este razonamiento, puesto que cuanto mayor sea la sección, con más facilidad se permite realizar el escurrimiento, disminuyendo consecuentemente la pérdida de energía J.

c- Cuadrado de la velocidad media. U^2

Si bien esta proporcionalidad no resulta tan intuitiva como las anteriores, la misma se puede probar fácilmente a través de experiencias en laboratorios hidráulicos.

d- Fluido. Densidad ρ
 Viscosidad dinámica μ

e- Naturaleza de las paredes.

Se refiere a la mayor o menor aspereza de la superficie sólida de contacto con el fluido. La misma está representada por los siguientes valores que conforman la rugosidad:

- Altura o tamaño. k (ver Figura 70)
- Separación. k' (ver Figura 70)
- Forma. m (ver Figura 71)

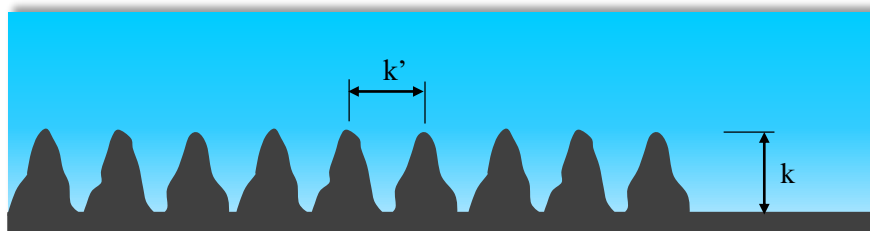


Figura 70 – Altura y separación de las asperezas.

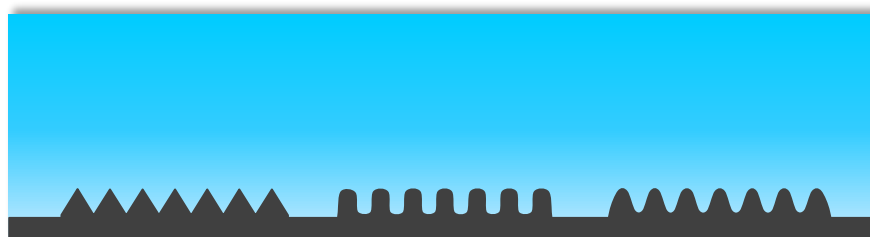


Figura 71 – Formas de las asperezas.

Así, con los elementos anteriormente descritos, se consigue realizar el siguiente planteo matemático: Si la pérdida de energía hidráulica J es proporcional individualmente a cada uno de los parámetros indicados, entonces también lo es al producto de todos ellos. De esta forma se puede escribir:

$$J \propto \pi D l \frac{1}{\frac{\pi D^2}{4}} U^2 f(D, U, \mu, \rho, k, k', m)$$

Donde el factor individualizado como $f(D, U, \mu, \rho, k, k', m)$ es una función que tiene en cuenta las características del fluido (μ, ρ) y la naturaleza de la pared sólida (k, k', m). Contempla también al diámetro D y la velocidad media U , en virtud de la no exacta proporcionalidad de la pérdida de energía J con la superficie lateral de la tubería, la inversa de la sección transversal y el cuadrado de la velocidad media, señaladas en los puntos a-, b- y c- anteriores.

Con relación a la rugosidad, representada por los parámetros k (altura), k' (separación) y m (forma), se puede afirmar como consecuencia de experiencias realizadas que la influencia de k es muy superior respecto a k' y m . Tan amplia es su preponderancia que en términos prácticos se pueden despreciar k' y m , y considerar en el estudio a la rugosidad con una única característica geométrica como es la altura o tamaño k .

$$\underbrace{k, k', m}_k$$

En adelante, fundamentado por las razones sugeridas, el término k va a indicar exclusivamente la *rugosidad* o *rugosidad absoluta*, aunque con mayor precisión se sabe que corresponde a la altura de dicha rugosidad.

Entonces:

$$J = cte. 4 f(D, U, \mu, \rho, k) \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} 2g \quad (103)$$

Agrupando convenientemente el término $f(D, U, \mu, \rho, k)$:

$$f(D, U, \mu, \rho, k) = f\left(\frac{UD}{\mu/\rho}, \frac{k}{D}\right) = f\left(Re, \frac{k}{D}\right) \quad (104)$$

Reemplazando (104) en (103):

$$J = cte. 8g f\left(Re, \frac{k}{D}\right) \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g}$$

→ f Coeficiente de fricción o de resistencia.

Finalmente:

$$J = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (105)$$

Queda así formulada la *ecuación de Darcy - Weisbach*, la cual permite determinar la pérdida de energía piezométrica por unidad de peso J en función de la energía cinética de la corriente, la longitud y el diámetro, resultando evidente a tal fin la necesidad de conocer o la posibilidad de poder calcular el coeficiente de fricción f .

Henry P. G. Darcy (Francés 1803-1858) - Julius Weisbach (Alemán 1806-1871)

La ecuación (105) también puede expresarse a través de la pérdida de carga unitaria que representa la pérdida de carga hidráulica J por unidad de longitud de la conducción l .

$$j = \frac{J}{l} = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (106)$$

2º) Deducción aplicando el análisis dimensional.

Tal como ya se sabe, la evaluación de la pérdida de energía en los escurrimientos a presión con régimen turbulento y movimiento permanente no es una tarea sencilla. Una forma alternativa a la anteriormente descrita consiste en la aplicación de la teoría de la semejanza y el análisis dimensional, el cual organiza y optimiza el trabajo experimental de los problemas físicos.

Primeramente se debe plantear el fenómeno que va a analizarse, consistiendo en este caso en una tubería circular de longitud l y diámetro D , por la cual circula un caudal constante Q de un líquido incompresible, cuyas propiedades (incluidas las del material del conducto) son conocidas.

A continuación es necesario identificar las variables físicas que gobiernan el fenómeno, cuidando que las mismas sean suficientes e independientes entre sí. Es obvio que una de las variables debe ser la incógnita que se está buscando, en este caso la pérdida de carga J .

Así, las variables a considerar, según sus características, se resumen en el siguiente cuadro:

VARIABLE		SÍMBOLO	CARACTERÍSTICA
Descripción			
Pérdida de carga.		J	Incógnita.
Diámetro.		D	Geométrica
Longitud.		l	
Velocidad media.		U	Cinemática
Densidad.		ρ	Líquido.
Viscosidad dinámica.		μ	
Rugosidad.		k	Tubería.

Nótese que la presión interior de la tubería no ha sido considerada entre las variables intervinientes, ya que de hecho no interesa el valor absoluto de la presión sino la diferencia, la cual está representada indirectamente por la pérdida de energía piezométrica J .

A los efectos prácticos de optimizar el estudio, se realizan las siguientes modificaciones:

- Se adopta una sola variable que relacione la pérdida de carga general J con la longitud l , sabiendo de antemano de la proporcionalidad existente entre ambas magnitudes.

$$j = \frac{J}{l} \quad \text{Pérdida de carga unitaria.}$$

La misma es una magnitud adimensional que no permite intervenir en el análisis dimensional.

- Se multiplica la pérdida de carga unitaria por el peso específico del líquido γ y se transforma en una magnitud variable con dimensiones. Recordando que J representa una energía por unidad de peso, entonces el producto γj resulta ser una energía por unidad de volumen del fluido y longitud del conducto.

$$\gamma j = \gamma \frac{J}{l} \quad \left[\frac{\text{peso}}{\text{volumen}} \frac{\text{energía}}{\text{peso}} \frac{l}{\text{longitud}} \right]$$

Entonces las variables definitivas a utilizar en el estudio son:

- 1 - ρ Densidad o masa específica.
- 2 - U Velocidad media.
- 3 - D Diámetro.
- 4 - γj Producto e/ peso específico y pérdida de carga unitaria.
- 5 - μ Viscosidad dinámica.
- 6 - k Rugosidad.

* Número de variables n : 6 (seis)

Por otra parte, las magnitudes fundamentales adoptadas son:

- 1 - m Masa.
- 2 - l Longitud.
- 3 - t Tiempo.

* Número de magnitudes fundamentales: 3 (tres)

La función que representa la ley que gobierna el fenómeno en estudio es:

$$f(\rho, U, D, \gamma j, \mu, k) = 0 \quad (107)$$

A partir de la ecuación (6-107) se puede formular una expresión que debe ser adimensional:

$$\Pi = \rho^x U^y D^z (\gamma j)^u \mu^v k^w \quad (108)$$

Dimensiones de la variables intervinientes:

$$|\rho| = M L^{-3} T^0$$

$$|U| = M^0 L T^{-1}$$

$$|D| = M^0 L T^0$$

$$|\gamma j| = M L^{-2} T^{-2}$$

$$|\mu| = M L^{-1} T^{-1}$$

$$|k| = M^0 L T^0$$

La ecuación adimensional (108) se descompone en sus magnitudes fundamentales de la siguiente manera:

$$\left(M^0 L^0 T^0 \right) = \left(\frac{M}{L^3} \right)^x \left(\frac{L}{T} \right)^y \left(L \right)^z \left(\frac{M}{L^2 T^2} \right)^u \left(\frac{M}{L T} \right)^v \left(L \right)^w \quad (109)$$

Así, y a los efectos de dar cumplimiento con la adimensionalidad de la ecuación (108), partiendo de la (109) se conforman 3 ecuaciones (una por cada magnitud fundamental) con 5 incógnitas:

$$\text{Masa } M: \dots\dots\dots + 1 x + 0 y + 0 z + 1 u + 1 v + 0 w = 0$$

$$\text{Longitud } L: \dots\dots - 3 x + 1 y + 1 z - 2 u - 1 v + 1 w = 0$$

$$\text{Tiempo } T: \dots\dots\dots 0 x - 1 y + 0 z - 2 u - 1 v + 0 w = 0$$

Expresando el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial:

$$\begin{matrix} m \\ \text{filas} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \left| \begin{matrix} +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ -3 & +1 & +1 & -2 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{matrix} \right| \cdot \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ n \\ \text{columnas} \end{matrix} \right. = 0 \quad (110)$$

Es necesario determinar el rango r de la matriz principal de la ecuación (110) para lograr obtener el número de parámetros adimensionales. Si las ecuaciones son linealmente independientes, el rango r es igual al número de magnitudes fundamentales m planteadas (3 para este caso).

El rango r es el orden de la mayor submatriz cuadrada de determinante no nulo existente, dentro de la matriz principal. El límite máximo del valor del rango r de una matriz compuesta por m filas y n columnas, está dado por el mínimo valor entre m y n .

Aplicando el teorema de Buckingham, se tiene para el presente análisis que el número de parámetros adimensionales es igual a la diferencia entre la cantidad de variables intervinientes ($n = 6$) y el rango r de la matriz ($r = 3$).

* Número de parámetros adimensionales ($n - r$): $6 - 3 = 3$ (tres)

A los efectos de la elaboración de los parámetros adimensionales Π_i , se eligen dentro de las variables una cantidad igual al número de parámetros adimensionales. Las mismas se denominan variables fijables, y si bien la elección en principio se puede realizar de forma arbitraria, es conveniente efectuarla de manera criteriosa adoptando mínimamente la correspondiente a la incógnita en cuestión.

VARIABLES FIJABLES:

- γ_j Producto e/ρ y pérdida de carga unitaria.
- μ Viscosidad dinámica.
- k Rugosidad.

CONFORMACIÓN DE LOS PARÁMETROS ADIMENSIONALES:

- 1º parámetro Π_1 . Reemplazando en la ecuación (108) por los valores:

- $x = x_1$
- $y = y_1$
- $z = z_1$
- $u = 1$
- $v = 0$
- $w = 0$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \rho^{x_1} U^{y_1} D^{z_1} \gamma_j \quad (111)$$

- 2^{do} parámetro Π_2 . Sustituyendo en la ecuación (108) por los valores:

$$\begin{aligned} - x &= x_2 \\ - y &= y_2 \\ - z &= z_2 \\ - u &= 0 \\ - v &= 1 \\ - w &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi_2 = \rho^{x_2} U^{y_2} D^{z_2} \mu \quad (112)$$

- 3^{er} parámetro Π_3 . Sustituyendo en la ecuación (108) por los valores:

$$\begin{aligned} - x &= x_3 \\ - y &= y_3 \\ - z &= z_3 \\ - u &= 0 \\ - v &= 0 \\ - w &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi_3 = \rho^{x_3} U^{y_3} D^{z_3} k \quad (113)$$

Determinación de los parámetros adimensionales:

- a- Cálculo del parámetro Π_1 a partir de la ecuación (111).

Planteo de la ecuación dimensional:

$$\left| \Pi_1 \right| = \left(M L^{-3} T^0 \right)^{x_1} \left(M^0 L T^{-1} \right)^{y_1} \left(M^0 L T^0 \right)^{z_1} \left(M L^{-2} T^{-2} \right) =$$

$$\left| \Pi_1 \right| = M^0 L^0 T^0$$

Desarrollo:

$$\text{Masa } M: \dots\dots + 1 x_1 + 0 y_1 + 0 z_1 + 1 = 0$$

$$\text{Longitud } L: \dots - 3 x_1 + 1 y_1 + 1 z_1 - 2 = 0$$

$$\text{Tiempo } T: \dots\dots 0 x_1 - 1 y_1 + 0 z_1 - 2 = 0$$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -3 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +1 \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \\ z_1 = -1 \end{cases} \quad (114)$$

Reemplazando la ecuación (114) en (111):

$$\Pi_1 = \rho^{-1} U^{-2} D^1 \gamma j = \frac{D \gamma j}{\rho U^2} =$$

$$\Pi_1 = \frac{D}{\rho U^2} \gamma j \tag{115}$$

b- Cálculo del parámetro Π_2 a partir de la ecuación (112).

Planteo de la ecuación dimensional:

$$\left| \Pi_2 \right| = \left(M L^{-3} T^0 \right)^x \left(M^0 L T^{-1} \right)^y \left(M^0 L T^0 \right)^z \left(M L^{-1} T^{-1} \right) =$$

$$\left| \Pi_2 \right| = M^0 L^0 T^0$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \text{Masa } M: & \dots\dots + 1 x_2 + 0 y_2 + 0 z_2 + 1 = 0 \\ \text{Longitud } L: & \dots - 3 x_2 + 1 y_2 + 1 z_2 - 1 = 0 \\ \text{Tiempo } T: & \dots\dots 0 x_2 - 1 y_2 + 0 z_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -3 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \\ z_2 = -1 \end{cases} \tag{116}$$

Sustituyendo la ecuación (116) en (112):

$$\Pi_2 = \rho^{-1} U^{-1} D^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho U D} =$$

$$\Pi_2 = \frac{v}{U D} = \frac{1}{\frac{U D}{v}} =$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{Re} \tag{117}$$

c- Cálculo del parámetro Π_3 a partir de la ecuación (113).

Planteo de la ecuación dimensional:

$$\left| \Pi_3 \right| = \left(M L^{-3} T^0 \right)^{x_3} \left(M^0 L T^{-1} \right)^{y_3} \left(M^0 L T^0 \right)^{z_3} \left(M^0 L T^0 \right) =$$

$$\left| \Pi_3 \right| = M^0 L^0 T^0$$

Desarrollo:

$$\text{Masa } M: \dots\dots + 1 x_3 + 0 y_3 + 0 z_3 + 0 = 0$$

$$\text{Longitud } L: \dots - 3 x_3 + 1 y_3 + 1 z_3 + 1 = 0$$

$$\text{Tiempo } T: \dots\dots 0 x_3 - 1 y_3 + 0 z_3 + 0 = 0$$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -3 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0 \\ z_3 = -1 \end{cases} \quad (118)$$

Sustituyendo la ecuación (6-118) en (6-113):

$$\Pi_3 = \rho^0 U^0 D^{-1} k =$$

$$\Pi_3 = \frac{k}{D} \quad (119)$$

Así, con todos los elementos obtenidos en el presente análisis, se puede plantear una ecuación en función de los parámetros adimensionales Π_i :

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \quad (120)$$

La misma función anterior pero más desarrollada, se obtiene reemplazando en (120) las ecuaciones (115), (117) y (119):

$$f\left(\frac{D}{\rho U^2} \gamma_j, \frac{1}{Re}, \frac{k}{D} \right) = 0 \quad (121)$$

O bien, la ecuación (121) también se puede expresar de otra forma, que consiste en introducir una nueva función f' de modo tal que quede formulada según el siguiente reacomodamiento:

$$\frac{D}{\rho U^2} \gamma_j = \frac{D}{U^2} g \frac{J}{1} = f'\left(\frac{1}{Re}, \frac{k}{D} \right)$$

Despejando la pérdida de carga J :

$$J = 2 f' \left(\frac{1}{Re}, \frac{k}{D} \right) \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g}$$

→ f Coeficiente de fricción o de resistencia.

Finalmente se obtiene a través de este otro procedimiento deductivo la misma expresión de Darcy - Weisbach señalada en la ecuación (105), con lo cual se reconfirma la validez de su estructura.

$$J = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (122)$$

10.3. Coeficiente de fricción.

La aplicación de la ecuación de Darcy - Weisbach implica la necesidad ineludible de determinar con antelación el valor del coeficiente de fricción o resistencia f . El mismo, con las simplificaciones realizadas en relación a la rugosidad, se sabe que es función del número de Reynolds Re y la altura de las protuberancias k .

Históricamente se han desarrollado a través de distintos investigadores una gran cantidad de expresiones pretendiendo valorar el coeficiente de fricción f , las cuales han ido evolucionando y simultáneamente se han ajustado con el correr del tiempo.

Las primeras de ellas fueron desarrolladas únicamente teniendo en cuenta como fluido característico al agua y luego se fue ampliando el rango abarcativo a otros fluidos incompresibles incluyendo además en el estudio los materiales de la conducción.

Posteriormente se han planteado propuestas exclusivamente experimentales más modernas, donde se ajusta el cálculo de f teniendo en cuenta la diferencia entre tuberías lisas y rugosas.

El criterio actual para la determinación del coeficiente de fricción f ha superado las fórmulas empíricas utilizando ecuaciones de validez mucho más generales, aplicables a cualquier tipo de fluido incompresible circulando en conducciones compuestas de diferentes clases de materiales. Las mismas se conocen con el nombre de *expresiones racionales* y son el resultado de un desarrollo basado sobre un importante sustento teórico, reforzado con una sustancial dosis de apoyo experimental.

Para su obtención, se comienza definiendo la distribución de velocidades y estableciendo las ecuaciones correspondientes, tanto para tuberías lisas como rugosas. Luego se determinan el caudal Q y la velocidad media U de cada caso para finalmente arribar a las ecuaciones de resistencia que permiten el cálculo del coeficiente de fricción f .

Así se llega a una instancia en que, aplicando la expresión de Darcy - Weisbach, permite de forma muy simple realizar el cálculo de los escurrimientos a presión en régimen turbulento, es decir determinar uno de los tres parámetros característicos principales (J , Q o D) en función de los otros dos.

10.3.1. Ley de distribución de velocidades.

Teniendo en cuenta la idea de Boussinesq sobre el movimiento medio local, se puede avanzar en el estudio del régimen turbulento con resultados satisfactorios pero sin aplicar con toda rigurosidad los principios matemáticos en el desarrollo.

Así se tiene el diferencial medio temporal de la velocidad, partiendo de la ecuación (94) que establece la relación entre la tensión tangencial media y el gradiente transversal de velocidad medio para régimen turbulento, pero en este caso aplicada al sistema de coordenadas cartesianas:

$$d\bar{V} = \frac{\bar{\tau}}{\eta} dz \quad (123)$$

Donde:

η Viscosidad de remolino.

Es un factor que depende de la naturaleza del fluido (incluida su temperatura) y las condiciones instantáneas del escurrimiento.

Su determinación se realiza de manera experimental.

La ecuación (123) no es susceptible de ser integrada a toda la sección transversal, ya que se desconoce la ley de variación de la viscosidad de remolino η con respecto a la distancia transversal z , medida desde el borde sólido. En este concepto estriba la gran diferencia en el análisis correspondiente con el régimen laminar, en el cual la viscosidad μ permanece constante y consecuentemente puede ser extraída del signo integral en el cálculo.

Este atascamiento en el desarrollo analítico fue subsanado mediante el valioso aporte de Johann Nikuradse (1894-1979), ingeniero y físico nacido en Georgia y nacionalizado alemán, quien a través de diversos estudios pudo constatar experimentalmente que en el régimen turbulento la tensión de corte τ y la viscosidad de remolino η varían de forma tal que su relación τ/η resulta directamente proporcional a la velocidad de corte $(\tau_0/\rho)^{1/2}$ e inversamente a la distancia transversal z , siguiendo una ley como la indicada en la ecuación (124). En esas condiciones, se puede omitir la suposición de valores medios temporales, teniendo así:

$$\frac{\tau}{\eta} = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{z} \quad (124)$$

Donde:

τ_0 ... Tensión de corte en el fluido, actuante sobre las paredes sólidas.

El concepto es idéntico al descripto para régimen laminar.

$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ Velocidad de corte.

Su designación proviene del hecho que sus dimensiones corresponden a las de velocidad.

$$\left[\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right] = \sqrt{M \frac{L}{T^2} \frac{1}{L^2} \frac{L^3}{M}} = \frac{L}{T}$$

De esta manera, la fórmula (123) se puede expresar de forma integrable, relacionándola con la (124):

$$dV = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{z} dz \quad (125)$$

\downarrow
 $\frac{\tau}{\eta}$

Integrando indefinidamente la ecuación (125), se obtiene:

$$\int dV = \int 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{z} dz = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int \frac{1}{z} dz \Rightarrow$$

$$V = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln z + cte. \quad (126)$$

La expresión (126) señala que en un escurrimiento con régimen turbulento, la velocidad varía directamente en función del logaritmo natural de la distancia al borde de la pared sólida (ver *Figura 72*). La misma indica solo en forma cualitativa la distribución de la velocidad, razón por la cual se hace necesario conocer la constante de integración *cte.* para que sea de aplicación cuantitativa.

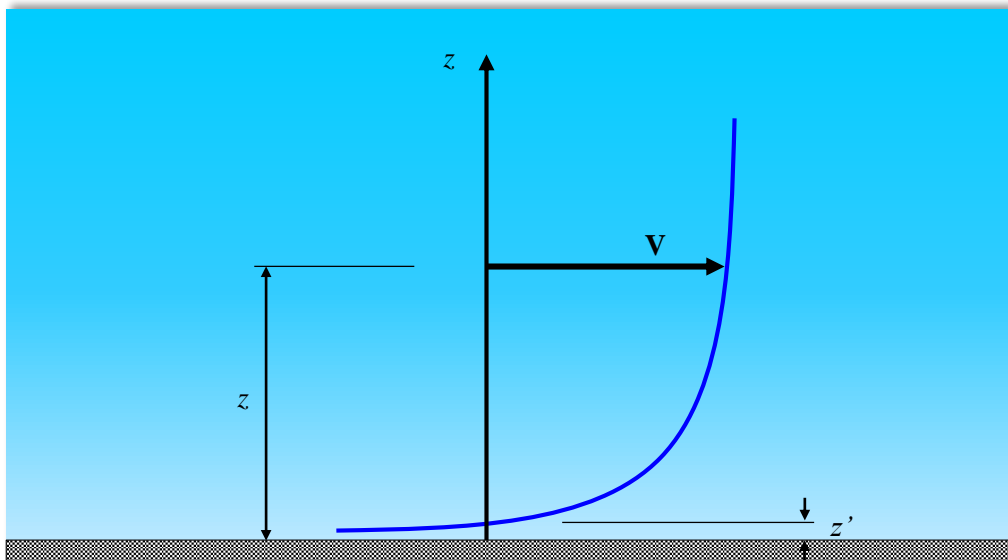


Figura 72– Distribución cualitativa de la velocidad en escurrimientos con régimen turbulento.

De la *Figura 72* se advierte que para una distancia $z \rightarrow 0$, o sea tendiendo a las proximidades del borde sólido, la velocidad se encamina hacia un valor de menos infinito ($V \rightarrow -\infty$), lo cual no se corresponde con el hecho físico en estudio por ser incompatible con el principio enunciado por Meyer. Así mismo se puede observar que la velocidad V se hace nula a una distancia z' .

Haciendo una abstracción momentánea al error físico cometido y enfocando el análisis específicamente desde un punto de vista exclusivamente matemático, y con el único objetivo de determinar la constante *cte.* de la ecuación (126), se continúa el estudio considerando la condición de borde:

$$\text{Si } z = z' \Rightarrow V = 0$$

Reemplazando en (6-126):

$$0 = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln z' + cte. \quad \therefore$$

$$cte. = - 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln z' \quad (127)$$

Insertando la constante *cte.* de (127) en la ecuación general (126) queda:

$$V = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln z - 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln z' =$$

$$V = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{z}{z'} \quad (128)$$

La ecuación (128) representa matemáticamente la distribución física de la velocidad en escurrimientos turbulentos, con las limitaciones apuntadas.

10.3.2. Ecuaciones de velocidad de Von Kármán - Prandtl.

Los experimentos realizados por Nikuradse han posibilitado encontrar una relación que permite obtener la ley que gobierna la distribución de velocidades sobre la sección transversal del conducto (ver ecuación 128), la cual responde a una función de tipo logarítmica. Dicha expresión no considera la existencia de la capa límite con su correspondiente subcapa laminar δ' , por lo que su validez es un tanto restringida ya que no tiene en cuenta la zona próxima a las paredes sólidas.

Así, a los efectos de realizar el estudio completo respecto a la disposición de las velocidades con relación a la sección del conducto, se procede marcando la diferencia de acuerdo al comportamiento hidráulico del escurrimiento según corresponda a:

- Tuberías lisas.
- Tuberías rugosas.

a) Tuberías lisas.

a₁) Variación de la velocidad junto a bordes lisos.

Recordando primeramente que el escurrimiento de un fluido que se efectúa en contacto con bordes sólidos (lisos en esta etapa del estudio) la velocidad es cero, y en el contorno inmediato el movimiento se realiza con velocidades muy pequeñas bajo régimen invariablemente laminar. Se trata de la zona correspondiente a la subcapa laminar δ' , y tal como ya se ha analizado, corresponde una ley de distribución parabólica.

Por consiguiente, el diagrama de velocidades queda constituido por una parte que a los efectos prácticos se adopta de forma lineal (con mayor precisión debiera ser parabólica) en el sector correspondiente a la subcapa laminar comprendido para valores de z entre 0 y δ' , y otra parte logarítmica, cuando $z > \delta'$ (ver *Figura 73*).

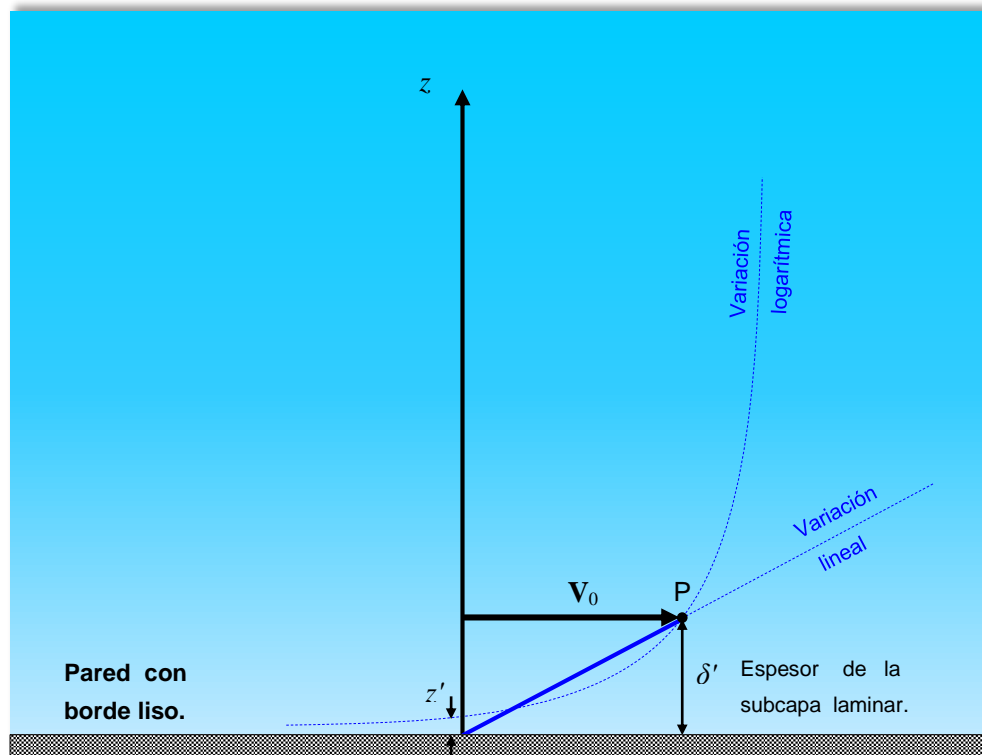


Figura 73 – Distribución de la velocidad en la subcapa laminar junto a bordes lisos.

En la *Figura 73* se puede constatar que la distancia z' queda inmersa en la subcapa laminar δ' , asumiendo además que el paso de régimen laminar (corresponde distribución lineal de velocidades para distancias $z < \delta'$) no se produce de forma brusca al régimen turbulento (distribución logarítmica para valores de $z > \delta'$). La propia inercia de las partículas en movimiento provoca en la zona linder a $z = \delta'$ la existencia una transición de características graduales del régimen laminar al turbulento, cuya distribución fehaciente se ignora, pero igualmente se da una idea cualitativa bastante aproximada a la realidad de la misma en la descripción gráfica correspondiente a la *Figura 74*.

Por lo tanto, el pasaje de régimen laminar a turbulento se ocasiona en una zona de transición, aceptando como punto de referencia P a la intersección entre la línea recta y la curva logarítmica, donde se cumple:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \delta' \\ V = V_0 \end{array} \right. \quad (129)$$

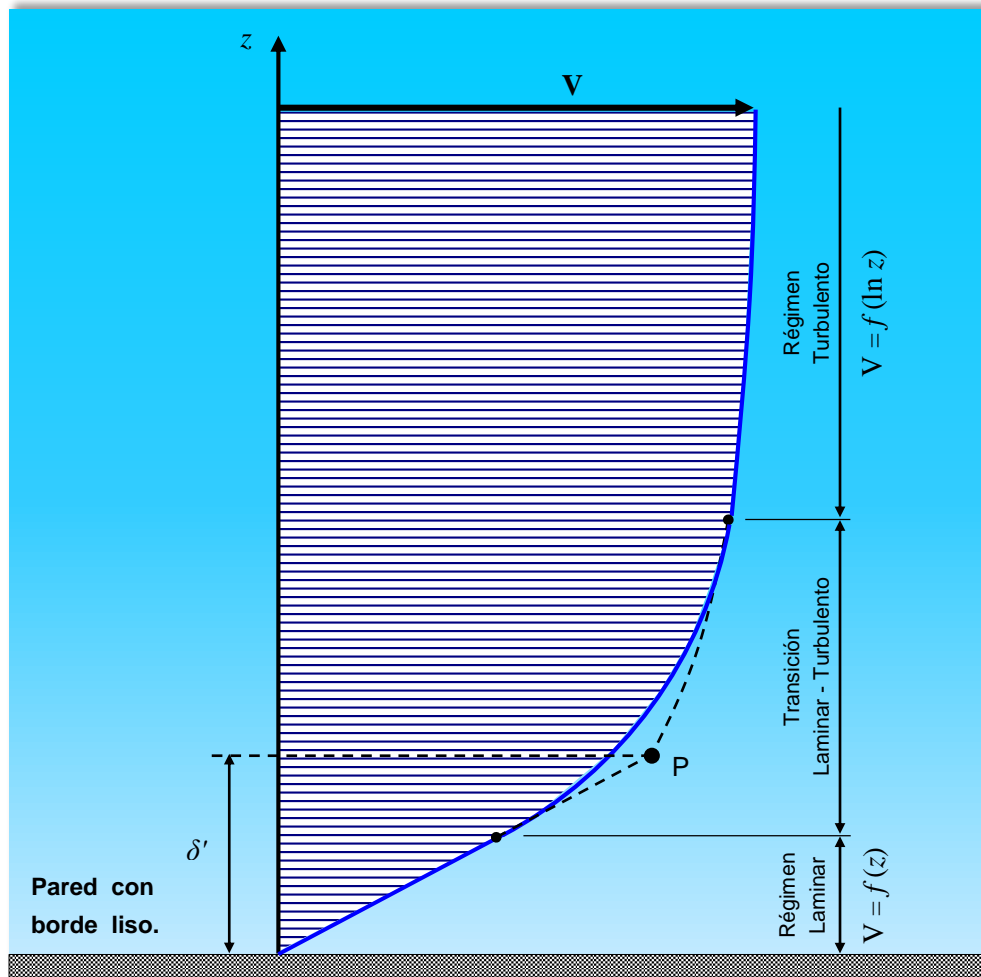


Figura 74 – Distribución real de la velocidad en régimen turbulento junto a bordes lisos.

A los efectos prácticos del estudio correspondiente al movimiento, se opta por una distribución simplificada de las velocidades, donde sin mayor error se desestima la transición gradual del régimen laminar al turbulento. Por consiguiente, se adopta como diagrama de velocidades práctico para el cálculo, al descrito en la Figura 75.

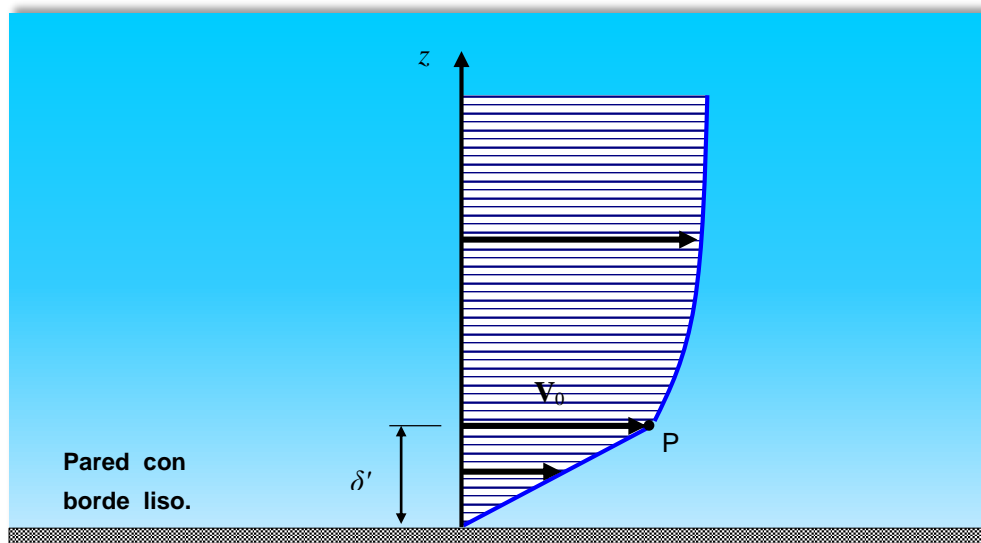


Figura 75 – Distribución simplificada de la velocidad en régimen turbulento junto a bordes lisos.

Analizando a continuación desde el punto P de la *Figura 75*, lugar donde se produce la modificación de un régimen a otro, se puede constatar que la velocidad que le corresponde es V_0 . Dicho valor es exactamente el mismo según se considere la distancia δ' situado desde la zona laminar (variación lineal) o bien desde la turbulenta (variación logarítmica).

- Régimen laminar ($0 < z < \delta'$).

La modificación que se efectuó al reemplazar la variación parabólica de la velocidad por otra lineal a los efectos de facilitar el cálculo, implica matemáticamente que $dV/dz = cte.$, por lo que la ley de Newton para fluidos aplicada al punto P se puede escribir de la siguiente manera:

$$\tau_0 = \mu \frac{dV}{dz} = cte. = \mu \frac{V_0}{\delta'} = \rho \nu \frac{V_0}{\delta'} \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{1}{\nu} \delta' \quad (130)$$

La expresión (130) señala la magnitud de la velocidad V_0 en coincidencia con el extremo superior de la subcapa laminar δ' , la cual fue deducida a partir del movimiento en régimen laminar. Particularmente, τ_0 es la tensión tangencial del fluido a una distancia $z = \delta'$, cuya magnitud es la misma en $z = 0$, o sea sobre la superficie de contacto entre el fluido y el sólido.

La distribución de velocidades está representada por la fórmula:

$$V = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{1}{\nu} z \quad (131)$$

O bien, la misma anterior pero expresada de forma adimensional:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{\nu} z \quad (132)$$

- Régimen turbulento ($z > \delta'$).

Si se analiza ahora el mismo punto P de la *Figura 75* considerado anteriormente dentro del régimen laminar pero como parte integrante del régimen turbulento que actúa en la zona donde $z > \delta'$, y considerando los valores de (129) aplicados a la ecuación general (128) de la velocidad del fluido en régimen turbulento se obtiene;

$$V_0 = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{\delta'}{z'} \quad (133)$$

Los valores de la velocidad V_0 dados en (130) para escurrimientos laminares y en (133) para los turbulentos deben ser coincidentes por una razón de congruencia, dado que ambas velocidades corresponden al mismo punto P del movimiento.

Igualando los segundos miembros de dichas ecuaciones:

$$\frac{\tau_0}{\rho} \frac{1}{v} \delta' = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{\delta'}{z'} \Rightarrow$$

$$\delta' = 2,5 \frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \ln \frac{\delta'}{z'} \quad (134)$$

En este desarrollo, que pretende ser lo más racional posible, se llega a otro punto de estancamiento. Pero Nikuradse a través de trabajos experimentales encontró la relación (135) que permite continuar con el presente análisis.

$$\delta' = 11,6 \frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \quad (135)$$

Efectuando la igualdad de las expresiones (134) y (135), simplificando y luego despejando z' :

$$2,5 \frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \ln \frac{\delta'}{z'} = 11,6 \frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \Rightarrow$$

$$\ln \frac{\delta'}{z'} = \frac{11,6}{2,5} = 4,64 \quad \therefore \frac{\delta'}{z'} = 103,5$$

$$z' = \frac{\delta'}{103,5} \quad (136)$$

Insertando en (136) el valor experimental de δ' dado en la ecuación (135), se tiene:

$$z' = \frac{11,6}{103,5} \frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \Rightarrow$$

$$z' = 0,11 \frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \quad (137)$$

Se recuerda que la distancia z' carece de existencia real y su cálculo obedece a la necesidad de obtener su conocimiento para el correcto trazado del diagrama de velocidades. Entonces, reemplazando (137) en (128):

$$V = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{0,11 v}$$

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{0,11 v} + 2,5 \ln \frac{1}{0,11} \right]$$

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{\nu} + 2,5 \ln \frac{1}{0,11} \right]$$

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{\nu} + 5,5 \right] \quad (138)$$

La (138) corresponde a la ecuación de Von Kármán - Prandtl (Theodore von Kármán, Húngaro, 1881-1963 y Ludwig Prandtl, Alemán, 1875-1953), la que describe la distribución de velocidades en régimen turbulento junto a bordes lisos. También se puede expresar de manera adimensional:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2,5 \ln \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{\nu} + 5,5 \quad (139)$$

O bien, las mismas ecuaciones de Von Kármán – Prandtl en función del logaritmo decimal:

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{\nu} + 5,5 \right] \quad (140)$$

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 5,75 \log \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{\nu} + 5,5 \quad (141)$$

a2) Gasto o caudal medio junto a bordes lisos.

Se ha visto que la distribución de velocidades en tuberías con escurrimientos en régimen turbulentos junto a contornos sólidos lisos se divide en dos zonas:

- Una propiamente turbulenta ($z > \delta'$).

Aplican cualquiera de las expresiones:

- Ecuación (138).
- Ecuación (139).
- Ecuación (140).
- Ecuación (141).

- Otra laminar, dentro de la subcapa laminar ($0 < z < \delta'$).

Valen las expresiones:

- Ecuación (131).
- Ecuación (132).

No obstante lo indicado precedentemente, y teniendo en cuenta la escasa magnitud de la distancia δ' perteneciente a la subcapa laminar, se puede aceptar sin mayor

error y con suficiente aproximación tecnológica la vigencia de las ecuaciones (138), (139), (140) o (141) para representar la distribución de la velocidad en la totalidad de la sección transversal.

Efectivamente, aunque la curva logarítmica tenga una tangente infinita en coincidencia con $z = 0$ y luego continúe en las adyacencias con una tangente finita para los demás valores de z , por grandes que sean las velocidades negativas, el error por la falta de dependencia con la realidad es insignificante respecto de la integración de las ecuaciones (138) o (140) a toda la sección transversal para el cálculo del gasto o caudal Q .

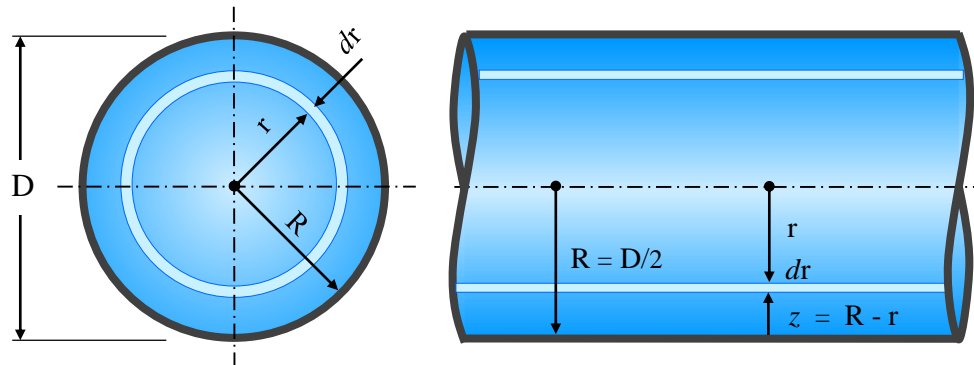


Figura 76 – Corte y vista longitudinal de un conducto circular en régimen turbulento.

El proceso para la determinación del caudal Q circulante a través de una tubería cilíndrica se efectúa partiendo del concepto hipotético que supone a la distribución de velocidades constante a lo largo de las coronas circulares concéntricas con el eje simétrico longitudinal (ver Figura 76).

$$Q = \int_{\Omega} V d\Omega = \int_0^R V 2\pi r dr \quad (142)$$

Reemplazando (138) en (142):

$$Q = \int_{\Omega} V d\Omega = \int_0^R \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} z \right) + 5,5 \right] 2\pi r dr$$

Donde:

$$z = R - r$$

$$Q = \int_0^R \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} (R - r) \right) + 5,5 \right] 2\pi r dr$$

$$Q = 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^R \left[2,5 \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} (R - r) \right) + 5,5 \right] r dr$$

$$Q = 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{D/2} 2,5 \ln\left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} (D/2 - r)\right) r \, dr + 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{D/2} 5,5 r \, dr$$

Resolviendo las integrales:

$$Q = 2,5 \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4} \ln\left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D}{2}\right) - \frac{3}{2} 2,5 \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4} + 5,5 \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4}$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln\left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D\right) - 2,5 \ln 2 - \frac{3}{2} 2,5 + 5,5 \right]$$

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln\left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D\right) + 0,02 \right]$$

También se puede expresar el gasto o caudal Q en función del logaritmo decimal. Para ello se recuerda que la relación entre el logaritmo decimal de un número con el logaritmo natural de ese mismo número es 2,302585... Para el grado de precisión que se requiere en el presente análisis es suficiente con que se adopte simplemente 2,30.

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log\left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D\right) + 0,02 \right] \quad (143)$$

a₃) Velocidad media junto a bordes lisos.

La velocidad media U se determina fácilmente como consecuencia de su propia definición $U = Q / \Omega$. Con el conocimiento del caudal Q dado por la ecuación (143), se obtiene:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log\left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D\right) + 0,02 \right]$$

Por consiguiente, la velocidad media U junto a contornos sólidos lisos resulta:

$$U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log\left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D\right) + 0,02 \right] \quad (144)$$

a4) Diferencia entre la velocidad en un punto y la velocidad media junto a bordes lisos.

Se obtiene efectuando la resta matemática entre la velocidad V , según la ley de distribución de Von Kármán - Prandtl dada por la ecuación (140) y la correspondiente a la velocidad media U (144).

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{\nu} + 5,5 \right] - \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) + 0,02 \right]$$

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} z}{\nu} + 5,5 - 5,75 \log \left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) - 0,02 \right]$$

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{D} + 5,48 \right] \quad (145)$$

La ecuación (145) permite calcular para cada valor de la distancia z , la diferencia entre la velocidad V y la velocidad media U .

b) Tuberías rugosas.

b1) Variación de la velocidad junto a bordes rugosos.

Primeramente se rememora el proceso deductivo de las ecuaciones que interpretan la ley de variación de la velocidad en tuberías con paredes lisas. Se parte de una hipótesis que asume la existencia de un régimen laminar en las proximidades de los contornos sólidos y en consecuencia se puede determinar analíticamente la distancia z' sin ninguna dificultad.

En cambio, si se está en presencia de un escurrimiento correspondiente a un fluido confinado entre paredes con una rugosidad de tamaño k , sensiblemente superior a la dimensión δ' formulada por Nikuradse (ecuación 135), se dificulta asumir en el análisis la existencia de la subcapa laminar en el movimiento, ya que la misma queda inmersa dentro de las protuberancias propias del sólido que contiene a la masa circulante.

En la *Figura 77* puede apreciarse que dichas protuberancias pertenecientes a los bordes rugosos de las paredes exceden notablemente el espesor de la subcapa laminar δ' , por lo que para esta situación los efectos resistentes van a depender con seguridad de k .

Si la magnitud de k no es lo suficientemente grande con respecto a δ' , entonces la rugosidad de las paredes no tendrá mayor influencia, resultando un escurrimiento de características muy similares al que se produce en tuberías lisas. Por el contrario, si el valor de k es significativo con relación a δ' , resulta racional y real que la rugosidad k gobierne, y a su vez esté vinculada, a la distancia z' , o dicho de manera más concreta y sencilla, que z' depende directamente de k .

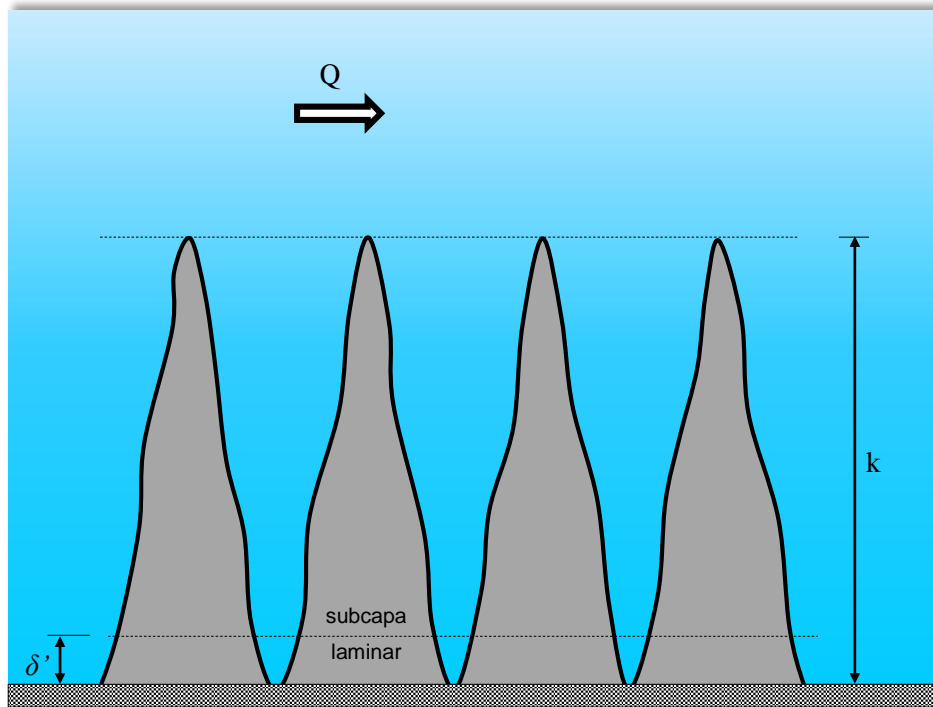


Figura 77 – Borde rugoso en un escurrimiento con régimen turbulento.

Mediante diversas experiencias realizadas por Nikuradse sobre tuberías con rugosidad artificial, las cuales confeccionaba a partir de tubos lisos a los que les incrustaba granos de arena uniforme de diámetro k . Probó fehacientemente que si se cumple con la condición que $k > 10 \delta'$, entonces se verifica la relación (ver Figura 78):

$$z' = \frac{k}{30} \tag{146}$$

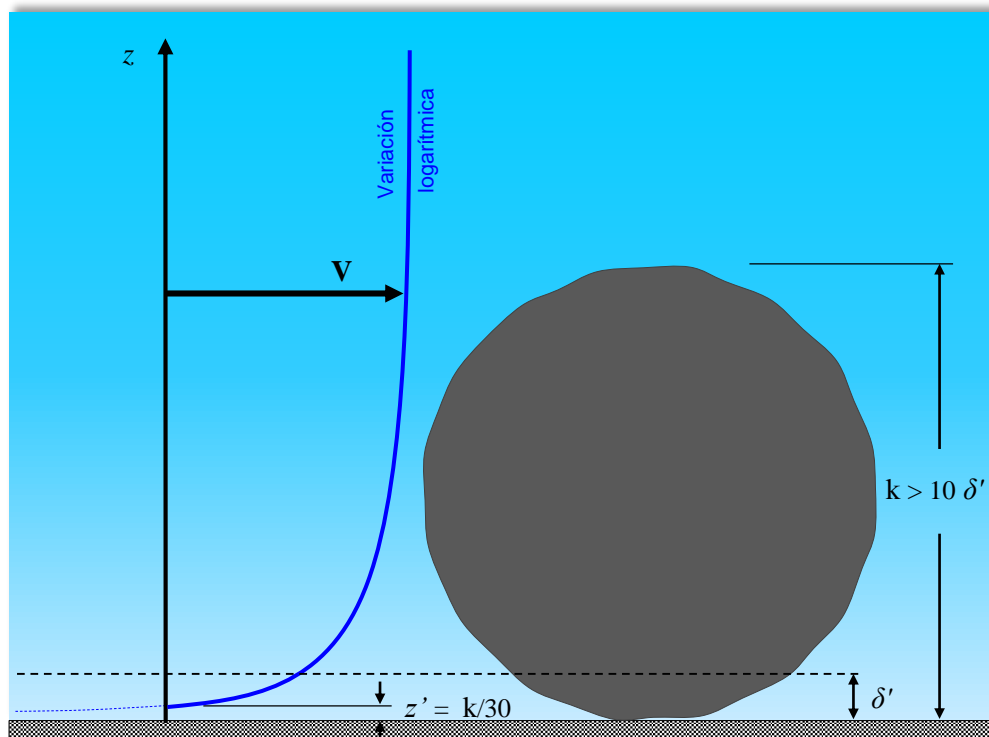


Figura 78 – Borde con rugosidad artificial en un escurrimiento con régimen turbulento.

Introduciendo el valor de z' indicado en (146) dentro de la ecuación general de distribución de velocidades dada por la ecuación (128):

$$V = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{z}{k/30} = 2,5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\ln \frac{z}{k} + \ln 30 \right]$$

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{z}{k} + 8,5 \right] \quad (147)$$

La ecuación (147) es la expresión de Von Kármán - Prandtl válida para determinar la distribución de velocidades en tuberías con contornos rugosos y régimen turbulento, la que también se puede indicar de forma adimensional:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2,5 \ln \frac{z}{k} + 8,5 \quad (148)$$

O sino, en función del logaritmo decimal:

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{k} + 8,5 \right] \quad (149)$$

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2,5 \log \frac{z}{k} + 8,5 \quad (150)$$

b2) Gasto o caudal medio junto a bordes rugosos.

En forma similar a lo desarrollado para tuberías lisas, y por las mismas razones esgrimidas en esa circunstancia, se procede al cálculo del gasto o caudal Q teniendo en cuenta sin mayor error, la distribución de velocidades en la totalidad de la sección con la ecuación (147). Así queda:

$$Q = \int_{\Omega} V d\Omega = \int_0^R \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{z}{k} + 8,5 \right] 2\pi r dr$$

Donde:

$$z = R - r$$

$$Q = \int_0^R \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{(R-r)}{k} + 8,5 \right] 2\pi r dr$$

$$Q = 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^R \left[2,5 \ln \frac{(R-r)}{k} + 8,5 \right] r dr$$

$$Q = 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{D/2} 2,5 \ln \frac{(D/2 - r)}{k} r \, dr + 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{D/2} 8,5 r \, dr$$

Calculando las integrales se tiene:

$$Q = 2,5 \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4} \ln \frac{D}{2k} - \frac{3}{2} 2,5 \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4} + 8,5 \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4}$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{D}{k} - 2,5 \ln 2 - \frac{3}{2} 2,5 + 8,5 \right]$$

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{D}{k} + 3,02 \right]$$

Colocando la expresión anterior en función del logaritmo decimal:

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{k} + 3,02 \right] \quad (151)$$

b₃) Velocidad media junto a bordes rugosos.

Se obtiene relacionando simplemente el gasto o caudal Q de la ecuación (151) con la sección transversal Ω . Por lo tanto:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{k} + 3,02 \right]$$

$$U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{k} + 3,02 \right] \quad (152)$$

b₄) Diferencia entre la velocidad en un punto y la velocidad media junto a bordes rugosos.

Se determina realizando la diferencia entre la ecuación (149) correspondiente a la velocidad V según Von Kármán - Prandtl en un punto para tubos rugosos y la velocidad media U dada por la (152).

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{k} + 8,5 \right] - \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{k} + 3,02 \right]$$

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{k} + 8,5 - 5,75 \log \frac{D}{k} - 3,02 \right]$$

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{D} + 5,48 \right] \quad (153)$$

Si se comparan las ecuaciones (145) y (153) se puede constatar que ambas expresiones son idénticas, a pesar que la primera fue deducida por la vía de las tuberías lisas y la segunda por tuberías rugosas. Por lo cual se concluye que en cualquier punto de una determinada sección, la diferencia entre la velocidad local V y la velocidad media U es la misma, independientemente de que la tubería se comporte hidráulicamente como lisa o como rugosa.

10.3.3. Ecuaciones de resistencia de Von Kármán - Prandtl.

El objetivo que se busca es determinar con la mayor precisión posible el valor del coeficiente de fricción f, el cual forma parte estructural dentro de la fórmula de Darcy - Weisbach para escurrimientos turbulentos con movimiento permanente y uniforme.

Si se tratara de un régimen laminar, el coeficiente de fricción f se calcula sencillamente igualando las expresiones de Hagen - Poiseuille y Darcy - Weisbach, teniendo en cuenta que esta última fue deducida sin considerar si el régimen era laminar o turbulento, por lo que su campo de validez es común a ambos regímenes.

$$j = 32 \frac{\mu U}{\gamma D^2} = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g}$$

Hagen - Poiseuille ←
→ Darcy - Weisbach

$$\Rightarrow f = 32 \frac{\mu U D 2g}{\gamma D^2 U^2} = 64 \frac{\mu g}{\rho g D U} = 64 \frac{\nu}{U D}$$

$$f = \frac{64}{Re} \quad (154)$$

La ecuación (154) representa el valor del coeficiente de fricción f de Darcy - Weisbach para régimen laminar exclusivamente, pudiéndose observar que depende únicamente del número de Reynolds Re (o más concretamente de la viscosidad del fluido) y es totalmente ajena a la rugosidad k de las paredes.

Efectivamente, en los escurrimientos laminares desaparece la influencia de la rugosidad k , ya que las protuberancias de la superficie sólida quedan cubiertas por la subcapa laminar δ' , y la tensión de corte τ_0 solo depende del número de Reynolds Re . Por el contrario, cuando el número de Reynolds Re tiende a valores muy altos, su influencia disminuye hasta depender solo de la rugosidad relativa k/D .

Enfocando nuevamente el análisis al régimen turbulento, previamente es conveniente reconocer experiencias de varios investigadores que han establecido distintas fórmulas empíricas, marcando en sus estudios la necesidad de diferenciar las tuberías lisas de las rugosas en los escurrimientos. Así, se pueden mencionar los siguientes antecedentes:

- Escurrimientos en tuberías lisas.
 - Paul R. Heinrich Blasius (Alemania 1873-1970).

Para $Re < 100.000$:

$$f = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \quad (155)$$

- Johan Nikuradse (Alemania 1894-1979).

Para $Re > 100.000$:

$$f = \frac{0,221}{Re^{0,237}} \quad (156)$$

- Escurrimientos en tuberías rugosas.
 - Société Belge des Mécaniciens.

$$f = \frac{0,532}{Re^{1/3}} + 0,084 \left(\frac{k_1}{D} \right)^{1/5} \quad (157)$$

Donde k_1 es un factor que refleja las características superficiales del material, pero no es precisamente la rugosidad k tal como se ha definido. Para dar una idea de magnitudes, se indican algunos valores de k_1 :

Tabla 1 Coeficiente de la fórmula de la Société B. des Mécaniciens.

MATERIAL	COEFICIENTE k_1
Acero laminado.	1,00 m
Fundición.	8,35 m
Hormigón centrifugado.	4,00 m
Fibrocemento.	0,15 m

Además se debe considerar que, si la relación $k_1/D < 0,3$, entonces el segundo término de la expresión (6-157) toma el valor de 0,068.

La metodología moderna para la determinación del coeficiente de Darcy - Weisbach necesita conocer de antemano y como parte de un cálculo previo auxiliar, la relación entre la velocidad de corte y el coeficiente de resistencia f , para lo cual se procede igualando el término de las pérdidas de carga unitarias j dadas por las ecuaciones (101) y (106).

$$\text{De (101)} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{4 \tau_0}{\gamma D}$$

$$\text{De (106)} \quad \Rightarrow \quad j = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g}$$

Por tratarse de un mismo escurrimiento, la pérdida de carga unitaria que se produce entre dos secciones de un mismo conducto prismático es exactamente la misma, aunque estén expresadas en función de distintas variables. Entonces:

$$\frac{4 \tau_0}{\gamma D} = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tau_0}{\gamma/g} = \frac{f}{8} U^2$$

Finalmente se tiene:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = U \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (158)$$

Tal como se ha señalado en el apartado 10.3.1., se denomina velocidad de corte, o también velocidad de fricción, en virtud de sus dimensiones que corresponden precisamente a las unidades cinéticas, al término:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$\left[\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right] = \frac{L}{T}$$

El concepto de velocidad de corte resulta ser una herramienta por demás importante a los efectos del cálculo del coeficiente de fricción f en régimen turbulento, de acuerdo a la moderna teoría racional.

a) Coeficiente de fricción f para tuberías lisas.

De la ecuación (158) se despeja la velocidad media U :

$$U = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{159}$$

Después se iguala la expresión (159) con la ecuación (144), que representa el valor de la velocidad media U en tuberías lisas con régimen turbulento. Así se tiene:

$$U = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) + 0,02 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} = 5,75 \log \left(\frac{1}{\nu} U \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8}} D \right) + 0,02$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{5,75}{\sqrt{8}} \left[\log \left(\frac{U D}{\nu} \sqrt{f} \right) - \log \sqrt{8} \right] + \frac{0,02}{\sqrt{8}}$$

\downarrow
2,03

\downarrow
0,45

\downarrow
0,007

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,03 \log \left(Re \sqrt{f} \right) - 0,91 \tag{160}$$

Por último, a los coeficientes de la ecuación (160), se los adapta a los resultados reales de las experiencias realizadas por Nikuradse, quedando la misma conformada de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(Re \sqrt{f} \right) - 0,80$$

(161)

La (161) es la ecuación de resistencia al escurrimiento de Von Kármán - Prandtl para tuberías que se comportan como con bordes lisos, de la cual se deduce que el coeficiente de fricción f es función exclusiva del número de Reynolds Re , o bien extrapolando dicho concepto, que el mismo depende solo de la viscosidad ν del fluido. Por consiguiente, en este tipo de escurrimiento con las características apuntadas, se puede afirmar que la resistencia no está influenciada en absoluto por la rugosidad de las paredes.

Lamentablemente la estructura de la expresión (161) no permite realizar un cálculo sencillo y directo del coeficiente de fricción f , debido a la forma implícita en que está compuesta la ecuación, y aún más agravada por la ubicación de uno de los términos f dentro del argumento del logaritmo. Igualmente, y pese a su complejidad, es la fórmula aconsejada utilizar en la práctica para la determinación del coeficiente de resistencia f , dado su origen racional.

Además, como parte adicional de una necesaria aclaración, se procede a introducir el valor de la velocidad de corte dado por la ecuación (158), la cual se dedujo a partir del equilibrio de la masa fluida y válida para cualquier tipo de tubería, dentro de la (135), que fuera determinada experimentalmente por Nikuradse exclusivamente para tuberías lisas. Así se tiene:

$$\delta' = 11,6 \frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 11,6 \frac{v \sqrt{8}}{U \sqrt{f}}$$

Dividiendo en ambos miembros por el diámetro D :

$$\frac{\delta'}{D} = 11,6 \frac{v}{U D} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} = \frac{32,8}{Re \sqrt{f}} \Rightarrow$$

\downarrow
 $\frac{1}{Re}$

$$Re \sqrt{f} = 32,8 \frac{D}{\delta'} \quad (162)$$

Reemplazando (162) en (161):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(32,8 \frac{D}{\delta'} \right) - 0,80$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \left(\log 32,8 + \log \frac{D}{\delta'} \right) - 0,80$$

\downarrow
 $\approx 1,52$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{\delta'} + 2,23$$

(163)

La expresión (163) representa otra alternativa útil para formular la ecuación de Von Kármán - Prandtl, donde queda claramente de manifiesto que la resistencia al avance en escurrimientos a través de tuberías lisas con régimen turbulento depende del espesor de la sub-capa laminar δ' con respecto al diámetro D .

b) Coeficiente de fricción f para tuberías rugosas.

Se procede primeramente igualando la velocidad media U según la expresión (159), con la (152) correspondiente a los escurrimientos turbulentos en tuberías rugosas.

$$U = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{k} + 3,02 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,03 \log \frac{D}{k} + 1,07 \quad (164)$$

Luego se practica una pequeña corrección sobre los coeficientes numéricos de la (164), a los efectos de ajustarlos a los datos obtenidos experimentalmente, quedando así:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{k} + 1,14 \quad (165)$$

La (165) representa la ecuación de resistencia al avance de Von Kármán - Prandtl para tuberías de comportamiento hidráulico rugoso, y a partir de la lectura de la misma se concluye que el coeficiente de fricción f en esta otra situación, depende solamente de la rugosidad k con relación al diámetro D , ignorando absolutamente las propiedades viscosas del fluido.

10.4. Experiencias de Nikuradse.

Johan Nikuradse, discípulo de Ludwig Prandtl, ensayó en los laboratorios hidráulicos de la universidad de Gotinga (Alemania) escurrimientos con tubos de rugosidad artificial conocida, la cual era creada de exprofeso por él mismo, pegando sobre la superficie interior de una tubería lisa de vidrio granos de arena cuidadosamente tamizados para lograr que el diámetro sea uniforme.

Primeramente realizó pruebas con tubos lisos, volcando los resultados obtenidos sobre un gráfico doble logarítmico de $f = f(Re)$, donde previamente había representado las curvas correspondientes a la ecuación (154) que caracteriza al régimen laminar y la (161) que interpreta a los movimientos en tuberías lisas con régimen turbulento.

- Abscisa: $\rightarrow Re$ número de Reynolds.
- Ordenada: $\rightarrow f$ Coeficiente de fricción.

Así verificó que los puntos se alineaban de manera razonablemente admisible con la expresión (154) para números de Reynolds $Re < 2000$ y con la (161) para $Re > 4$ a 5000. En el tramo comprendido entre $2000 < Re < 4$ a 5000 comprobó que la distribución no se correspondía con ninguna de las dos líneas anteriormente señaladas, sino que se formaba un ordenamiento que obedece a la denominada *zona crítica* o *inestable*, de conversión del régimen laminar al turbulento (ver *Figura 79*).

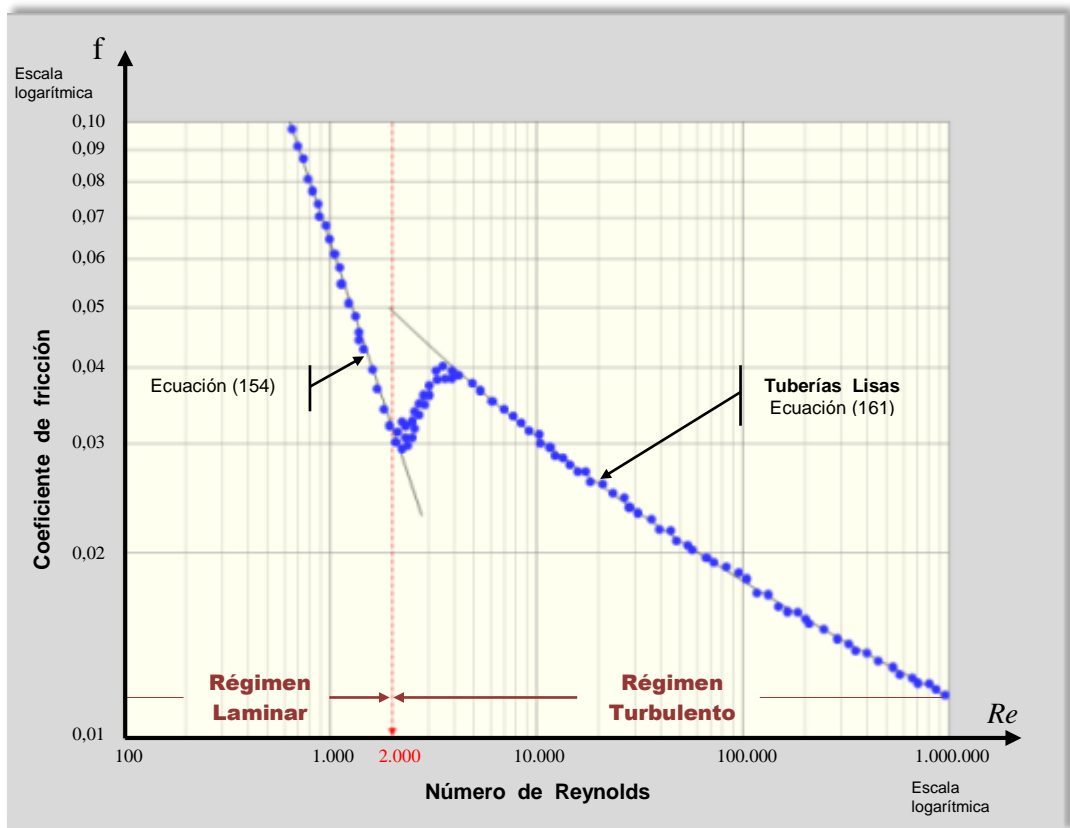


Figura 79 – Experiencias de Nikuradse con tuberías lisas.

Siguiendo el estudio, Nikuradse continuó efectuando ensayos con tuberías rugosas, usando 30 valores distintos de la relación denominada rugosidad relativa k/D , o sea el cociente entre el diámetro del grano de arena y el del interior de la tubería. A los efectos prácticos y para trabajar más simplemente con números enteros evitando así una significativa y confusa cantidad de decimales, se optó por emplear de manera más sencilla la inversa de la rugosidad relativa D/k con valores variables entre:

$$30 \leq \frac{D}{k} \leq 1014$$

En la *Figura 80* puede apreciarse la representación de los puntos correspondientes a los ensayos sobre tuberías de rugosidad uniforme sobre otro gráfico $f = f(Re)$, consecuencia de solo 6 relaciones D/k de las 30 efectuadas por Nikuradse, a fin de resaltar el concepto que se desea indicar con un esquema lo más sencillo posible, o al menos mínimamente engorroso.

Del mismo se extraen las siguientes conclusiones:

- Los puntos se alinean con la curva de la ecuación (154) congruente con el régimen laminar, cualquiera que sea la rugosidad del conducto y siempre que el número de Reynolds sea menor que su valor crítico ($Re < 2000$). Esta circunstancia confirma que la rugosidad de los contornos sólidos carece de injerencia cuando se trata del régimen laminar.
- Sobrepasada la zona crítica ($2000 < Re < 4$ a 5000), los puntos se ordenan en concordancia con la ecuación (161), representativa del escurrimiento en tubos de bordes lisos con régimen turbulento.

De esta manera se van distribuyendo los puntos hasta llegar a un determinado valor del número de Reynolds, que va siendo cada vez mayor, a medida que se incrementa la relación D/k . Esto significa que cuando la rugosidad k disminuye (o bien crece D/k), la tubería trabaja como lisa hasta ciertos valores de Re cada vez más amplios.

Esta circunstancia marca que si bien una tubería tiene un aspecto físico rugoso, a los efectos hidrodinámicos, el escurrimiento puede desarrollarse como si fuese de característica lisa. Todo ello siempre que el número de Reynolds Re sea adecuadamente pequeño, es decir que las fuerzas viscosas prevalezcan sobre las inerciales.

- En el margen derecho de la *Figura 80* se visualizan diferentes curvas identificadas cada una con sus respectivos valores de D/k , las que tienden a ser horizontales a partir de distintos valores de Re . Esta situación señala claramente que una vez superado dicho valor, el coeficiente de fricción f se independiza del número de Reynolds (o sea de la viscosidad ν)

En síntesis, en los límites de un escurrimiento turbulento dentro de un conducto con paredes de apariencia física rugosa, el movimiento puede actuar hidráulicamente de dos maneras posibles:

- Tubería lisa: El número de Reynolds debe ser lo suficientemente bajo, pero siempre mayor de 4 a 5000. La resistencia se origina solo por efecto de la viscosidad ν .
- Tubería rugosa: El valor del número de Reynolds tiene que ser bien elevado y la resistencia al avance del fluido se produce exclusivamente por la acción de la rugosidad en las paredes de la tubería.

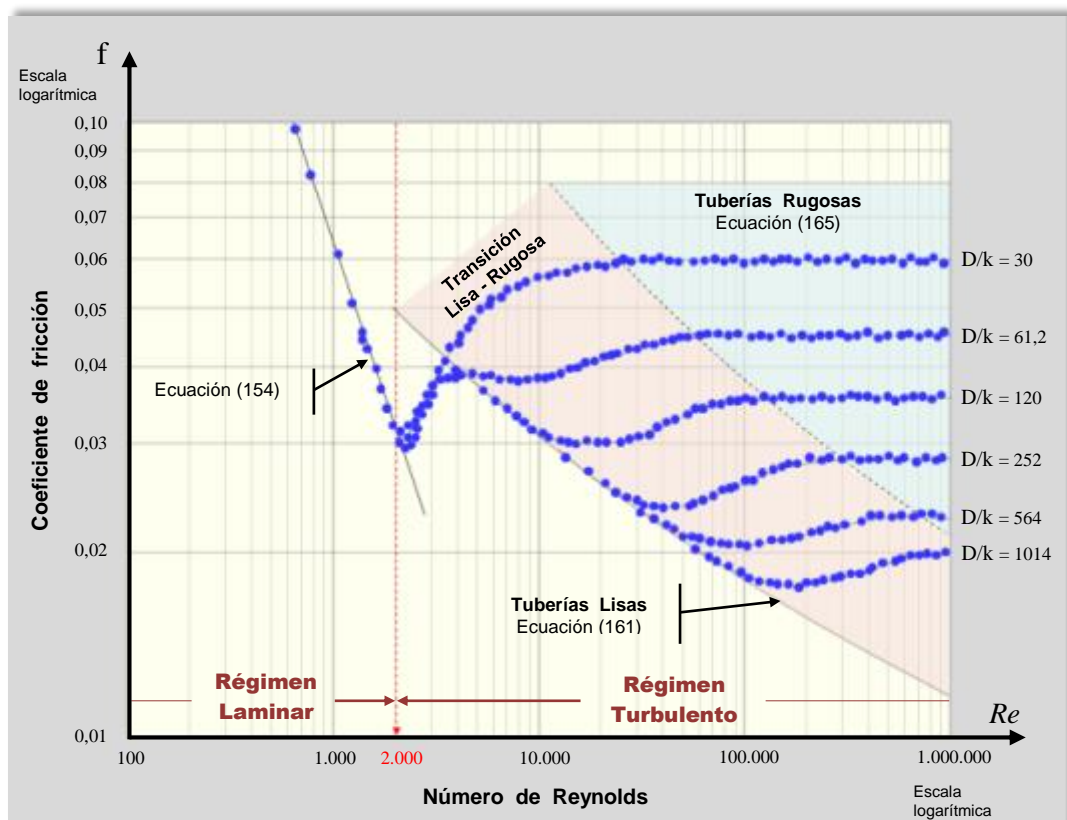


Figura 80 – Experiencias de Nikuradse con tuberías rugosas.

Presentado el fenómeno del escurrimiento de esta forma tan extrema, se puede afirmar que no hay un punto único de inflexión donde el comportamiento de la corriente líquida se modifique súbitamente de lisa a rugosa o viceversa. Por el contrario, resulta por demás razonable aceptar la existencia de una zona de transición moderada, en la cual la resistencia al escurrimiento esté influenciada simultáneamente tanto por la acción de la viscosidad ν como por la rugosidad k de los contornos sólidos. Ver en la *Figura 80* zona de **Transición Lisa - Rugosa**.

Resumiendo gráficamente el comportamiento hidrodinámico de los escurrimientos a presión, se tiene que según las condiciones involucradas en el fluido (viscosidad) y la tubería (rugosidad), se pueden presentar de las siguientes formas a saber:

1- Régimen laminar.

Características:

- No se forman turbulencias.
- Es independiente de la rugosidad absoluta k .
- $f = 64/Re \rightarrow f = f(Re)$.
- Ver *Figura 81*.

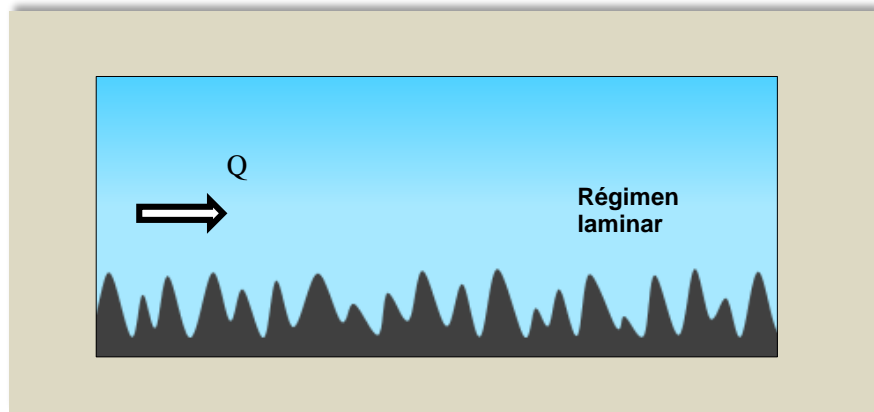


Figura 81 – Escurrimiento con régimen laminar.

2- Régimen turbulento.

a) Tubería lisa.

Características:

- Escurrimiento hidrodinámico como tubería lisa.
- La rugosidad absoluta queda cubierta por la sub-capa laminar y no influye en el coeficiente de fricción f ($\delta' > k$).
- $f = f(Re)$.
- Las fuerzas viscosas son muy importantes.
- Las fuerzas inerciales son insignificantes.
- Ver *Figura 82*.

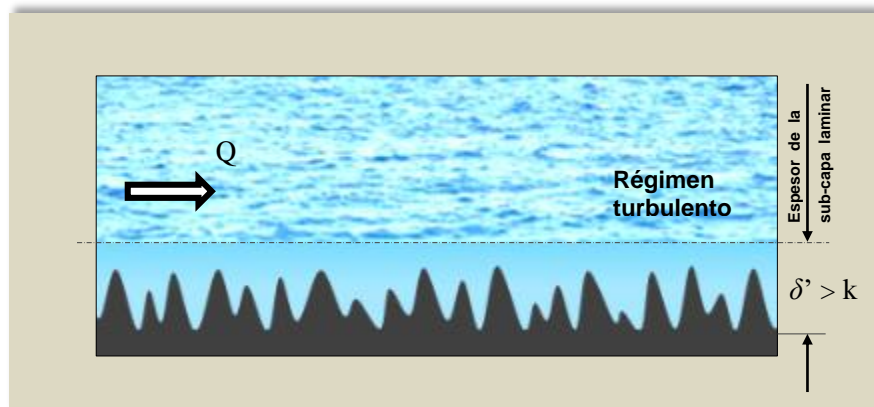


Figura 82 – Escurrimiento con régimen turbulento en tubería lisa.

b) Tubería transición lisa - rugosa.

Características:

- E scorrimiento hidrodinámico como tubería en zona de transición o semirrugosa.
- El espesor de la sub-capa laminar es próximo al valor de la rugosidad absoluta ($\delta' \approx k$).
- La rugosidad emerge de la sub-capa laminar en algunos puntos y en otros no.
- Las rugosidades salientes están afectadas por la turbulencia.
- El coeficiente de fricción depende simultáneamente del número de Reynolds y la rugosidad relativa $f = f(Re, k/D)$.
- Las fuerzas viscosas y las inerciales tienen acción preponderante compartida.
- Ver *Figura 83*.

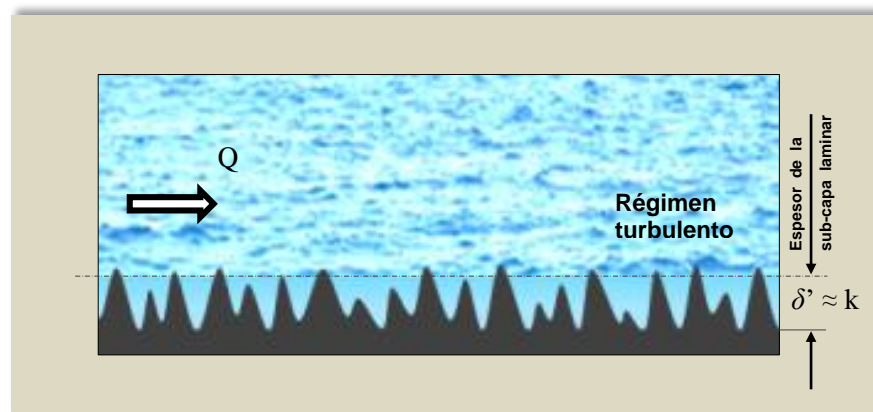


Figura 83 – E scorrimiento con régimen turbulento en transición lisa - rugosa.

c) Tubería rugosa.

Características:

- E scorrimiento hidrodinámico como tubería rugosa.
- El espesor de la sub-capa laminar es menor que la rugosidad absoluta ($\delta' < k$).
- Las protuberancias de las paredes sobrepasan largamente el espesor de la sub-capa laminar, generando turbulencia completa.
- $f = f(k/D)$.
- Las fuerzas de inercia son de magnitud muy considerable.
- Las fuerzas viscosas son despreciables.
- Ver *Figura 84*.

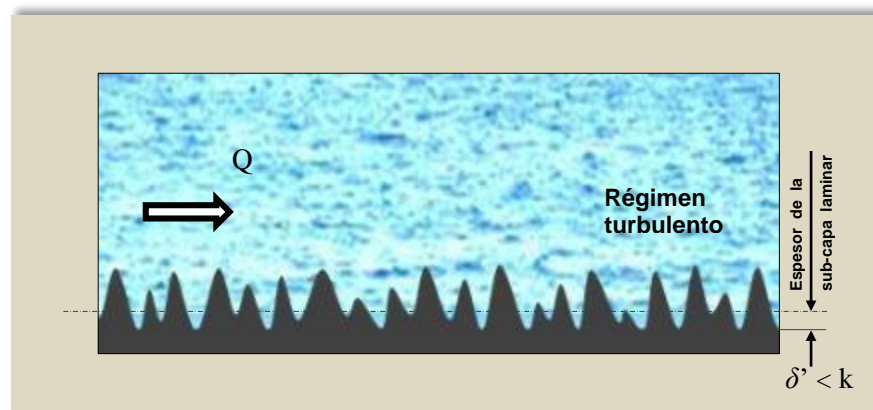


Figura 84– E scorrimiento con régimen turbulento en tubería rugosa.

10.4.1. Influencia simultánea de la viscosidad y la rugosidad.

En el funcionamiento hidrodinámico de una conducción, el mismo no depende que su comportamiento sea por ejemplo del tipo rugoso, por la simple circunstancia física que la superficie sólida de contención sea áspera en su apariencia visual. Entonces, como ya se ha hecho hincapié, una tubería de aspecto rugoso puede trabajar hidráulicamente tanto como lisa o bien como rugosa.

En efecto, si el valor del número de Reynolds Re es lo suficientemente pequeño le corresponderá a la conducción un funcionamiento tipo tubería lisa y viceversa, si Re es muy importante el comportamiento será como tubería rugosa. Pero además de esos dos estados extremos, existe una zona intermedia, en donde la resistencia al avance depende simultáneamente de la viscosidad ν del fluido y de la rugosidad k .

Cuando las protuberancias quedan sumergidas en la sub-capa laminar δ' , la tubería trabaja hidráulicamente como lisa y cuando esta se hace más delgada, se descubren las asperezas y el funcionamiento se torna de modo rugoso, existiendo en el medio una zona que el escurrimiento actúa como si fuese una tubería semirrugosa.

Para comenzar con el estudio se establece convenientemente un nuevo ordenamiento de las ecuaciones de resistencia de Von Kármán - Prandtl, y así se tiene:

- Tuberías lisas.

Restando miembro a miembro el término $2 \log (D/k)$ de la ecuación (6-161) se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log \frac{D}{k} = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{D/k} - 0,8 \quad (166)$$

- Tuberías rugosas.

Modificando la distribución de la ecuación (165):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log \frac{D}{k} = 1,14 \quad (167)$$

Graficando las ecuaciones (166) y (167) sobre un plano referenciado por un par de ejes ortogonales cartesianos, los cuales se definen específicamente con los términos que se detallan a continuación:

- Abscisa: $x = \frac{Re \sqrt{f}}{D/k}$

Escala: logarítmica.

Sentido positivo: izquierda → derecha.

- Ordenada: $y = \frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log \frac{D}{k}$

Escala: aritmética.

Sentido positivo: arriba → abajo.

Con esas consideraciones, se contraen y simplifican las ecuaciones de la siguiente manera:

- Tuberías lisas - Ecuación (166): $y = 2 \log x - 0,8$

Corresponde a una línea recta en el plano indicado. Por lo tanto, definiendo 2 puntos de la misma se puede precisar su ubicación.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Punto A: Si } x = 1 \Rightarrow y = -0,80 \\ \text{Punto B: Si } x = 100 \Rightarrow y = +3,20 \end{array} \right.$$

Ver en la Figura 85 → Línea recta (1)

- Tuberías rugosas - Ecuación (167): $y = 1,14$

Es una línea recta paralela al eje x .

Ver en la Figura 85 → Línea recta (2)

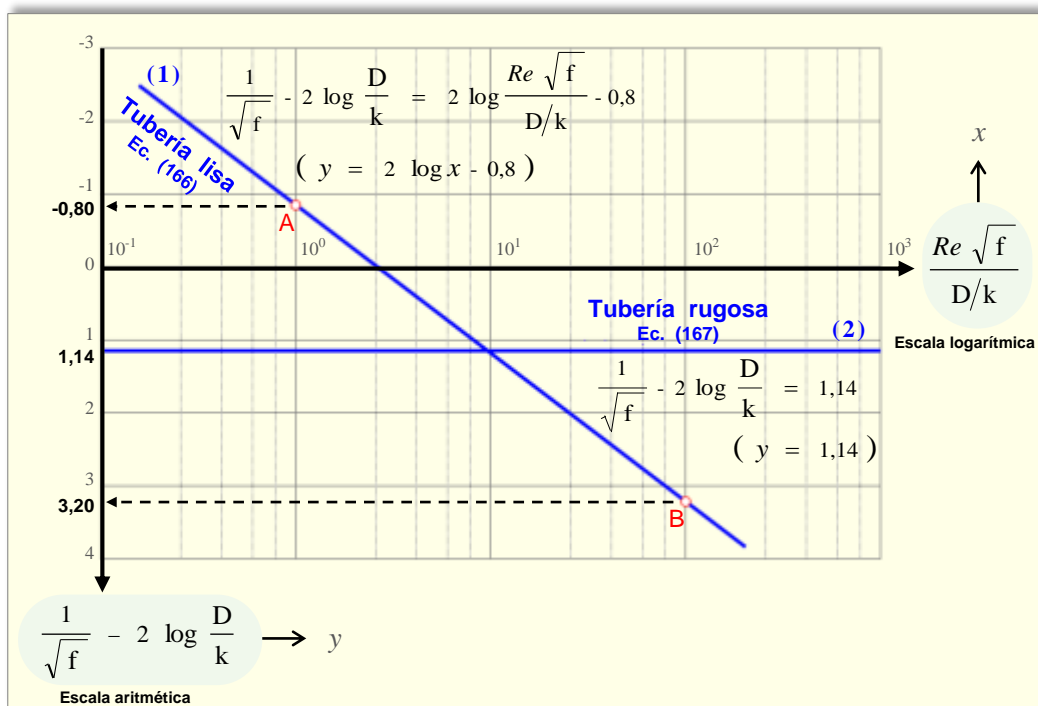



Figura 85 – Representación gráfica del funcionamiento hidráulico como tubería lisa y rugosa.

Se ha visto que las variables que gobiernan la resistencia al escurrimiento en las dos situaciones límites son las siguientes, según corresponda a:

- Tuberías lisas $\frac{D}{\delta'}$ Ver ecuación (163).
- Tuberías rugosas $\frac{D}{k}$ Ver ecuación (165).

Resta conocer ahora la resistencia al avance en el sector intermedio, o sea el comportamiento de tuberías que funcionan hidráulicamente entre lisa y rugosa, la cual evidentemente estará provista de una combinación entre las fuerzas viscosas del fluido y la rugosidad de las paredes. Así planteado el problema, resulta racional suponer para este caso medio, que el término que evalúe la resistencia al avance resulte ser un arreglo proporcional entre las relaciones que rigen el movimiento para tuberías lisas y rugosas. Por consiguiente, se puede escribir:

$$\begin{array}{l}
 \text{Tubería lisa} \quad \longrightarrow \quad \frac{D}{\delta'} \\
 \text{Tubería rugosa} \quad \longrightarrow \quad \frac{D}{k}
 \end{array} = \frac{k}{\delta'} \quad (168)$$



 Relación conveniente y eficaz para cuantificar la resistencia en la zona intermedia.


La expresión (168) resulta ser una simple relación entre la rugosidad k del sólido de contención y el espesor de la sub-capa laminar δ' . De la misma se pueden extraer dos conclusiones básicas con respecto a la resistencia al escurrimiento:

- Disminuye a medida que la rugosidad k va quedando cada vez más inmersa en la sub-capa laminar δ' .
- Aumenta cuando la sub-capa laminar δ' se reduce y resulta más turbulento el movimiento por causa de la rugosidad k .

Partiendo de la ecuación (162), y multiplicando ambos miembros por la rugosidad k :

$$Re \sqrt{f} \quad k = 32,8 \frac{D}{\delta'} \quad k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Re \sqrt{f}}{D/k} = 32,8 \frac{k}{\delta'} \quad (169)$$



 Término correspondiente a la abscisa del diagrama de la *Figura 85*.

O bien:

$$\frac{k}{\delta'} = \frac{1}{32,8} \frac{Re \sqrt{f}}{D/k} \quad (170)$$

A los fines de una mejor interpretación gráfica, se propone un nuevo diagrama adicionando otra abscisa complementaria que indique la relación k/δ' . La misma difiere en una proporción inversa de 32,8 unidades respecto de la abscisa original, según se deduce de la ecuación (170).

En la *Figura 87* se vuelven a graficar, con el mismo sistema de coordenadas anterior, tanto la ecuación (166) correspondiente a tubería lisa como la (167) de tubería rugosa, ambas con el criterio de ser consideradas como líneas de referencia. Luego se vuelcan los puntos resultantes de los ensayos experimentales de Nikuradse, realizados con un revestimiento interior consistente en granos de arena uniforme.

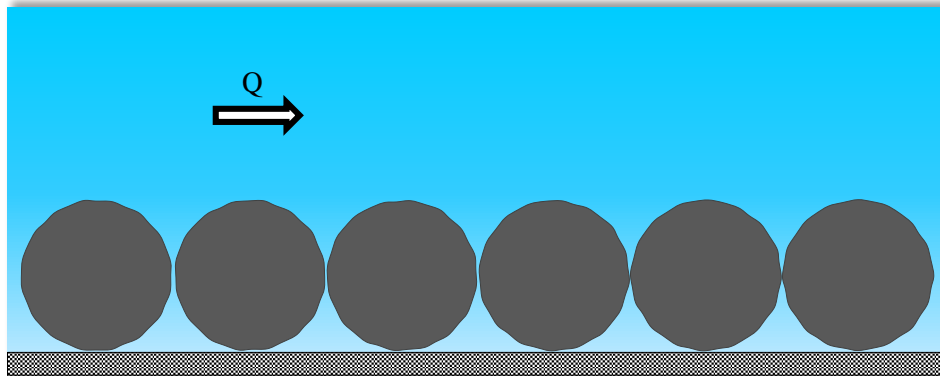


Figura 86 – Revestimiento con granos de arena uniforme en ensayos de Nikuradse.

De la Figura 87 se puede sacar como corolario que la nube de puntos experimental, por una parte coincide prácticamente con la línea (1) de escurrimiento tipo liso y por otra también se alinea respetando la recta (2) de escurrimiento rugoso. Se exceptúa de este comentario la zona comprendida entre $0,25 < k/\delta' < 6,10$, en la cual dicha nube de puntos se separa notablemente de las dos rectas teóricas, tomando la forma de la línea individualizada como curva (3).

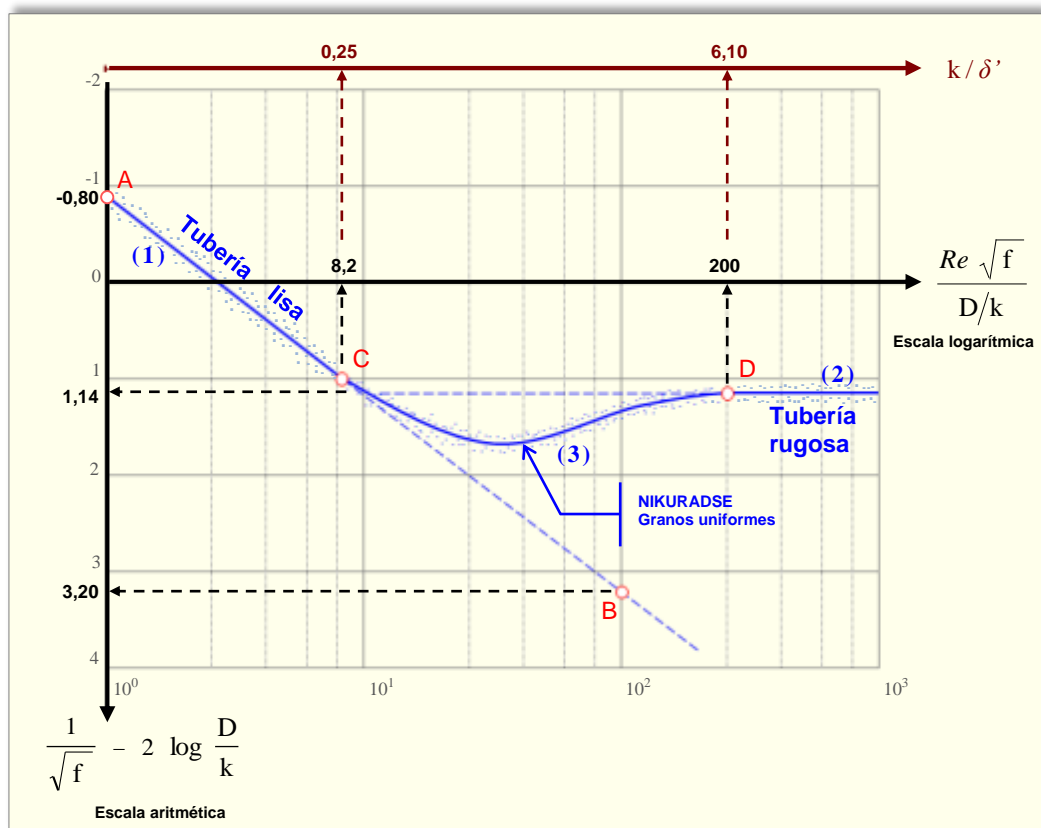


Figura 87 – Representación gráfica del funcionamiento hidráulico con granos de arena uniforme.

Haciendo un análisis del comportamiento hidrodinámico a partir del diagrama anterior, se concluye que en los escurrimientos a través de tuberías a presión con régimen turbulento, el movimiento cumple con las siguientes premisas según la zona que corresponda:

- Para $\frac{k}{\delta'} < 0,25$, o bien $\rightarrow \frac{Re \sqrt{f}}{D/k} < 8,2$

La tubería siempre funciona hidrodinámicamente como lisa, en cuyo caso la resistencia solo depende de la viscosidad ν .

$$\frac{k}{\delta'} < \frac{1}{4} \Rightarrow k < \frac{1}{4} \delta'$$

Esto sucede cuando la rugosidad k es 4 veces inferior al espesor de la sub-capa laminar δ' .

En la *Figura 88* se muestra la relación límite donde $k = 0.25 \delta'$, lo que da una idea visual de magnitud a partir de la cual el escurrimiento dentro del conducto trabaja hidrodinámicamente como liso. Para que ello se cumpla, la rugosidad debe tener un tamaño k tal como el señalado en el dibujo o bien menor.

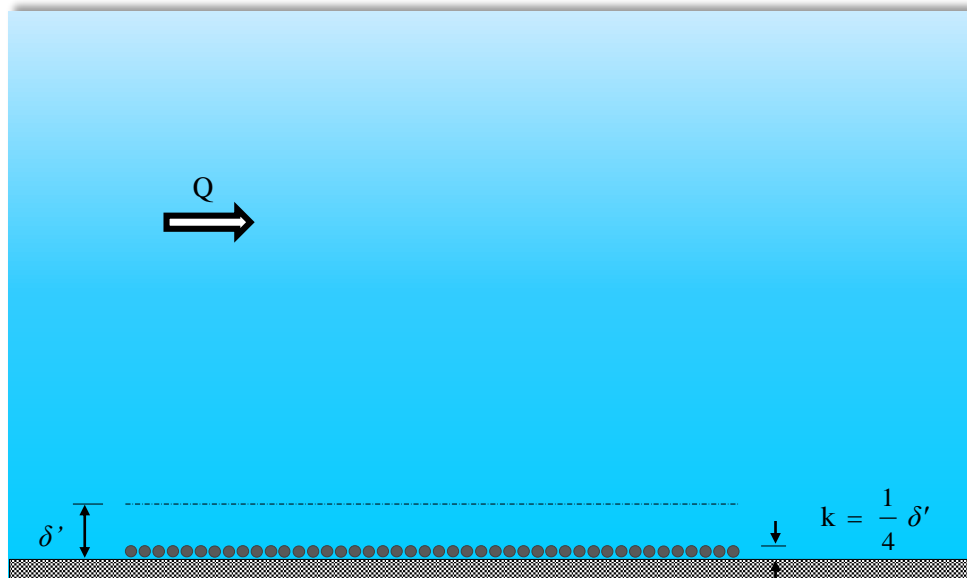


Figura 88 – Relación límite para una tubería hidráulicamente lisa.

- Para $\frac{k}{\delta'} > 6,10$, o bien $\rightarrow \frac{Re \sqrt{f}}{D/k} > 200$

La tubería trabaja hidráulicamente y de manera invariable como rugosa, y la resistencia es consecuencia exclusiva del diámetro del grano de arena k . De esa forma se dispone entonces el comportamiento del movimiento cuando la rugosidad k es mayor de 6,1 veces respecto al espesor de la sub-capa laminar δ' .

La *Figura 89* representa gráficamente este otro límite condicionante, a partir del cual los escurrimientos son plenamente rugosos. En la misma se supone un movimiento similar al descrito en la *Figura 88* para tuberías lisas, por lo que la sub-capa laminar δ' es de igual valor, pero en este caso la rugosidad k es sensiblemente superior e igual al límite a partir del cual la circulación del fluido es de tipo rugoso. Desde esa magnitud límite de k y para valores más grandes de la misma, el comportamiento hidráulico de la corriente siempre va a ser de características rugosas.

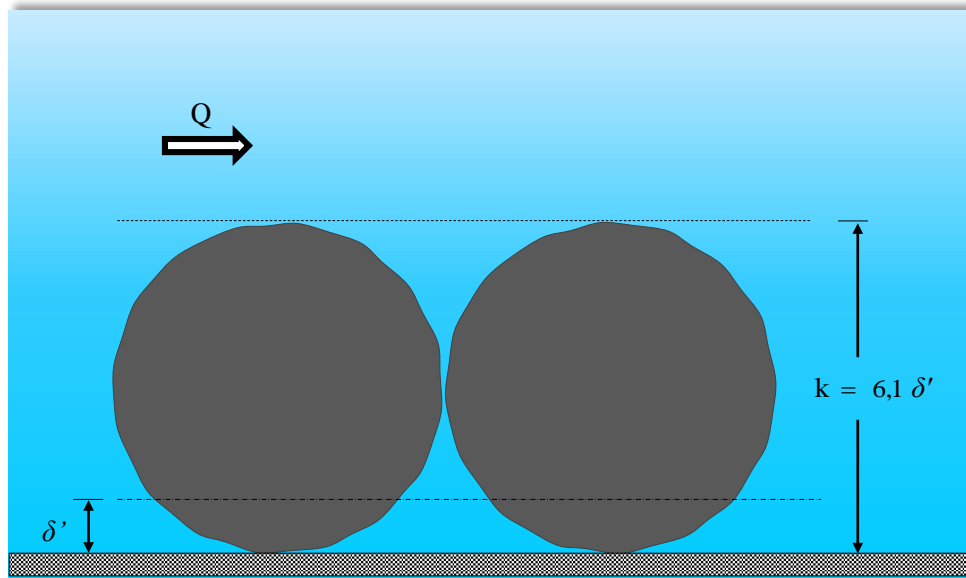


Figura 89 – Relación límite para una tubería hidráulicamente rugosa.

- Para $0,25 < \frac{k}{\delta'} < 6,10$, o bien $\rightarrow 8,2 < \frac{Re \sqrt{f}}{D/k} < 200$

Corresponde a la situación intermedia entre los extremos correspondientes al escurrimiento hidráulicamente liso y el rugoso, zona donde la resistencia al avance depende simultáneamente de la viscosidad del fluido y la aspereza de la tubería.

La nube de resultados experimentales no se alinea con ninguna de las rectas de referencia.

En la Figura 90 se indican claramente los límites de las rugosidades entre los cuales el escurrimiento se desarrolla con las características de una tubería semirrugosa.

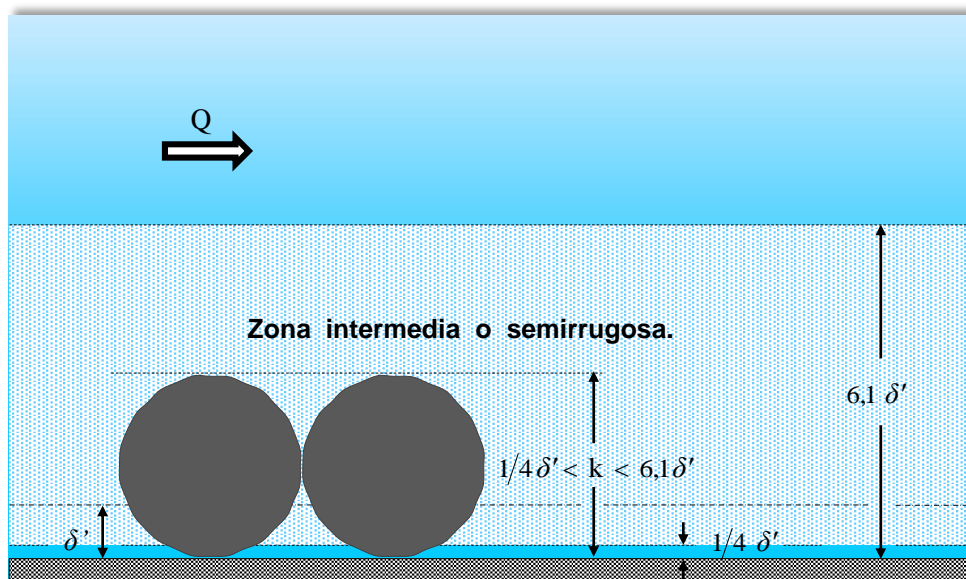


Figura 90 – Zona donde funciona una tubería hidráulicamente como semirrugosa.

10.4.2. Experiencias de Colebrook y White.

El empleo del diagrama de la *Figura 87* a los fines de evaluar la resistencia al escurrimiento en tuberías a presión, está circunscripto a la homogeneidad de las asperezas del conducto en estudio con respecto a las rugosidades confeccionadas con granos de arena uniforme por Nikuradse en sus experiencias.

Sabiendo que la rugosidad real de las tuberías que suelen utilizarse en las instalaciones hidráulicas no se condicen con las elaboradas artificialmente por Nikuradse y en consecuencia esas hipótesis iniciales conducían inexorablemente a resultados erróneos en la práctica, entonces los investigadores británicos Cyril Frank Colebrook (Galés 1910 - 1997) y Cedric Masey White (Inglés 1898 - 1993) procedieron a realizar nuevas experiencias complementarias, primeramente con el uso de un revestimiento compuesto por granos de arena no uniforme (ver *Figura 91*) y luego con tuberías de uso comercial.

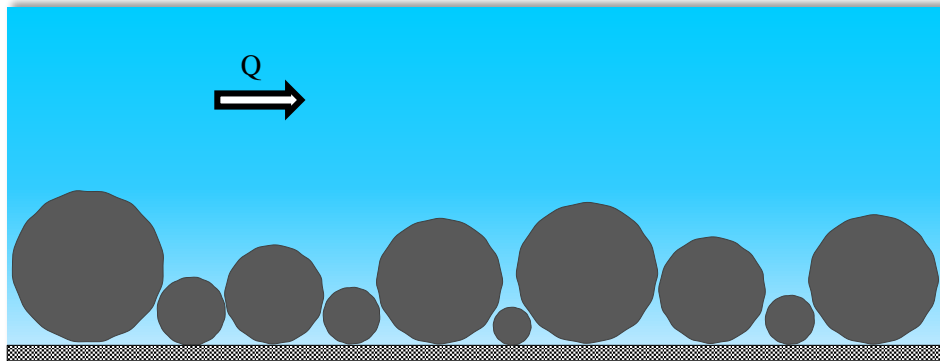


Figura 91 – Revestimiento con granos de arena no uniforme en ensayos de C. y White.

a) Tuberías revestidas con granos de arena no uniforme.

En sus estudios anexos dentro de la zona de transición lisa - rugosa, Colebrook y White determinaron la curva (4) que representa el comportamiento del escurrimiento en tuberías con rugosidad artificial, obtenida con incrustaciones sobre la superficie de granos de arena con graduación variable.

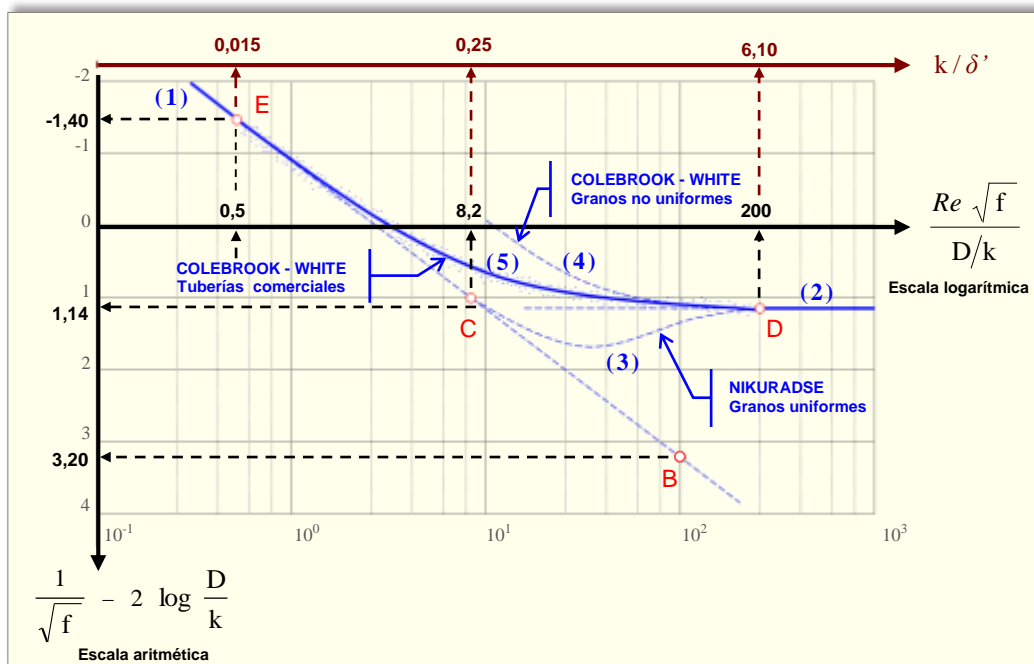


Figura 92 – Experiencias de Colebrook y White.

Una experiencia de esta naturaleza, realizada con granos de distintos diámetros, es muy difícil en la práctica relacionarlos con una sola longitud representativa, tal como acontece con la rugosidad k en los revestimientos uniformes. Para lograr ello se ha recurrido al concepto de *rugosidad equivalente*, que consiste en una rugosidad particular k de granos uniformes ficticios, los cuales generan un idéntico valor del coeficiente de fricción f en el mismo diámetro D de la tubería considerada en régimen de plena turbulencia.

Así, dicha curva (4) resulta ser muy distinta y bien separada de la (3), correspondiente a las tuberías recubiertas con granos uniformes (ver *Figura 92*). La razón de esta manifiesta divergencia entre ambas líneas tiene su causa en el comportamiento hidrodinámico del movimiento, según se trate de conductos revestidos interiormente con granos de arena uniforme o bien no uniforme.

Si por ejemplo, en un escurrimiento a través de una tubería a presión, la sub-capa laminar resulta ser superior a la rugosidad de las paredes y luego, por efecto de la aceleración del movimiento, δ' disminuye sucesivamente, entonces los granos de arena se van a ir descubriendo de dos maneras distintas según se trate de recubrimientos con granos de arena tipo:

- Uniforme.

Ante una ínfima variación de la sub-capa laminar ($\Delta\delta'$) en las inmediaciones superiores del diámetro k de los granos de arena, se producirá el descubrimiento total de los bordes de forma simultánea. Ver *Figura 93*.

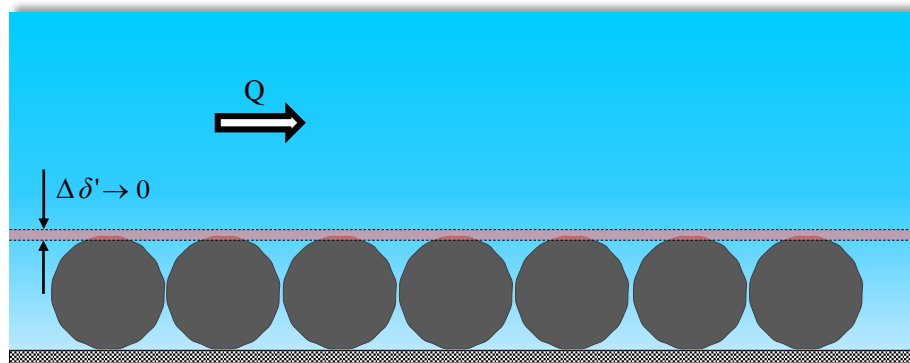


Figura 93 – Variación de la sub-capa laminar en tubería revestida con arena uniforme.

- No uniforme.

A diferencia del caso anterior, la disminución progresiva de la sub-capa laminar va a descubrir primeramente a la partícula de mayor diámetro y así sucesivamente continuará el proceso hasta la de menor longitud. Por consiguiente, la acción del despeje de cada una de las rugosidades no uniformes representadas por los granos de arena, se va ir produciendo de manera gradual hasta llegar al descubrimiento total. Ver *Figura 94*.

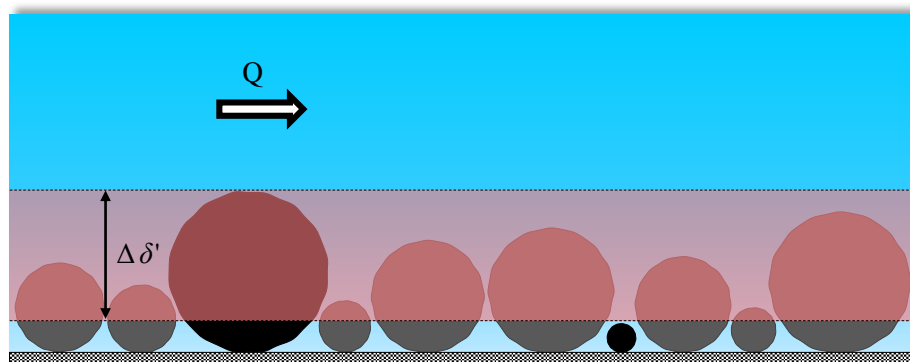


Figura 94 – Variación de la sub-capa laminar en tubería revestida con arena no uniforme.

b) Tuberías comerciales.

Los comportamientos tan disímiles que se verificaron a través de las experiencias en los escurrimientos sobre tuberías de rugosidad artificialmente provocada con granos de arena uniforme y no uniforme, llevaron a los investigadores Colebrook y White a repensar todo lo hasta allí actuado y continuar avanzando sobre el estudio del movimiento dentro de la zona semirrugosa.

Tomando como punto de partida que en la práctica real concerniente a las instalaciones hidráulicas a presión, los escurrimientos no se realizan a través de tuberías con rugosidades obtenidas con granos de arena, sino dentro de conductos que son productos de fabricación de la propia industria, cuya rugosidad es una característica inherente al mismo material y la calidad obtenida en el proceso de ejecución (ver *Figura 95*). Entonces, y en base a lo anteriormente expuesto, Colebrook y White optaron por seguir la línea de investigaciones sobre esas mismas conducciones, sin generar ningún tipo de alteración en su superficie interior.

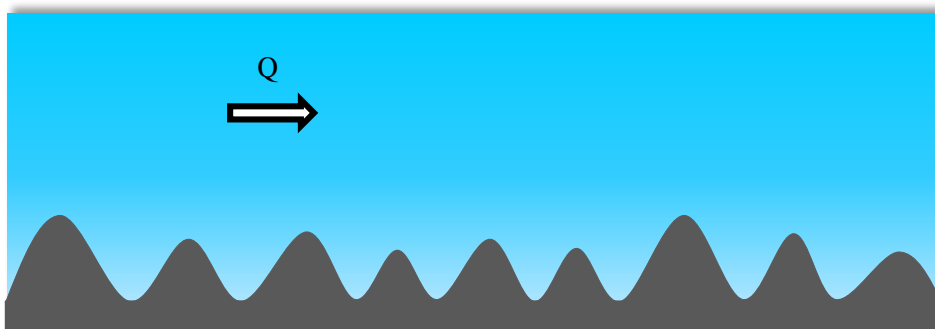


Figura 95 – Rugosidad en una tubería comercial.

La oferta del comercio permite la adquisición y uso común de tuberías de distintos materiales, tales como fundición, hormigón, asbesto-cemento, policloruro de vinilo (pvc), polietileno reforzado con fibra de vidrio (prfv), polietileno de alta densidad (pead), etc., para los cuales, y a los efectos de la evaluación de su funcionamiento hidráulico, es válido nuevamente el concepto de rugosidad equivalente, ya utilizado con los conductos de rugosidad provocada con arena no uniforme. Para ello se determina previamente el valor de la rugosidad equivalente de arena uniforme que provoca igual valor límite del coeficiente de fricción f y consecuentemente se obtiene idéntica pérdida de energía J . El procedimiento ordinario para el cálculo de la rugosidad equivalente de un determinado material, consiste en comparar la pérdida de energía general que se produce en un tramo de tubería con otros variados tubos lisos, de igual diámetro, longitud y caudal, revestidos con distintos granos uniformes incrustados sobre la superficie. En esas condiciones, el grano de arena k que genere igual pérdida de energía será la rugosidad equivalente adoptada para el material en cuestión (ver en la *Tabla 2* algunos valores medios de rugosidades equivalentes, para materiales comúnmente utilizados en la fabricación de tuberías).

Así, con los resultados obtenidos con estos otros tipos de materiales, también se los representan en la *Figura 92*, quedando particularizados y resumidos a través de la curva (5), la cual no coincide ni con la (3) de granos de arena uniforme, ni con la (4) de arena no uniforme. Efectivamente, la curva de los ensayos con tuberías comerciales se dispone en medio de las curvas (3) y (4), situación esta que se interpreta como que su rugosidad natural no resulta ser tan uniforme como la de las arenas experimentadas por Nikuradse, ni tan irregulares como las arenas estudiadas por los mismos Colebrook y White.

Si bien la distribución de los puntos no responde estrictamente a una ley bien definida por la existencia de una considerable dispersión de valores, Colebrook y White aportaron una original aproximación a través de una ecuación semiempírica, válida para una muy importante cantidad de materiales, la cual concuerda tolerablemente con los ensayos

realizados. La misma tiene su raíz en las ecuaciones de resistencia de Von Kármán - Prandtl (161) para tuberías lisas y la (165) para tuberías rugosas:

- Tuberías lisas.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (Re \sqrt{f}) - 0,8 + 1,94 - 1,94 = 1,14 - \left[2 \log 9,35 - 2 \log (Re \sqrt{f}) \right] =$$

\downarrow
1,14

\downarrow
1,94

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \frac{9,35}{Re \sqrt{f}} \quad (171)$$

- Tuberías rugosas.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{k} + 1,14 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \frac{k}{D} \quad (172)$$

Luego combinaron convenientemente las ecuaciones (171) y (172), obteniendo una expresión específica para el movimiento en la zona de transición lisa-rugosa en tuberías comerciales.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \left(\frac{k}{D} + \frac{9,35}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (173)$$

La (173) es la ecuación de Colebrook y White representada por la curva (5) en el gráfico de la *Figura 92* y tiene la característica de concordar por un extremo con la (171) cuando la rugosidad relativa k/D es muy pequeña (tubería lisa) y por el otro con la (172), si el número de Reynolds Re es un valor muy grande (tubería rugosa).

Es por demás destacado y trascendente que a partir de una ecuación como la (173), creada con una simple combinación de otras dos ecuaciones que la limitan, se obtengan resultados suficientemente adecuados, tal como lo demostraron Colebrook y White en los ensayos efectuados sobre una variada cantidad de tuberías, y constatar también, que independientemente del material utilizado, los valores se ajustan satisfactoriamente con la curva (5).

Obsérvese además que el rango de influencia simultánea de la viscosidad y la rugosidad en tuberías comerciales se ha incrementado sustancialmente respecto a las tuberías revestidas con granos de arena uniforme. La zona de transición o semirrugosa está definida para estos casos entre los siguientes límites:

$$0,015 < \frac{k}{\delta'} < 6,10$$

O bien:

$$0,5 < \frac{Re \sqrt{f}}{D/k} < 200$$

Efectivamente, el límite superior de k/δ' se ha mantenido constante, mientras que el inferior se ha modificado, disminuyendo de 0,25 a 0,015.

Tabla 2 Rugosidad media aproximada según el material de las tuberías.

MATERIAL		RUGOSIDAD k [m]
Acero laminado.		0,000100
Acero revestido con material epoxi.		0,000100
Acero roblonado.		0,002000
Acero soldado.		0,000600
Aluminio		0,000040
Asbesto cemento.		0,000030
Asbesto cemento revestido con asfalto.		0,000002
Cobre.		0,000150
ERFV Epoxi - plástico reforzado con fibra de vidrio.		0,000005
Fundición.		0,000350
Fundición revestida con asfalto.		0,000120
Hierro dúctil revestido con mortero.		0,000100
Hierro forjado.		0,000075
Hierro galvanizado.		0,000150
Hormigón.		0,001200
Hormigón centrifugado.		0,000160
Hormigón con molde metálico.	mínimo	0,000300
	máximo	0,000500
Latón.		0,000150
Madera.	mínimo	0,000183
	máximo	0,000910
Mampostería de piedra.	mínimo	0,002000
	máximo	0,020000
Plomo		0,000080
Polietileno.		0,000003
PRFV Poliester - plástico reforzado con fibra de vidrio.	mínimo	0,000050
	máximo	0,000100
PVC Policloruro de vinilo.		0,000007
Vidrio.		0,000001

CUADRO SINÓPTICO

Resumen de las fórmulas del coeficiente de fricción f según el tipo de régimen y comportamiento hidráulico de la superficie.

RÉGIMEN	Comportamiento hidráulico de la SUPERFICIE	AUTOR	FÓRMULA
LAMINAR	Sin limitación.	<i>Se deduce comparando con la expresión de</i> Hagen - Poiseuille	$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{Re \sqrt{f}}{64}$ o $f = \frac{64}{Re}$
TURBULENTO	Lisa	Von Kármán-Prandtl	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (Re \sqrt{f}) - 0,8$
	Rugosa	Von Kármán-Prandtl	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{k} + 1,14$
	Transición lisa - rugosa	Colebrook - White	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \left[\frac{1}{D/k} + \frac{9,35}{Re \sqrt{f}} \right]$

10.5. Zona crítica.

La zona crítica se refiere al rango de trabajo de las tuberías a presión donde el número de Reynolds Re toma valores comprendidos dentro del intervalo:

$$2000 < Re < 4000 \text{ a } 5000$$

En el límite superior corresponde particularmente:

$Re = 4000 \rightarrow$ Si la tubería funciona hidráulicamente como lisa.

$Re = 5000 \rightarrow$ Si la rugosidad relativa de la tubería es $k/D = 0,05$ ($D/k = 20$).

La línea que define más precisamente esa delimitación superior, responde a la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = - 5,82 \log (Re \sqrt{f}) + 21,89 \tag{174}$$

El movimiento en la mencionada zona es de transición y muy inestable, dependiendo de varios factores que causan que el tipo de régimen pueda ser laminar o turbulento, no alcanzándose a predecir razonablemente cual de ellos ocurrirá.

El paso del régimen laminar al turbulento responde a un proceso gradual que comienza con alteraciones y agitaciones del movimiento sobre el eje de la tubería y sus adyacencias, debido a que en ese sector se establecen las mayores velocidades, pero manteniéndose en principio una corona circular con régimen laminar entre las paredes del tubo y la región central turbulenta. Si se continúa aumentando la velocidad media U , el espesor de la corona circular proseguirá disminuyendo hasta desaparecer totalmente cuando se llegue a la turbulencia total del escurrimiento.

En condiciones de especial cuidado sobre las instalaciones se puede obtener el régimen laminar con valores del número de Reynolds muy superiores a $Re_{crítico} = 2000$, pero ante la acción de una perturbación, como por ejemplo una vibración (puede llegar a ser inclusive de origen acústico), el régimen se modifica pasando a ser de tipo turbulento.

Dentro de la zona crítica, y para números de Reynolds levemente mayores a 2000, el escurrimiento se caracteriza por periodos cortos de régimen laminar seguidos alternativamente con régimen turbulento, plasmándose la transición de forma progresiva.

Ese fenómeno se denomina intermitencia y tiene su aclaración y justificación con el siguiente ejemplo:

- a) Sea una tubería cilíndrica, de diámetro pequeño y conectada a un reservorio líquido de nivel constante que descarga libremente al ambiente. Ver *Figura 96* (se desprecia la pérdida de energía localizada por embocadura, lo que implica que el empalme reservorio-tubería es abocinado).

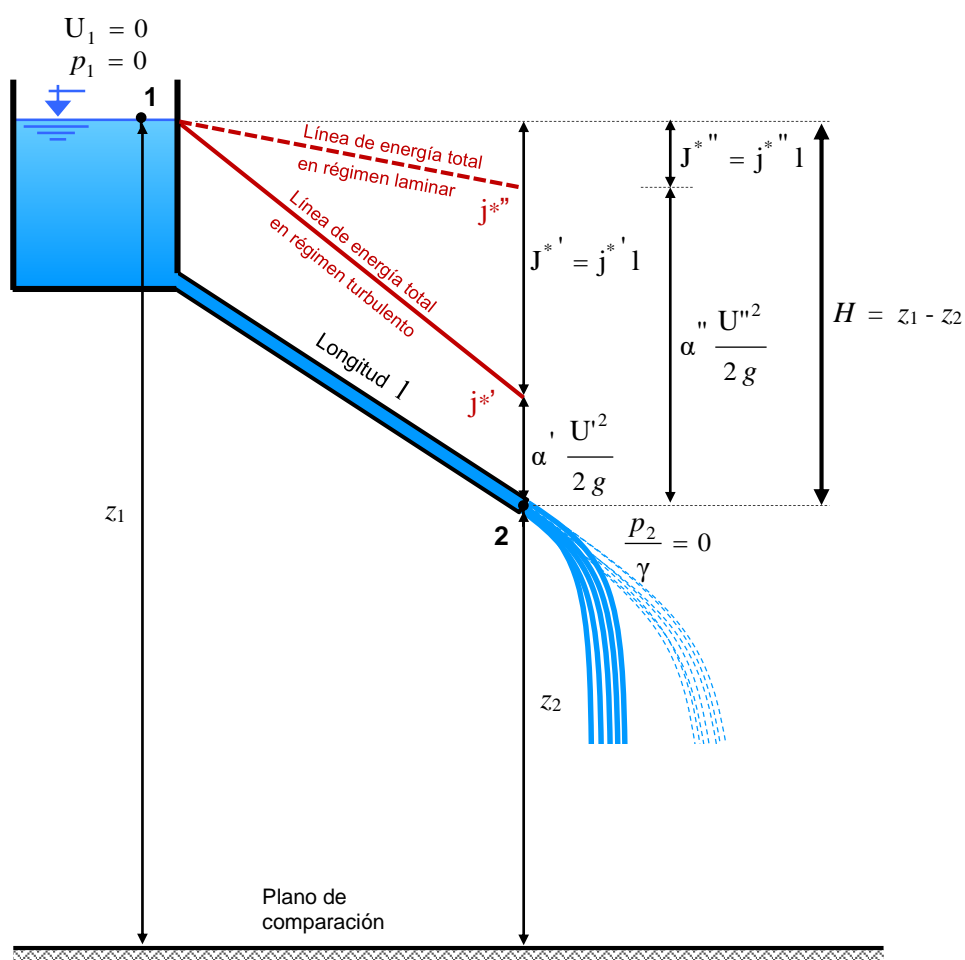


Figura 96 – Ejemplo del fenómeno de intermitencia.

- b) El desnivel constante H , existente entre el punto 1 (nivel de la superficie libre del reservorio) y el punto 2 (salida del líquido de la tubería) se transforma dividiéndose proporcionalmente en dos partes:
- Pérdida de energía general J^* a lo largo de la tubería (resulta ser numéricamente igual a la pérdida de carga J por tratarse en este caso de un tubo cilíndrico).
 - Energía cinética en la desembocadura $\alpha U^2 / 2g$.

Por consiguiente:

$$H = J^* + \alpha \frac{U^2}{2g} = cte. \quad (175)$$

O bien:

$$H = j^* l + \alpha \frac{U^2}{2g} = cte. \quad (176)$$

c) Descripción de las características del movimiento durante un lapso en el cual el escurrimiento se produce con régimen:

- Turbulento.
 - Primeramente se supone que el análisis se efectúa en un determinado instante en el cual la circulación corresponde a un régimen de tipo turbulento.
 - La pérdida de energía $J^{**} = j^{**} l$ es proporcional a la velocidad media al cuadrado U^2 [ver la ecuación (105) de Darcy - Weisbach], y resulta ser de mayor valor que si se tratara de un régimen laminar.
 - Si el desnivel H permanece constante ($H = cte.$), entonces se tiene que ante el aumento de la pérdida $J^{**} = j^{**} l$ debe indefectiblemente disminuir la velocidad media U' a fin de dar cumplimiento con el condicionante fijado por la ecuación (175).
 - El menor valor que adquiere la velocidad media U' hace que se reduzca en consecuencia el número de Reynolds Re .
 - Ese decremento que sufre el número de Reynolds Re trae como resultado que el régimen, originalmente turbulento, pase a ser laminar.
- Laminar.
 - Del último paso correspondiente al punto anterior, se concluyó que el régimen en ese instante es laminar debido a la transformación turbulento - laminar ocurrida en la circunstancia descripta.
 - En esas condiciones, la pérdida de energía pasa a ser proporcional a la 1ª potencia de la velocidad media U^1 [ver la ecuación (146) de Hagen - Poiseuille], y por ese efecto se reduce su magnitud a J^{**} .
 - A fin que se respete el requisito indicado por la ecuación (175), la reducción de la pérdida de energía se compensa necesariamente con un incremento de la velocidad media desde U' a U'' .
 - La coyuntura anterior produce un aumento en el número de Reynolds Re .
 - Ese mayor valor que experimenta el número de Reynolds Re provoca que el régimen, anteriormente de tipo laminar, se modifique nuevamente pasando a ser turbulento.

d) El fenómeno de cambio de régimen continúa indefinidamente, repitiéndose el proceso de forma intermitente.

En función de todos los fundamentos precedentemente esgrimidos, referentes a la inestabilidad e intermitencia del escurrimiento cuando se cumple $2000 < Re < 4000$ a 5000 , se concluye que basado en esos mismos argumentos resulta por demás atinado y recomendable que los proyectistas, en sus diseños y cálculos, eviten que el funcionamiento hidráulico de las tuberías se plasme dentro de la denominada zona crítica.

11. DIAGRAMAS UNIVERSALES DE H. ROUSE Y L. MOODY.

La resolución de la fórmula de Darcy - Weisbach en los regímenes turbulentos resulta ser por demás complicada cuando se debe recurrir necesariamente y de manera complementaria a la ecuación de resistencia, según se trate de:

- Tuberías lisas → ecuación (161) de Von Kármán - Prantl.
- Tuberías rugosas → ecuación (165) de Von Kármán - Prantl.
- Transición lisa - rugosa → ecuación (173) de Colebrook - White.

En cualquiera de la tres situaciones no es sencillo ni práctico el cálculo analítico del coeficiente de fricción f , ya que las expresiones a considerar son todas ecuaciones del tipo implícitas.

Para dar una solución de viabilidad relativamente sencilla al problema se han creado diversos gráficos, entre los que se encuentran como más trascendentes los diagramas de H. Rouse (Figura 97) y L. Moody (Figura 98), en los cuales se han volcado las ecuaciones señaladas.

La estructura básica de los dos diagramas es muy similar y para abordar integralmente la problemática de los escurrimientos a presión, se les han añadido en ambos casos la ecuación que representa el coeficiente de rugosidad en régimen laminar $f = 64/Re$ (154), la cual resulta de compatibilizar la fórmula de Hagen - Poiseuille (46) con la de Darcy - Weisbach (105). Además, también está indicada la línea que separa la zona de comportamiento hidráulico como tubería rugosa de la de transición lisa - rugosa:

$$\frac{Re \sqrt{f}}{D/k} = 200$$

En contraposición a la metodología que fundamenta el análisis mediante la utilización de fórmulas empíricas, los diagramas en cuestión posibilitan efectuar un adecuado cálculo hidráulico de tuberías en base al denominado criterio racional.

Si bien la actual disponibilidad de excelentes programas digitales hace perder sentido práctico al cálculo mediante la utilización de gráficos, es importante rescatar de los diagramas universales su valioso alcance pedagógico, ya que en ellos se resumen e integran toda la teoría moderna de los escurrimientos a presión.

El cálculo, en cualquiera de sus opciones, involucra la intervención de seis variables a saber:

J	Pérdida de energía total.
Q	Gasto o caudal.
D	Diámetro.
L	Longitud.
ν	Viscosidad cinemática.
k	Rugosidad.

Para lograr una satisfactoria resolución de los problemas que se plantean en los escurrimientos a presión, además de requerir el correspondiente diagrama universal, es necesario el empleo de los siguientes fundamentos como herramientas complementarias de cálculo:

- Ecuación de continuidad.
- Fórmula de Darcy - Weisbach.

Las características individuales de cada uno de los dos diagramas se resumen a continuación:

a) Diagrama de H. Rouse.

Hunter Rouse (Estadounidense 1906-1996) integró en un solo gráfico las fórmulas que conforman la resistencia al escurrimiento en régimen turbulento [ecuaciones (161), (165) y (173)] y régimen laminar [ecuación (154)], ajustando el diagrama que anteriormente había elaborado Nikuradse como consecuencia de sus experiencias a partir de rugosidades generadas artificialmente con granos de arena adheridos a las paredes de la tubería. Esa tarea se desarrolló en el año 1942 y fue publicada al año siguiente a través de un informe de la Universidad de Iowa - EEUU.

Los ejes principales están compuestos por:

- Abscisa: $Re \sqrt{f}$

Escala: logarítmica.

Sentido positivo: izquierda → derecha.

- Ordenada: $\frac{1}{\sqrt{f}}$

Escala: aritmética.

Sentido positivo: arriba → abajo.

Además cuenta con otros dos ejes complementarios constituidos por:

- Abscisa: Re

Escala: logarítmica.

Sentido positivo: izquierda → derecha.

- Ordenada: f

Escala: -----

Sentido positivo: abajo → arriba.

La ecuación (165) de Von Kármán - Prandtl, correspondiente a tuberías hidrodinámicamente rugosas, se representan a través de un conjunto de líneas en función de la inversa de la rugosidad relativa D/k , para distintos valores de la misma, oscilantes entre:

$$20 < \frac{D}{k} < 200.000$$

El diagrama permite obtener soluciones hidráulicas en los siguientes casos particulares:

- Zona crítica.
Tomando como hipótesis las experiencias de Nikuradse puede resolver analíticamente el problema hidráulico, aunque como ya se ha indicado anteriormente, no es aconsejable el funcionamiento de las tuberías en ese estado.
- Tuberías con secciones de forma distinta a las circulares.
En base a la introducción del concepto de radio hidráulico a desarrollar en el punto 12 y tomando ciertos recaudos restrictivos, permite el cálculo de tuberías de diferentes morfologías transversales.

Ver *Figura 97*.

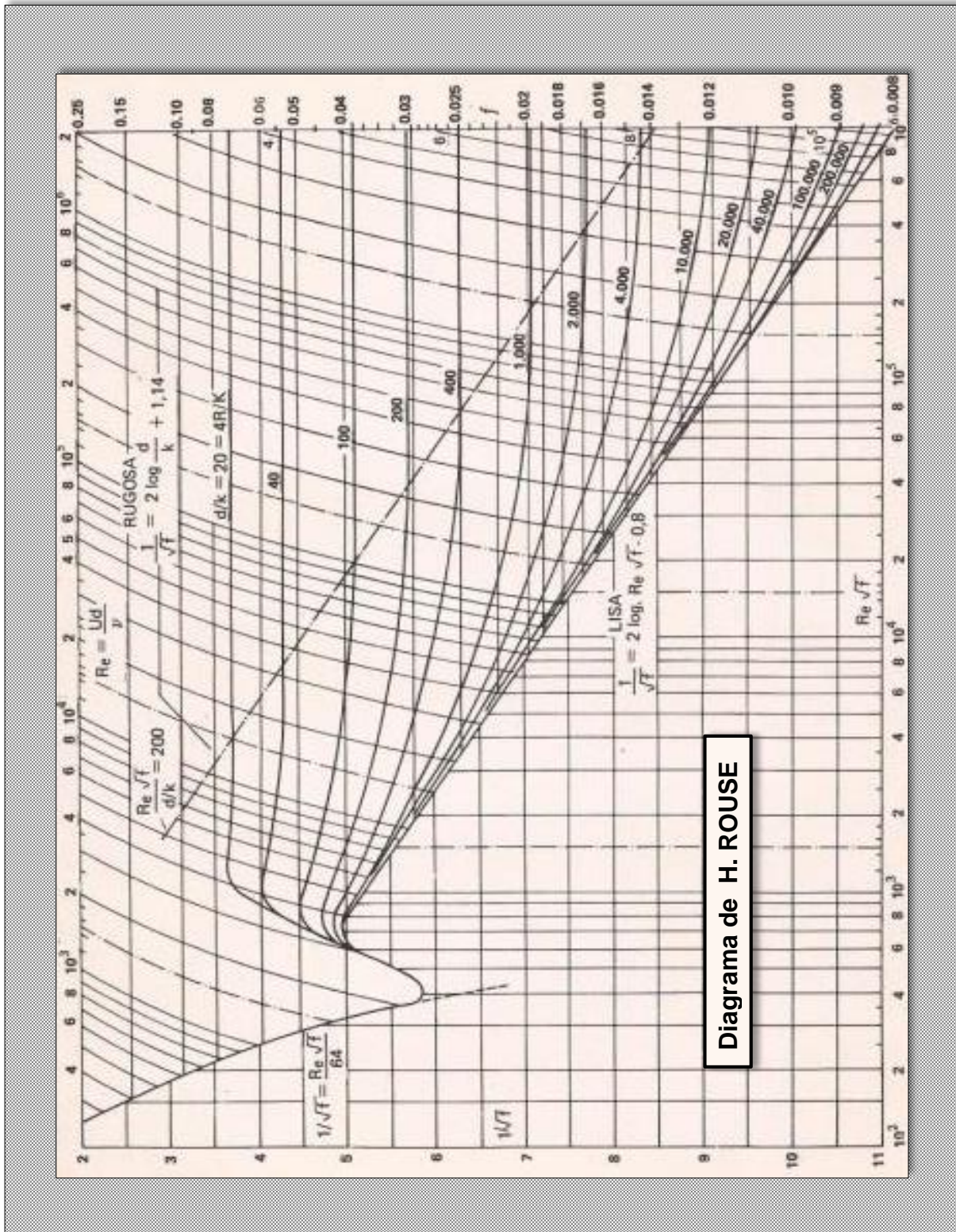


Diagrama de H. ROUSE

Figura 97 – Diagrama de H. Rouse.

b) Diagrama de L. Moody.

Lewis Ferry Moody (Estadounidense 1880-1950), siendo profesor de Princeton – EEUU y teniendo previo conocimiento del trabajo desarrollado por Hunter Rouse, confeccionó en 1944 otro gráfico similar en estructura y apariencia, pero con algunas modificaciones, al que denominó *diagrama más conveniente*.

Adoptó como ejes únicos y principales a:

- Abscisa: Re

Escala: logarítmica.

Sentido positivo: izquierda → derecha.

- Ordenada: f

Escala: logarítmica.

Sentido positivo: abajo → arriba.

Las líneas que caracterizan al escurrimiento en régimen turbulento del tipo tubería rugosa, se representan como función directa de la rugosidad relativa k/D , para valores que abarca el intervalo:

$$0,000001 < \frac{k}{D} < 0,05$$

La zona crítica considerada por Moody corresponde a números de Reynolds entre 2.000 y 4.000, excluyendo directamente la posibilidad como funcionamiento hidráulico.

Ver *Figura 98*.

En el siguiente cuadro se resumen los tipos de cálculos que se pueden abordar con los diagramas universales:

TIPO DE CÁLCULO	INCÓGNITA	DATOS
VERIFICACIÓN	Pérdida de energía J	D Diámetro Q Gasto o caudal l Longitud k Rugosidad absoluta v Viscosidad cinemática
	Gasto o caudal Q	D Diámetro J Pérdida de energía l Longitud k Rugosidad absoluta v Viscosidad cinemática
DIMENSIONADO	Diámetro D	Q Gasto o caudal J Pérdida de energía l Longitud k Rugosidad absoluta v Viscosidad cinemática

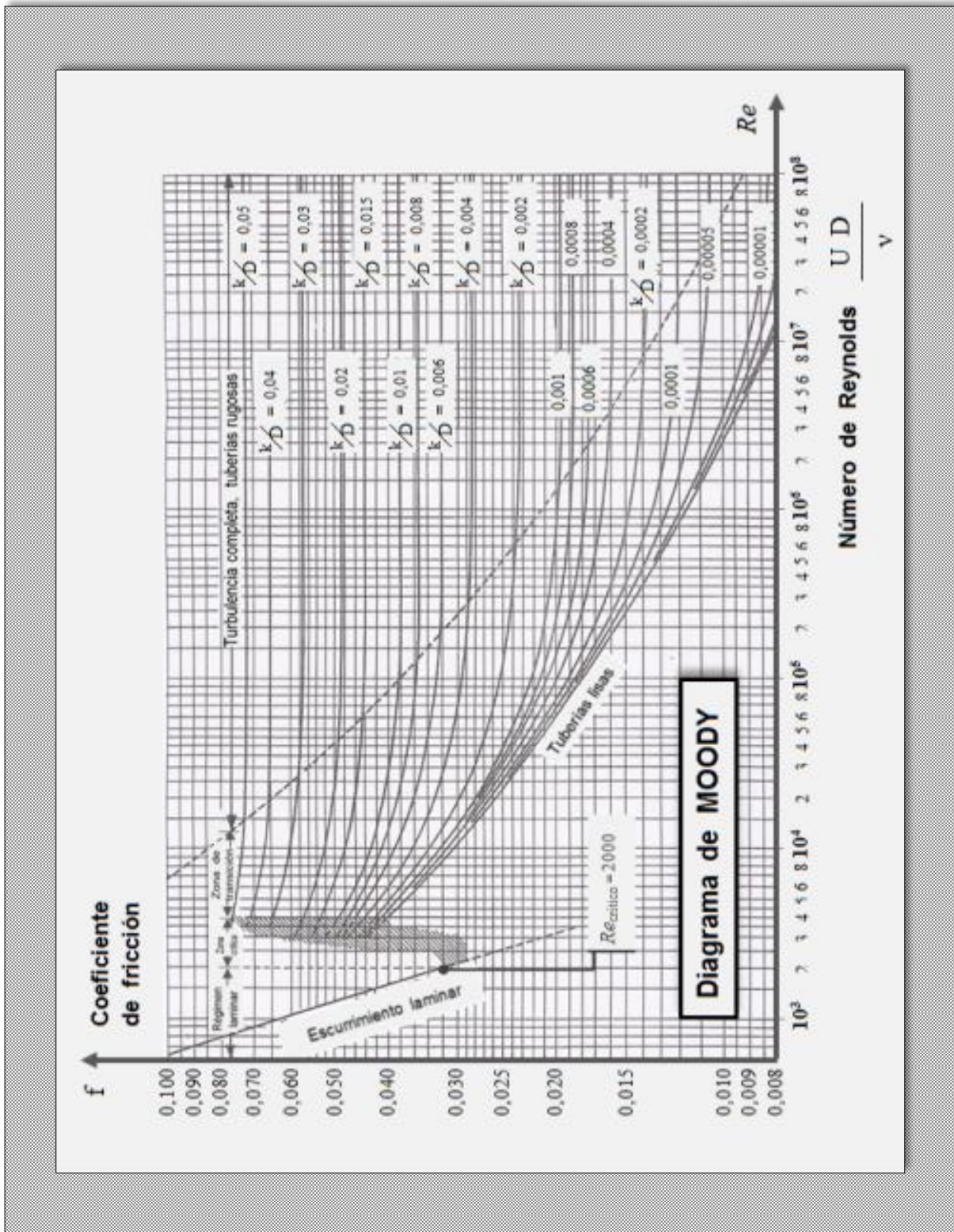


Figura 98 – Diagrama de L. Moody.

11.1. Uso del diagrama de H. Rouse.

Se presentan tres problemas típicos que son la base para resolver otros más complejos.

11.1.1. Cálculo de la pérdida de energía.

Incógnita:		J - PÉRDIDA DE ENERGÍA				
Datos:		Q	D	l	k	v
Cálculos previos	1º) Velocidad media U.					
	$U = \frac{4 Q}{\pi D^2}$					
	2º) Número de Reynolds Re.					
	$Re = \frac{U D}{v}$					
Cálculos previos	3º) Inversa de la rugosidad relativa.					
	$\frac{D}{k}$					
	4º) Coeficiente de fricción f.					
Del diagrama de H. Rouse: $\left. \begin{matrix} D/k \\ Re \end{matrix} \right\} \rightarrow f$						
(ver Figura 99)						
Cálculo final <i>Resolución directa</i>	La <u>pérdida de energía J</u> se determina aplicando la expresión de Darcy – Weisbach:					
$J = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2 g}$						

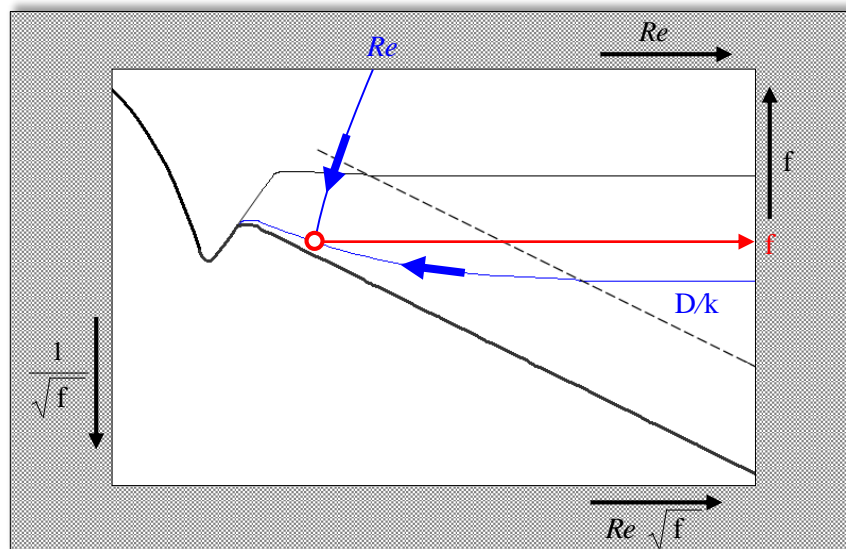


Figura 99 – Diagrama de H. Rouse. Coeficiente de fricción en el cálculo de pérdida de energía.

11.1.2. Cálculo del gasto o caudal.

Incógnita: Q - GASTO o CAUDAL	
Datos: D J l k v	
Cálculos previos	<p>1º) Producto entre el número de Reynolds Re y la raíz cuadrada del coeficiente de fricción f.</p> $Re \sqrt{f} = \frac{U D}{v} \sqrt{\frac{J}{l} \frac{D}{U^2} \frac{2g}{U^2}} = \frac{D^{3/2}}{v} \sqrt{2g \frac{J}{l}}$ <p>2º) Inversa de la rugosidad relativa.</p> $\frac{D}{k}$ <p>3º) Coeficiente de fricción f.</p> <p>Del diagrama de H. Rouse: $\left. \begin{array}{l} D/k \\ Re \sqrt{f} \end{array} \right\} \rightarrow f$ (ver <i>Figura 100</i>)</p> <p>4º) Velocidad media U.</p> $U = \sqrt{\frac{2g J D}{f l}}$
Cálculo final <i>Resolución directa</i>	<p>El <u>gasto o caudal Q</u> se determina aplicando la ecuación de continuidad:</p> $Q = U \frac{\pi D^2}{4}$

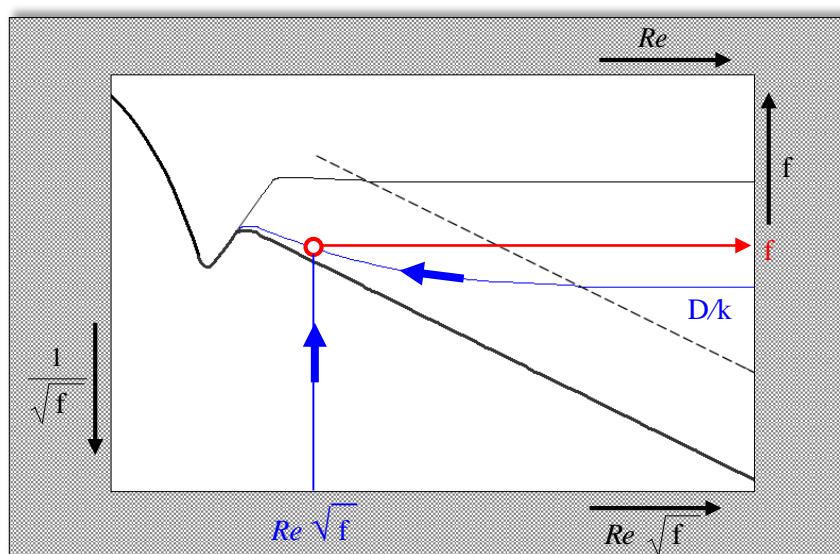


Figura 100 – Diagrama de H. Rouse. Coeficiente de fricción en el cálculo de gasto o caudal.

11.1.3. Cálculo del diámetro.

CÁLCULOS COMPLEMENTARIOS

- Diámetro D a la 5^{ta} potencia partiendo de la expresión de Darcy – Weisbach en función del gasto Q .

$$J = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} = f \frac{1}{D} \frac{1}{2g} \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4} \Rightarrow$$

$$D^5 = Q^2 \frac{1}{J} \frac{8}{g \pi^2} f$$

$cte.1$

$$cte.1 = Q^2 \frac{1}{J} \frac{8}{g \pi^2} \quad (177)$$

$$D^5 = cte.1 f \quad (178)$$

- Número de Reynolds Re en función del gasto Q .

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{4 Q}{\pi D^2} \frac{D}{\nu} = \frac{4 Q}{\pi \nu} \frac{1}{D}$$

$cte.2$

$$cte.2 = \frac{4 Q}{\pi \nu} \quad (179)$$

$$Re = cte.2 \frac{1}{D} \quad (180)$$

Incógnita:	D - DIÁMETRO
Datos:	Q J l k v cte.1 - Constante 1 (de la ecuación 177) cte.2 - Constante 2 (de la ecuación 179)

<p>Cálculo resolutivo</p> <p><i>Empleando un procedimiento iterativo mediante la aplicación de aproximaciones sucesivas.</i></p>	<p>1° Aproximación:</p>
	<p>a) Coeficiente de fricción $f^{(1)}$.</p> <p>El proyectista adopta un coeficiente de fricción $f^{(1)}$ cualquiera.</p> <p>Valor recomendable de inicio: $e/0,015$ y $0,025$.</p> <p>b) Diámetro $D^{(1)}$.</p> $D^{(1)} = \sqrt[5]{cte.1 f^{(1)}}$ <p>c) Número de Reynolds $Re^{(1)}$.</p> $Re^{(1)} = cte.2 \frac{1}{D^{(1)}}$ <p>d) Inversa de la rugosidad relativa $D^{(1)}/k$.</p> <p>e) Coeficiente de fricción $f^{(2)}$.</p> <p>Del diagrama de H. Rouse: $D^{(1)}/k$ } $\rightarrow f^{(2)}$ (ver Figura 101) $Re^{(1)}$ }</p> <p>f) Verificación:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Si $f^{(1)} \approx f^{(2)} \Rightarrow$ Diámetro $D = D^{(1)}$ - Si $f^{(1)} \neq f^{(2)} \Rightarrow$ Se continúa con una 2° Aproximación.

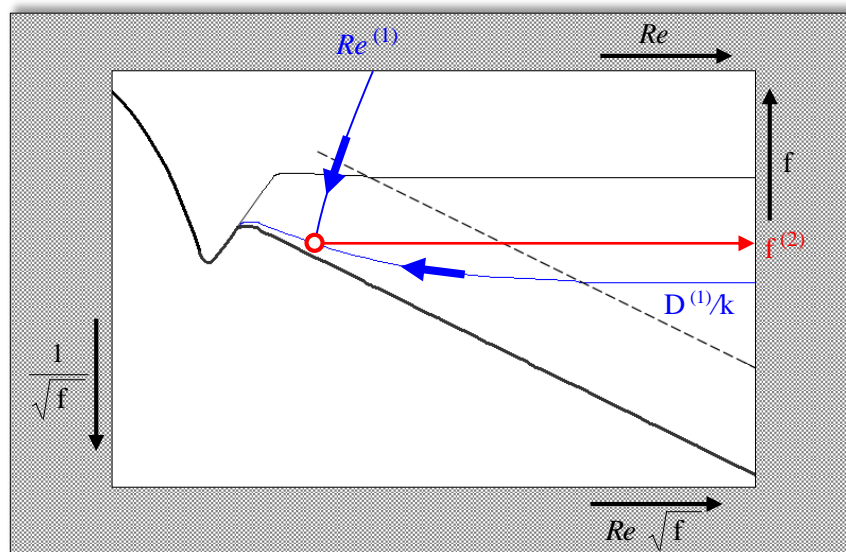


Figura 101 – Diagrama de H. Rouse. Coeficiente de fricción en el cálculo del diámetro.

<p>Cálculo resolutivo</p> <p><i>Empleando un procedimiento iterativo mediante la aplicación de aproximaciones sucesivas.</i></p>	2° Aproximación:
	<p>a) Coeficiente de fricción $f^{(2)}$.</p> <p>El proyectista adopta el valor del coeficiente de fricción $f^{(2)}$ determinado en el punto e) de la 1° Aproximación.</p> <p>b) Diámetro $D^{(2)}$.</p> $D^{(2)} = \sqrt[5]{cte.1 f^{(2)}}$ <p>c) Número de Reynolds $Re^{(2)}$.</p> $Re^{(2)} = cte.2 \frac{1}{D^{(2)}}$ <p>d) Inversa de la rugosidad relativa $D^{(2)}/k$.</p> <p>e) Coeficiente de fricción $f^{(3)}$.</p> <p style="text-align: center;">Del diagrama de H. Rouse: $\left. \begin{array}{l} D^{(2)}/k \\ Re^{(2)} \end{array} \right\} \rightarrow f^{(3)}$</p> <p>f) Verificación:</p> $\left\{ \begin{array}{l} - \text{ Si } f^{(2)} \approx f^{(3)} \Rightarrow \text{Diámetro } D = D^{(2)} \\ - \text{ Si } f^{(2)} \neq f^{(3)} \Rightarrow \text{Se procede con otra} \end{array} \right.$ <p style="text-align: right;"><i>3° Aproximación.</i></p> <p>-----</p> <p>-----</p>
	Enésima Aproximación:
	<p>Así sucesivamente se opera hasta determinar el diámetro D definitivo con un pequeño error admisible asumido de antemano por el proyectista.</p> <p>En general es un procedimiento matemático que resulta converger rápidamente a la solución definitiva del problema mediante el empleo de muy pocos tanteos (corrientemente no más de 3).</p>

La Figura 102 muestra una síntesis gráfica del diagrama universal de H. Rouse, en el cual se encuentra condensada toda la teoría moderna de los escurrimientos a presión.

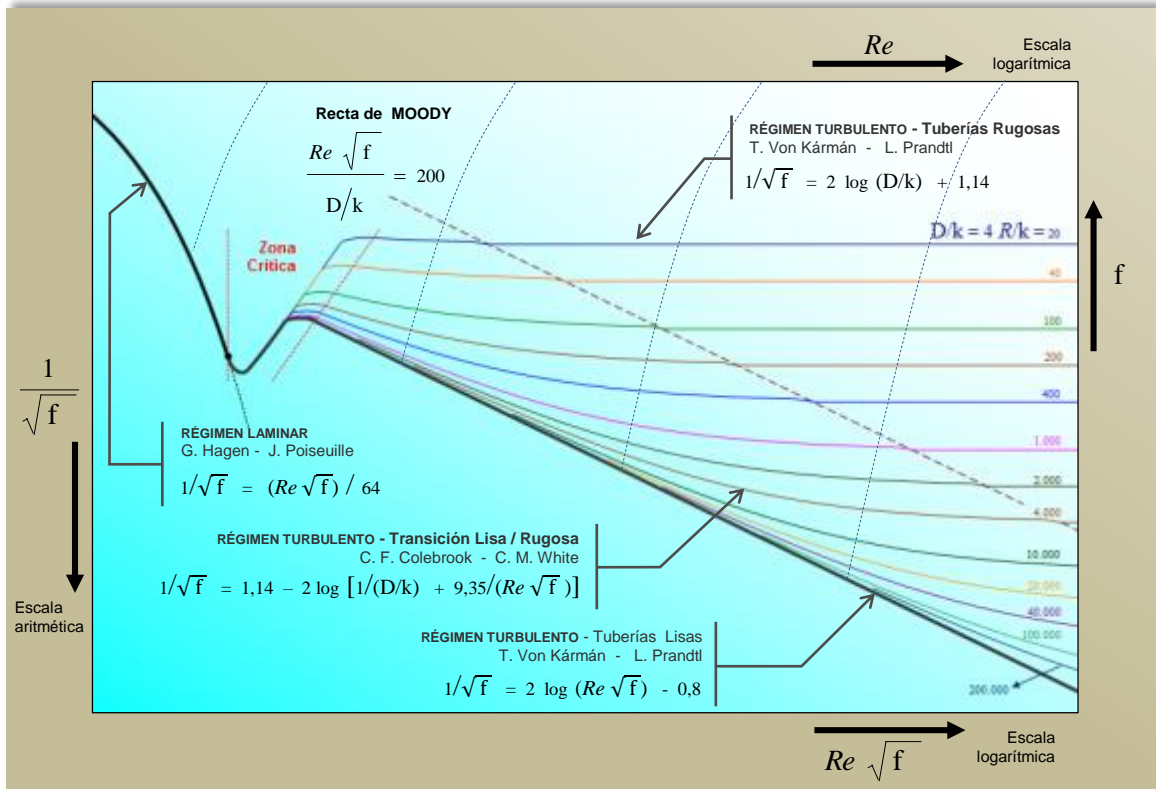


Figura 102 – Síntesis del diagrama universal de H. Rouse.

12. TUBERÍAS DE SECCIÓN NO CIRCULAR.

Si por un conducto cerrado de sección transversal de cualquier forma (ver Figura 103), se desplaza un fluido a presión con movimiento permanente y uniforme en régimen turbulento, entonces la distribución de las isoataquias (líneas que unen puntos de idéntica velocidad) se van a disponer de distinta manera a las analizadas con secciones circulares y simultáneamente también van a variar los esfuerzos tangenciales con relación a las mismas.

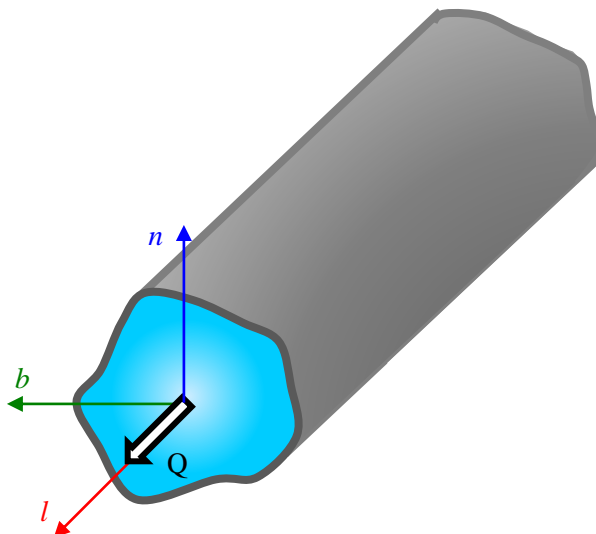


Figura 103 – Escurrimiento a presión a través de una sección cualquiera.

En efecto, cuando se trataba de secciones circulares, las líneas isotaquias, además de señalar la igualdad de velocidad en todos sus puntos, también indicaban similar valor de la tensión tangencial. Y así se cumple particularmente en todo el contorno de la circunferencia sólida, donde el esfuerzo tangencial es el mismo, ya que los gradientes transversales de velocidad son idénticos (*Figura 104*).

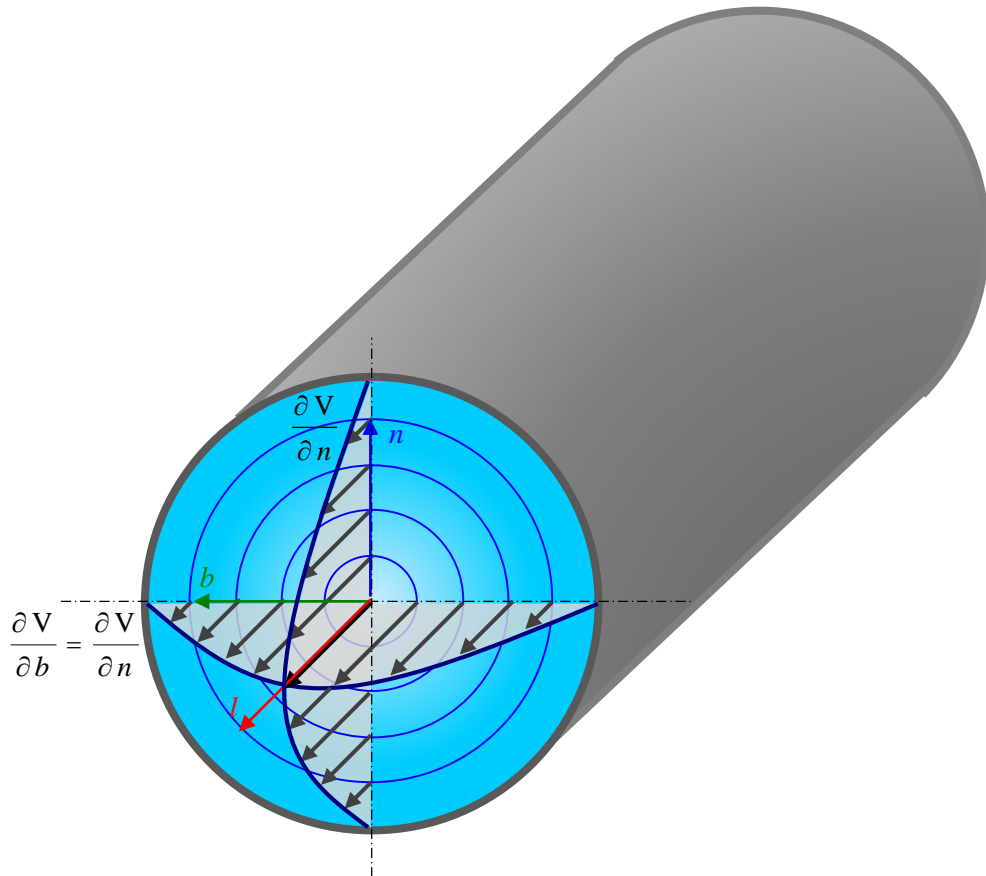


Figura 104 – Escorrimento a presión a través de una sección circular.

Ahora bien, cuando cambia la forma de la sección, las líneas de igual velocidad dejan de tener la simetría que evidenciaban en el caso circular.

12.1. Conductos de sección rectangular.

Si por ejemplo la sección transversal de un conducto es de forma rectangular, las isotaquias dejan de ser circulares y adoptan las formas indicadas en la *Figura 105*, donde se pueden apreciar distintos valores de los gradientes transversales entre las paredes horizontales y verticales.

Para el estudio de este caso se propone una simplificación que supone, sin aportar mayor error a la solución del problema, considerar un esfuerzo de corte medio para todo el contorno, ya que de hecho deja de ser constante τ_0 . Entonces, con la hipótesis planteada, se tiene de la ecuación (158):

$$\tau_{0m} = \frac{\rho U^2 f}{8} \tag{181}$$

Donde el coeficiente de fricción f es distinto al que correspondería si se tratara de una sección circular.

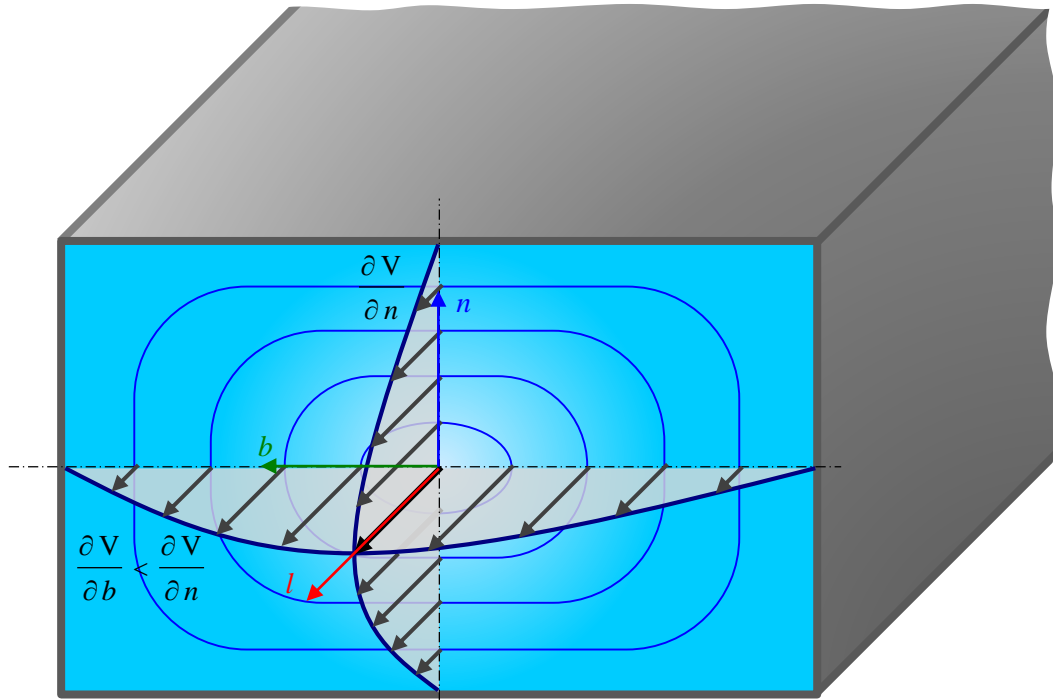


Figura 105 – Escorrimento a presión a través de una sección rectangular.

Siendo el movimiento permanente y uniforme, se plantea el equilibrio de las fuerzas sobre el eje longitudinal de la tubería. Ver previamente la Figura 106.

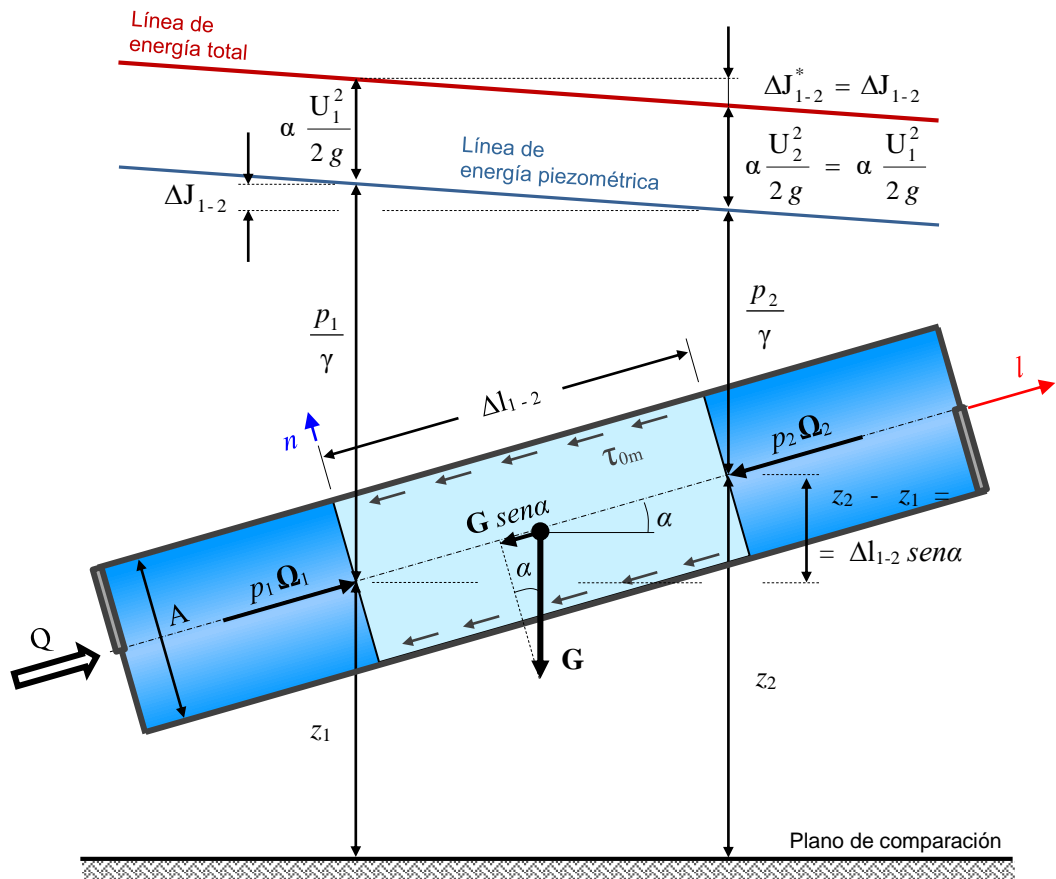


Figura 106 – Fuerzas actuantes en una tubería rectangular con régimen turbulento.

Desarrollando la ecuación de equilibrio dinámico aplicada al eje longitudinal baricéntrico l :

$$p_1 \Omega - p_2 \Omega - \tau_{0m} p \Delta l_{1-2} - G \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (182)$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (F_p)_l & (F_r)_l & (F_m)_l & (F_i)_l \end{array}$$

Siendo:

Ω sección transversal ($\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = A B = cte.$).

p perímetro de la sección transversal Ω .

$$\Omega (p_1 - p_2) - \tau_{0m} p \Delta l_{1-2} - \gamma \Omega (z_2 - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{0m} p \Delta l_{1-2} = \gamma \Omega \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right]$$

Finalmente despejando τ_{0m} :

$$\tau_{0m} = \underbrace{\gamma \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right]}_{\Delta J_{1-2}} \frac{1}{\Delta l_{1-2}} \frac{\Omega}{p} = \gamma \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} \frac{\Omega}{p}$$

Se define:

$$\frac{\Omega}{p} = R$$

El cociente entre la sección Ω y el perímetro p , tal como se definió, se denomina *radio medio hidráulico* R , y si bien sus unidades son de longitud, el mismo corresponde simplemente a una relación matemática útil para el cálculo pero que no representa ninguna magnitud tangible en la realidad.

Así se obtiene:

$$\tau_{0m} = \gamma j R \quad (183)$$

Igualando (183) con (181):

$$\frac{\rho U^2 f}{8} = \gamma j R$$

Finalmente:

$$\Rightarrow J = \frac{\rho U^2 f l}{\gamma 2 4 R}$$

\downarrow
 g

$$J = f \frac{1}{4 R} \frac{U^2}{2 g}$$

(184)

La estructura de la ecuación (184) es idéntica a la fórmula de Darcy - Weisbach si se supone $4 R = D$. La misma es de singular utilidad para ser aplicada con los criterios racionales fundados en la moderna teoría fluidodinámica, y además ajustada y corroborada por la experimentación. Su gran ventaja radica, no solo en su racionalidad, sino que además posibilita su aplicación con criterio universal, es decir a un gran número de fluidos (incluye los newtonianos) con distintas condiciones de temperatura y en tuberías de secciones diversas.

Para el caso de una tubería circular, se tiene:

$$R = \frac{\Omega}{p} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\pi D} = \frac{D}{4} \Rightarrow$$

$$4 R = D \tag{185}$$

Adviértase que el diagrama de Rouse permite el análisis de otras formas de secciones distintas a la circular, ya que adopta la inversa de la rugosidad relativa D/k igualada a $4R/k$.

Si bien todo lo expresado tiene una apariencia exacta, realmente esta solución es de características aproximadas, dado que la distribución de velocidades en los contornos de la sección y el esfuerzo de corte son distintos. No obstante es aplicable el uso de esta metodología, mientras que la relación ancho - altura de la sección del conducto no se aparte en demasía de la circular.

12.2. Escorrimento turbulento entre placas paralelas.

La distribución de velocidades es de tipo logarítmica e igual en todo el ancho B de la placa (ver *Figura 107*).

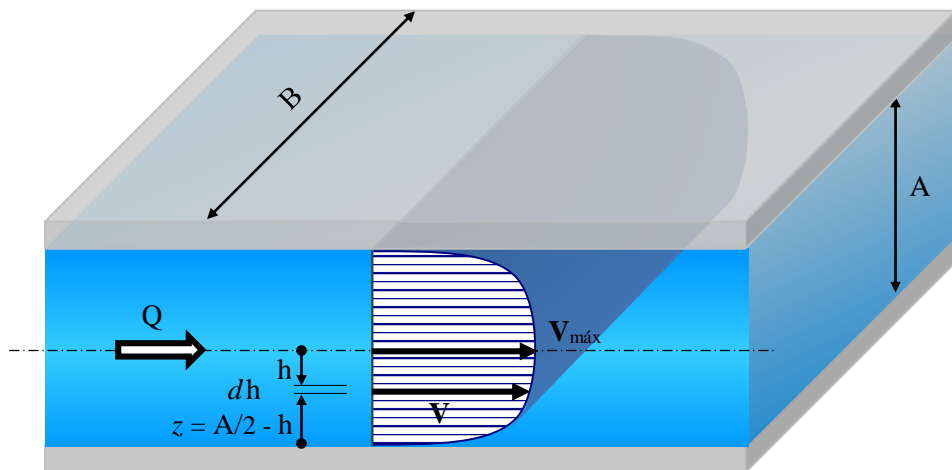


Figura 107– Distribución de velocidades en un escurrimento entre placas con régimen turbulento.

El escurrimiento se produce bajo régimen turbulento, y según sea su comportamiento hidrodinámico, corresponderá la respectiva ecuación distributiva de velocidad. A saber:

- Placa hidráulicamente lisa. → ecuación (138)
- Placa hidráulicamente rugosa. → ecuación (147)

a) Placa de contornos lisos.

$$Q = \int_{\Omega} dQ = \int_{\Omega} V d\Omega = 2 \int_0^{A/2} V B dh \quad (186)$$

Reemplazando (138) en (186):

$$Q = \int_{\Omega} V d\Omega = 2 \int_0^{A/2} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} z \right) + 5,5 \right] B dh$$

\downarrow
 V
 ecuación (138)

\downarrow
 $d\Omega$

Donde:

$$z = A/2 - h$$

$$Q = 2 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{A/2} \left[2,5 \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\frac{A}{2} - h \right) \right) + 5,5 \right] dh$$

$$Q = 2 \cdot 2,5 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{A/2} \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right) dh + 2 \cdot 2,5 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{A/2} \ln \left(\frac{A}{2} - h \right) dh + 2 \cdot 5,5 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{A/2} dh$$

Resolviendo las integrales:

$$Q = 5B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right) \frac{A}{2} + 5B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{A}{2} \ln \left(\frac{A}{2} - 1 \right) + 11B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{A}{2}$$

$$Q = \underbrace{A B}_{\Omega} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right) + 2,5 \ln \left(\frac{A}{2} - 1 \right) + 5,5 \right]$$

$$Q = 2 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{A/2} \left[2,5 \ln\left(\frac{A}{2} - h\right) - 2,5 \ln k + 8,5 \right] dh$$

Resolviendo la integral:

$$Q = 5 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{A}{2} \left(\ln \frac{A}{2} - 1 \right) - 5 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln k \frac{A}{2} + 17 B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{A}{2}$$

$$Q = \underset{\substack{\downarrow \\ \Omega}}{A B} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \left(\ln \frac{A}{2} - 1 \right) - 2,5 \ln k + 8,5 \right]$$

Entonces:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{A}{2} - 2,5 - 2,5 \ln k + 8,5 \right]$$

$$U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln \frac{A/2}{k} + 6 \right] \tag{189}$$

Introduciendo (158) en (189) y simplificando:

$$\psi = \psi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8}} \left[2,5 \left(\ln \frac{A}{k} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0,69}}{\ln 2}} \right) + 6 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0,35}}{\frac{1}{\sqrt{8}}} \left[2,5 \left(\ln \frac{A}{k} - 0,69 \right) + 6 \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,35 \left[2,5 \ln \frac{A}{k} - \underset{\substack{\downarrow \\ 4,27}}{1,73} + 6 \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,88 \ln \frac{A}{k} + 1,49$$

O en función del logaritmo decimal:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,02 \log \frac{A}{k} + 1,49 \tag{190}$$

Las ecuaciones de resistencia (189) y (190) para corrientes turbulentas entre placas paralelas son consecuencia de una deducción teórica, donde aparecen coeficientes que al igual que en el caso de las tuberías se deben adecuar con datos de escurrimientos reales. La inexistencia de probada experimentación sobre el tema, no permite realizar un adecuado ajuste de las mismas.

13. FÓRMULAS EMPÍRICAS.

El uso de los diagramas universales de resistencia permite el cálculo del escurrimiento de fluidos a través de conductos a presión, aplicando los estudios científicos del movimiento realizados por parte de varios investigadores dentro de lo que se denomina el *método racional*. Su principal característica es la generalidad con el que se pueden resolver los problemas ya que admite arribar a la solución teniendo en cuenta simultáneamente las distintas propiedades y características que se pueden presentar:

- Tipo de fluido.
- Particularidad del material.
- Dimensiones geométricas.
- Régimen de escurrimiento.

El problema del cálculo de las tuberías a presión data de mucho tiempo antes de la aparición de los diagramas universales (Rouse - 1942 y Moody - 1944), ya que la necesidades de los investigadores direccionaba su preocupación en dar una correlación práctica entre los caudales Q y las pérdidas de carga J que en lograr un análisis teórico del comportamiento de la mecánica de los fluidos. De esta manera surgieron y se desarrollaron las denominadas *fórmulas empíricas*, debido a su fundamento puramente experimental.

Si bien cada una de ellas tiene un campo restringido a las condiciones en que se realizaron los ensayos de laboratorio, no son menos precisas que las utilizadas por el método racional, siempre que se respeten sus límites de aplicación.

Dado que las expresiones empíricas son consecuencia de un análisis estadístico y no teórico, por lo general no son dimensionalmente homogéneas, y puesto que el material no se representa por su rugosidad sino por coeficientes o exponentes que afectan a la ecuación, entonces para cada sistema de unidades de medida utilizado se deberán ajustar los mismos.

Así se tienen particularmente las fórmulas monómicas, de singular importancia para el cálculo debido a su simplicidad. Su estructura general es del tipo:

$$J = cte.1 \frac{Q^{cte.2}}{D^{cte.3}} \tag{191}$$

Donde:

- $cte.1$ función del material de la tubería.
- $cte.2$ y $cte.3$ exponentes de ajuste.

La expresión de Darcy - Weisbach cuenta con ese tipo de estructura:

$$J = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{8f}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{D^5} 1 \quad (192)$$

↓ cte.1
↗ cte.2
↘ cte.3

Comparando las ecuaciones (191) y (192), se obtienen las constantes:

$$\begin{cases} cte.1 = \frac{8f}{\pi^2 g} \\ cte.2 = 2 \\ cte.3 = 5 \end{cases}$$

Inicialmente, la ecuación de Darcy - Weisbach se solía expresar de la siguiente manera:

$$J = 8gb \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (193)$$

↓

El término indicado, compuesto de tres factores, se modificó con el tiempo para englobarse en un solo multiplicador que pasó a denominarse *coeficiente de fricción f*.

Así planteado el contexto, el problema consistía en la determinación del coeficiente *b* o *f*, según se aplique la ecuación (193) o la (105), para lo cual se recurrió a su estudio por vía de la experimentación. Las características de las fórmulas desarrolladas para proceder al cálculo han ido evolucionado en función del tiempo, pudiéndose establecer tres periodos marcados por los investigadores Henry Darcy y Osborne Reynolds:

PERIODO	COMPONENTES DEL COEFICIENTE <i>b</i> o <i>f</i>
1- Anterior a Darcy.	Se adopta simplemente un valor de <i>b</i> constante. (<i>b</i> = <i>cte.</i>)
2- Entre Darcy y Reynolds.	Se considera la influencia de la rugosidad <i>k</i> de las paredes.
3- Posterior a Reynolds.	Se adicionan las características viscosas del fluido <i>v</i> simultáneamente con la rugosidad <i>k</i> .

A continuación se hace referencia a algunas de las fórmulas empíricas más trascendentes, o bien por su valor histórico o por su aplicabilidad vigente:

1º) Dupuit - 1855.

Se cita solo como referencia histórica.

$$j = \frac{1}{400} \frac{Q^2}{D^5} \quad (194)$$

Acotaciones:

- Sistema de unidades → M.K.S.
- Fluido → agua
- Régimen → turbulento

2º) Darcy - 1857.

$$j = 6,48 \left(\alpha_D + \frac{\beta_D}{D} \right) \frac{Q^2}{D^5} \quad (195)$$

Acotaciones:

- Sistema de unidades → M.K.S.
- Fluido → agua
- Régimen → turbulento

Tabla 3 Coeficientes de la fórmula de Darcy.

MATERIAL		COEFICIENTE	
		α_D	β_D
Hierro fundido	Nuevo	0,0002535	0,00000647
	En servicio	0,0005070	0,00001294

3º) Levy - 1867.

$$j = \frac{1}{2} \alpha_L^2 D \left(1 + 2,12 \sqrt{D} \right) U^2 \quad (196)$$

Acotaciones:

- Sistema de unidades → M.K.S.
- Fluido → agua
- Régimen → turbulento

Tabla 4 Coeficientes de la fórmula de Levy.

MATERIAL		COEFICIENTE
		α_L
Hierro fundido	Nuevo	36,4
	En servicio	20,5

4°) Manning - Strickler - Gaukler - 1890.

Su origen data de los estudios efectuados por Antoine de Chézy (Francés 1718-1798) sobre los escurrimientos en canales y luego se extrapoló la idea para ser aplicada al cálculo de las tuberías a presión.

$$j = \frac{10,29}{K_S^2} \frac{Q^2}{D^{16/3}} \tag{197}$$

Donde:

$$K_S = 1/n$$

K_S coeficiente de Strickler.

n coeficiente de rugosidad de Manning.

Acotaciones:

- Sistema de unidades → M.K.S.
- Fluido → agua
- Régimen → turbulento

Tabla 5 Coeficientes de Strickler.

MATERIAL	COEFICIENTE
	K_S
Acero con remaches	60
Acero galvanizado	115
Cobre	150
Fundición	70
Hormigón liso	90
Hormigón tosco	60
Latón	150
Mampostería común	70
Polietileno	150
PVC	150

5°) Lang - 1905.

$$j = \frac{1}{2g} \left(0,02 + \frac{0,002}{\sqrt{U D}} \right) \frac{U^2}{D} \tag{198}$$

Acotaciones:

- Sistema de unidades → M.K.S.
- Fluido → agua
- Régimen → turbulento
- Material → h° fundido

6°) Hazen - Williams - 1905.

Es una fórmula definida por los investigadores Allen Tracy Hazen (Estadounidense 1869-1930) y Gardner Stewart Williams (Estadounidense 1866-1904), la cual ha obtenido una singular difusión en el ámbito del continente americano. Es una expresión probada en base a numerosas experiencias que incluyeron en sus análisis distintos tipos de materiales de uso frecuente en la época, la que ordenada de acuerdo al sistema de unidades internacional se escribe:

$$U = 0,355 C_{H-W} D^{0,63} j^{0,54}$$

Por razones prácticas la fórmula se enuncia a través de j en función de Q , C_{H-W} y D .

$$j = \frac{10,670}{C_{H-W}^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D^{4,87}} \quad (199)$$

Acotaciones:

- Sistema de unidades → M.K.S.
- Fluido → agua
- Temperatura → 15,5° C (60°F)
- Régimen → Turbulento

El coeficiente C_{H-W} representa a la rugosidad del material de la conducción, cuyos valores se fueron ampliando y actualizando con el advenimiento de los nuevos productos que se crearon en la industria de las tuberías. La fórmula es aplicable muy satisfactoriamente en escurrimientos de agua con régimen plenamente turbulento para diámetros comprendidos entre 50 y 1800 *mm*, y también se la suele utilizar en la siguiente versión (ver ecuación 200).

$$j = \frac{1}{\left(0,278 C_{H-W}\right)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D^{4,87}} \quad (200)$$

En el vasto campo de aplicaciones al saneamiento básico, es decir aquel dirigido a la provisión de agua, colectores cloacales y pluviales, e inclusive numerosos desagües industriales, las tuberías erogan en general agua a temperatura ambiente, por lo que en la mayoría de estos casos la variación de la viscosidad resulta insignificante en términos prácticos. De allí que la fórmula de Hazen y Williams carece de la consideración de los efectos viscosos y reduce la necesidad de cálculos iterativos complejos.

Tabla 6 Coeficientes de Hazen y Williams.

MATERIAL		COEFICIENTE
		C_{H-W}
Acero con remaches	Nuevo	111
	10 años de servicio	96
	20 años de servicio	87
Acero soldado	Nuevo	119
	5 años de servicio	111
	10 años de servicio	104
	20 años de servicio	92
Aluminio		130
Asbesto cemento		135
Cobre		130

Tabla 6 Coeficientes de Hazen y Williams. (continuación)

MATERIAL		COEFICIENTE
		C_{H-W}
Fundición	Nuevo	130
	5 años de servicio	119
	10 años de servicio	111
	20 años de servicio	96
	30 años de servicio	87
Hormigón	Centrifugado	135
	Encofrado madera	120
	Encofrado metálico	140
Madera		120
Plomo		135
Polietileno		150
PRFV		145
PVC		150

7°) Scimemi - 1925.

Es una expresión monómica desarrollada por el profesor Ettore Scimemi de la Universidad de Padova, en la cual tanto el coeficiente como los exponentes dependen del material. La forma clásica en que suele expresarse la fórmula es:

$$Q = C_S j^{m_1} D^{m_2} \quad (201)$$

A fin de hacerla comparable con las demás expresiones precedentes, se la designa a partir de la pérdida de carga unitaria:

$$j = \frac{1}{C_S^{1/m_1}} \frac{Q^{1/m_1}}{D^{m_2/m_1}} \quad (202)$$

Acotaciones:

- Sistema de unidades → M.K.S.
- Fluido → agua
- Régimen → turbulento

Tabla 7 Coeficientes y exponentes de Scimemi.

MATERIAL	COEFICIENTE	EXPONENTE	
	C_S	m_1	m_2
Acero soldado	29,7	0,53	2,75
Acero sin costura	36,4	0,55	2,59
Hierro fundido	35,0	0,54	2,62
Asbesto cemento	50,5	0,56	2,68
Hormigón liso	33,3	0,53	2,75

La fórmula de Scimemi ha sido analizada y ajustada con especial empeño para las tuberías de asbesto-cemento, por lo que para ese caso la expresión adquiere singular precisión y toma la siguiente forma:

$$j = 9,84 \cdot 10^{-4} \frac{Q^{1,786}}{D^{4,786}} \quad (203)$$

Respecto a la fórmula de Darcy - Weisbach y a los efectos de simplificar el cálculo en régimen turbulento dada la complejidad en la resolución previa complementaria que presenta la estructura de la ecuación de Colebrook - White para determinar el coeficiente de fricción f , se han desarrollado una gran cantidad de expresiones alternativas directas explícitas de mucho más sencilla solución, entre las que se destacan:

- Altshul - 1968.

$$(1) f = 0,11 \left[\left(\frac{k}{D} \right) + \left(\frac{68}{Re} \right) \right]^{1/4} \quad (204)$$

$$(2) f = \left\{ -1,8 \log \left[\frac{Re}{0,135 Re \left(\frac{k}{D} \right) + 6,5} \right] \right\}^{-2} \quad (205)$$

Límites:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^3 &\leq Re \leq 1 \cdot 10^8 \\ 1 \cdot 10^{-6} &\leq k/D \leq 5 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

- S. W. Churchill - 1973.

$$f = 8 \left\{ \left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \left[\left(2,457 \ln \frac{1}{(7/Re)^{0,9} + 0,27(k/D)} \right)^{16} + \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16} \right]^{-3/2} \right\}^{1/12} \quad (206)$$

Límites:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^3 &\leq Re \leq 1 \cdot 10^8 \\ 1 \cdot 10^{-6} &\leq k/D \leq 5 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

- P. K. Swamee y A. K. Jain - 1976.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right] \right\}^{-2} \quad (207)$$

Límites:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 10^3 &\leq Re \leq 1 \cdot 10^8 \\ 1 \cdot 10^{-6} &\leq k/D \leq 1 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

- N. H. Chen - 1979.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,7065} - \frac{5,0452}{Re} \log \left(\frac{(k/D)^{1,1098}}{2,8257} + 5,8506 Re^{-0,8981} \right) \right] \right\}^{-2} \quad (208)$$

Límites:

$$4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 1 \cdot 10^8$$

$$1 \cdot 10^{-6} \leq k/D \leq 5 \cdot 10^{-2}$$

- G. F. Round - 1980.

$$f = \left\{ -1,8 \log \left[0,27(k/D) + \frac{6,5}{Re} \right] \right\}^{-2} \quad (209)$$

- M. Shacham - 1980.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,7} - \frac{5,02}{Re} \log \left(\frac{(k/D)}{3,7} + \frac{14,5}{Re} \right) \right] \right\}^{-2} \quad (210)$$

Límites:

$$4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 1 \cdot 10^8$$

$$1 \cdot 10^{-6} \leq k/D \leq 5 \cdot 10^{-2}$$

- D. I. Barr - 1981.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,7} + \frac{4,518 \log(Re/7)}{Re \left(1 + 0,0345 Re^{0,52} (k/D)^{0,7} \right)} \right] \right\}^{-2} \quad (211)$$

- D. Pavlov - 1981.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,7} + \left(\frac{6,81}{Re} \right)^{0,9} \right] \right\}^{-2} \quad (212)$$

Límites:

$$4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 1 \cdot 10^8$$

- D. J. Zigrang y N. D. Sylvester - 1982.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,7} - \frac{5,02}{Re} \log \left(\frac{(k/D)}{3,7} - \frac{5,02}{Re} \log \left(\frac{(k/D)}{3,7} + \frac{13}{Re} \right) \right) \right] \right\}^{-2} \quad (213)$$

- S. E. Haaland - 1983.

$$f = \left\{ -1,8 \log \left[\left(\frac{(k/D)}{3,7} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re} \right] \right\}^{-2} \quad (214)$$

Límites:

$$4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 1 \cdot 10^8$$

$$1 \cdot 10^{-6} \leq k/D \leq 5 \cdot 10^{-2}$$

- J. O. Guerrero Angulo - 1995.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,71} + \frac{G}{Re^T} \right] \right\}^{-2} \quad (215)$$

$$\text{- Si: } 4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 1 \cdot 10^5 \rightarrow \begin{cases} G = 4,555 \\ T = 0,8764 \end{cases}$$

$$\text{- Si: } 1 \cdot 10^5 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6 \rightarrow \begin{cases} G = 6,732 \\ T = 0,9104 \end{cases}$$

$$\text{- Si: } 3 \cdot 10^6 \leq Re \leq 1 \cdot 10^8 \rightarrow \begin{cases} G = 8,982 \\ T = 0,9300 \end{cases}$$

- G. Manadilli - 1997.

$$f = \left\{ -2 \log \left[\frac{(k/D)}{3,7} + \frac{95}{Re^{0,983}} - \frac{96,82}{Re} \right] \right\}^{-2} \quad (216)$$

Límites:

$$5235 \leq Re \leq 1 \cdot 10^9$$

- Avci y Kagaroz - 2009.

$$f = 6,4 \left\{ \ln Re - \ln \left[1 + 0,01 Re (k/D) (1 + 10 (k/D)^{1/2}) \right] \right\}^{-2,4} \quad (217)$$

Como comentario particular, se puede observar que la ecuación propuesta por J. O. Guerrero Angulo privilegia la precisión en el cálculo, ya que ajusta convenientemente los coeficientes de la fórmula según correspondan a cada uno de los tres intervalos en los que ha subdividido el número de Reynolds Re .

En general todas las ecuaciones anteriormente mencionadas corresponden a aproximaciones y regresiones de valores calculados a partir de métodos implícitos, como por ejemplo el de Newton - Raphson - Fourier. Todo ello a excepción de la expresión de Avci y Kagaroz, la cual ha sido desarrollada en base a datos obtenidos experimentalmente en laboratorio.

14. VARIACIÓN DE LA RUGOSIDAD.

La rugosidad k de los materiales con los que se construyen las tuberías es consecuencia de las siguientes causas:

- Naturaleza del material.
- Calidad de fabricación.
- Dimensión de las tuberías (separación de juntas).
- Técnicas de ensamble.
- Mantenimiento de los conductos.
- Presencia de revestimientos.

Un aspecto muy significativo en la magnitud que adquiere la rugosidad k es el concerniente a la edad del servicio prestado, en efecto, la evolución de la misma con respecto al transcurso del tiempo tiene su raíz en los procesos físicos, químicos y biológicos que conforman el concepto denominado comúnmente *envejecimiento*.

En general las tuberías de material con base plástica o cemento portland no presentan mayores modificaciones en su rugosidad con relación al periodo de uso. Solamente en tuberías conformadas con dovelas de madera suele disminuir la aspereza de la pared con el servicio, ya que se forma una pequeña película lisa.

La mayor dificultad se manifiesta en las tuberías metálicas de origen ferroso, por los efectos continuos y variables de la corrosión, la que se produce en base a las características propias del material en cuestión, las propiedades del líquido circulante y las condiciones del ambiente que rodea la tubería.

A medida que transcurre el tiempo la corrosión hace que se incremente la rugosidad k , ya que su acción sobre la superficie es despereja y provoca la irregularidad de la misma. Adicionalmente puede ocurrir la disposición progresiva de sustancias contenidas en el fluido circulante, formando incrustaciones adheridas que reducen el diámetro hidráulico (ver *Figura 108*).

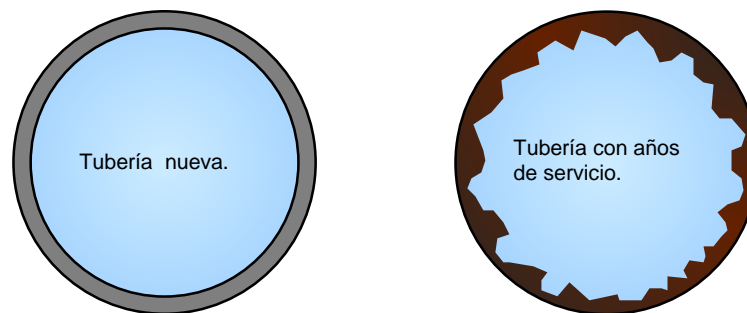


Figura 108– Evolución de la rugosidad con el tiempo de servicio.

Consecuentemente con el correr del tiempo la capacidad de circulación en las tuberías de acero y hierro fundido sin revestimiento va disminuyendo.

Varios investigadores han propuesto fórmulas que interpretan la evolución de la rugosidad k con el tiempo, de las cuales se rescata la propuesta por Genijew para agua como líquido circulante, por ajustarse adecuadamente a la realidad y estar formada por una estructura matemática simple de variación lineal. Ver ecuación (218).

$$k_t = k_0 + \alpha t \quad (218)$$

Donde:

- k_t rugosidad en t años [m].
- k_0 rugosidad de la tubería nueva [m].
- α coeficiente de envejecimiento [$m/año$].
Ver *Tabla 8*.
- t tiempo de servicio [$años$].

Tabla 8 **Coefficiente de envejecimiento en acueductos de material ferroso.**

PROPIEDADES DEL AGUA	COEFICIENTE DE ENVEJECIMIENTO α [$m/año$]		
	Mínimo	Máximo	Medio
<ul style="list-style-type: none"> - Poco contenido mineral que no origina corrosión. - Pequeña cantidad de materia orgánica y solución de hierro. 	0,005	0,055	0,025
<ul style="list-style-type: none"> - Poco contenido mineral que origina corrosión. - Contiene < 3 <i>mgr/l</i> de materia orgánica y hierro en solución. 	0,055	0,180	0,070
<ul style="list-style-type: none"> - Genera fuerte corrosión con escaso contenido de cloruros y sulfatos (< de 100 a 150 <i>mgr/l</i>). - Contenido de hierro > 3 <i>mgr/l</i>. 	0,180	0,400	0,200
<ul style="list-style-type: none"> - Genera corrosión con gran contenido de cloruros (> de 500 a 700 <i>mgr/l</i>). - Muy impura con gran cantidad de materia orgánica. 	0,400	0,600	0,510
<ul style="list-style-type: none"> - Contiene importantes cantidades de carbonato con pequeña dureza permanente. - Con residuo denso de 2000 <i>mgr/l</i>. 	0,600	> 1,000	-----

También existen tablas en las cuales se puede obtener de forma directa la rugosidad k para distintas edades del material. O bien, como por ejemplo se muestra en la *Tabla 9*, la misma permite cuantificar la evolución de la rugosidad en el tiempo indirectamente a través del coeficiente de Hazen y Williams de conductos de hierro fundido según sea el diámetro considerado.

Tabla 9 Coeficiente de Hazen y Williams en conductos de hierro fundido.

EDAD [años]	COEFICIENTE DE HAZEN Y WILLIAMS C_{H-W}										
	D i á m e t r o										
	4" 10 cm	6" 15 cm	8" 20 cm	10" 25 cm	12" 30 cm	14" 35 cm	16" 40 cm	18" 45 cm	20" 50 cm	24" 60 cm	30" 75 cm
0	130	130	130	130	130	130	130	130	130	130	130
5	117	118	119	120	120	120	120	120	120	120	121
10	106	108	109	110	110	110	111	112	112	112	113
15	96	100	102	103	103	103	104	104	105	105	106
20	88	93	94	96	97	97	98	98	99	99	100
25	81	86	89	91	91	91	92	92	93	93	94
30	75	80	83	85	86	86	87	87	88	89	90
35	70	75	78	80	82	82	83	84	85	85	86
40	64	71	74	76	78	78	79	80	81	81	82
45	60	67	71	73	75	76	76	77	77	78	78

Otra causa que influye en la alteración de la rugosidad de un conducto con relación al tiempo son las incrustaciones que se producen en tuberías de cualquier tipo de material cuando circula agua dura, es decir con alto contenido de sales, más concretamente carbonatos, bicarbonatos, sulfatos o nitratos de calcio o magnesio. En este caso se origina un problema más serio, ya que al aumento de la aspereza se le agrega una considerable disminución del diámetro interior. En estas situaciones se deben adoptar importantes márgenes de seguridad en el cálculo, o bien prever mantenimientos periódicos para la remoción de incrustaciones o sino realizar modificaciones en el agua mediante algún tratamiento de ablandamiento.

Por último, otros motivos menos frecuentes pero capaces de modificar la rugosidad en los conductos son:

- Erosión.
Se presenta cuando el líquido circulante lo hace a gran velocidad con arena en suspensión.
- Obstrucción.
Se produce por la presencia de barros u otros elementos que hacen disminuir la sección.
- Adherencias de origen biológico.
Se refiere a fijaciones de especies vegetales o animales en las paredes de las tuberías.

15. PÉRDIDA DE ENERGÍA LOCAL.

Las pérdidas de energía hidráulica locales, también conocidas como pérdidas secundarias o por accesorios, no se producen a lo largo del conducto de manera continua como ocurre con las pérdidas generales, sino que se focalizan particularmente en determinados sectores muy acotados. Las mismas se originan debido a las bruscas variaciones en la geometría de la tubería, las cuales causan importantes alteraciones en la dirección y/o módulo del vector velocidad de la corriente por la presencia de singularidades que modifican la uniformidad del escurrimiento.

En síntesis, las pérdidas generales se deben a las resistencias a lo largo de la tubería ejercidas por los esfuerzos tangenciales sobre la superficie de las paredes por motivo de la viscosidad y la rugosidad del contorno sólido, mientras que las pérdidas localizadas se gestan a partir de las resistencias de forma y por efecto de la separación de la capa límite, donde se generan zonas de vórtices o estelas (ver Figuras 109, 110 y 111).

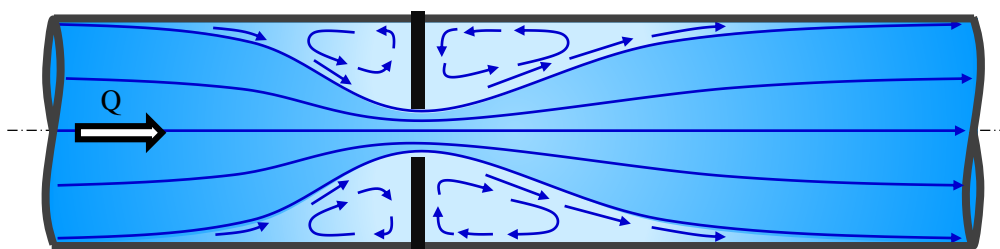


Figura 109 – Singularidad tipo placa - orificio en una tubería.

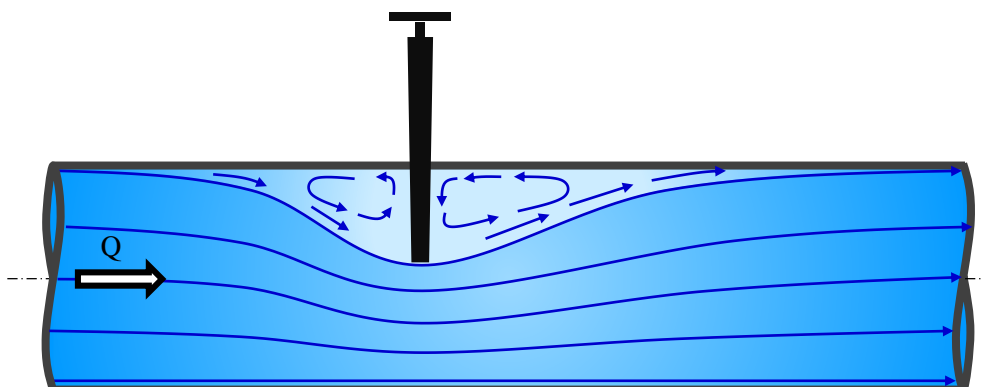


Figura 110 – Singularidad tipo válvula esclusa en una tubería.

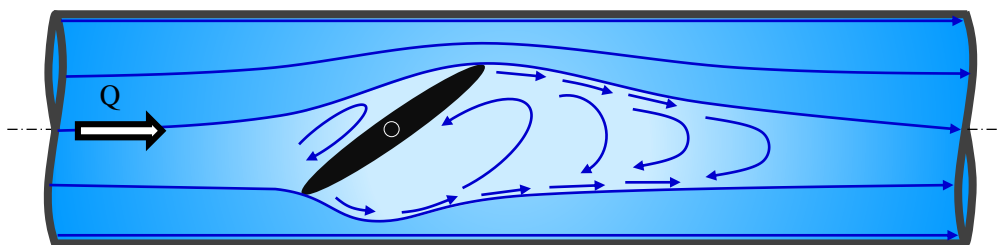


Figura 111 – Singularidad tipo válvula mariposa en una tubería.

De hecho, las pérdidas locales no se producen en una sección sino que se desarrollan en un tramo de la conducción de longitud prácticamente despreciable con relación al largo total de la tubería, y al igual que en las pérdidas generales, más que una pérdida de energía es una transformación de energía hidráulica en energía calórica por causa del rozamiento mecánico de las partículas fluidas con las estructuras sólidas que conforman la instalación.

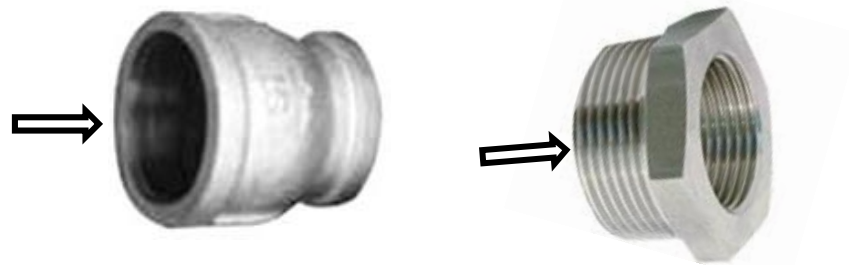
15.1. Resistencia de forma.

La resistencia de forma es el motivo del origen de las pérdidas de energía locales, y en la práctica se pueden mencionar los siguientes casos como ejemplos más comunes de particularidades que provocan las mismas:

- Cambio de sección.
 - Ensanchamiento o expansión.



- Estrechamiento o reducción.



- Cambio de dirección.
 - Codo.



- Curva.
45°



90°



180°



- Cambio simultáneo de sección y dirección.
 - Codo reductor.



- Ramal.

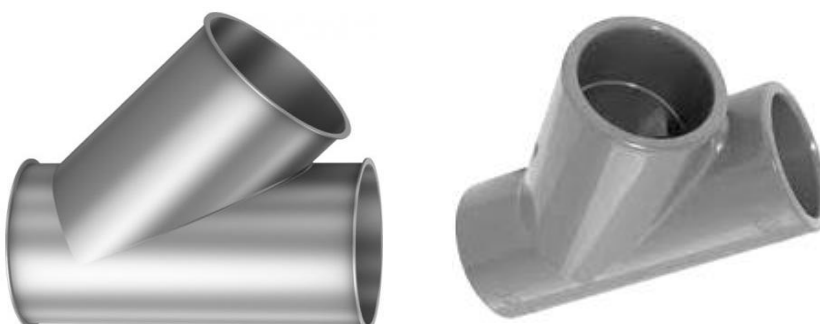
Tipo "T" - 90° - Igual diámetro.



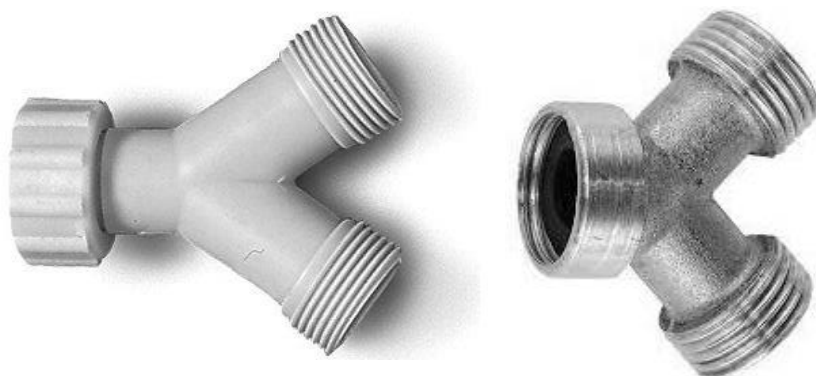
Tipo "T" - 90° - Distinto diámetro.



Tipo "Y" - 45°



Tipo "Y" - Simétrica



Cruces



- Intercalación de accesorios.

- Cupla.



- Entrerosca.



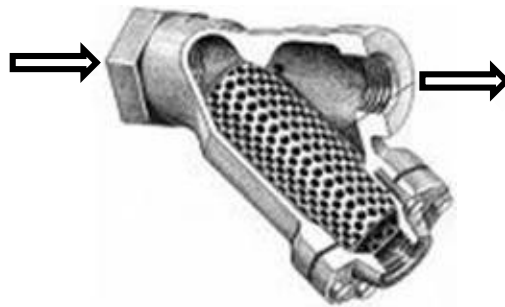
- Unión doble.



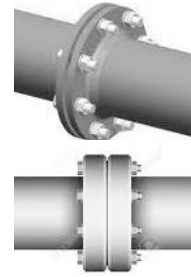
- Unión rápida.



- Filtro.



- Brida.



- Placa - orificio.



- Válvula.

Esclusa.



Esférica.



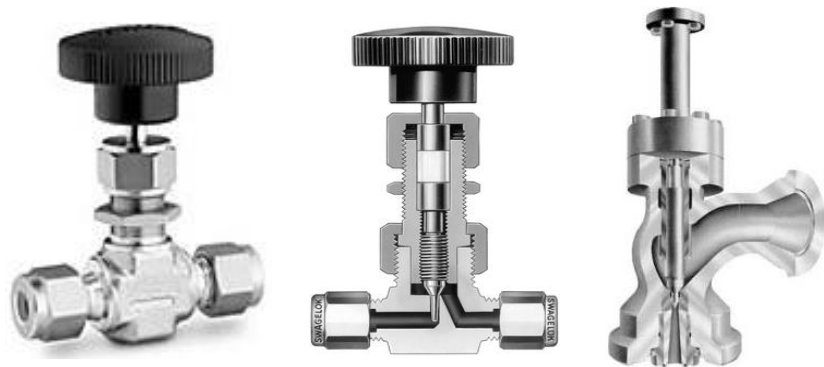
Globo.



Mariposa.



Aguja.



Retención.



Codo.



“Y”.



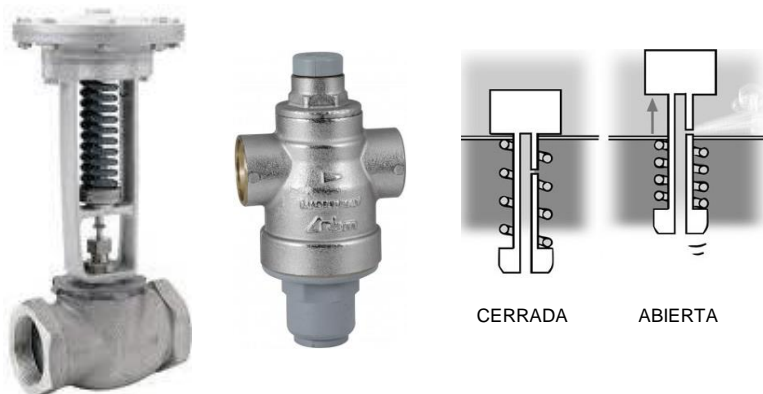
De pie.



Aire.



Alivio o presión.



- Intercalación de instrumentos.

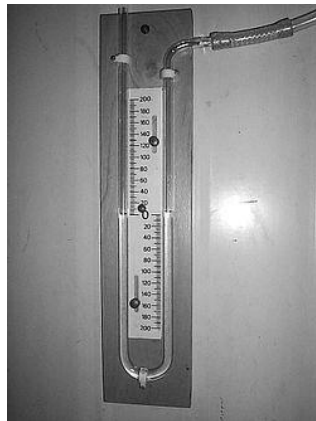
Caudalímetro.



Piezómetro.



Manómetro.



DE MERCURIO



TIPO BOURDON

En síntesis, se puede afirmar que las pérdidas de energía secundarias son consecuencia de la modificación súbita del vector velocidad, ya sea en su módulo y/o dirección, las cuales se gestan en los escurrimientos a presión por la presencia de singularidades en el recorrido que alteran la uniformidad del movimiento.

En algunos casos se las puede evaluar a partir de un análisis teórico, pero en general los valores de pérdidas localizadas se determinan de forma experimental. El modo de cuantificar la pérdida de energía localizada, tanto teórica como experimentalmente, resulta ser función directa de la energía cinética del fluido circulante, y a los efectos del cálculo, se utiliza una expresión del tipo:

$$J_{LOC.}^* = J_{LOC.} = K \frac{U^2}{2g} \quad (219)$$

K: Coeficiente de resistencia o de paso.

Valor que depende del número de Reynolds Re y de la forma de la singularidad.

Ver la justificación de la ecuación (219) mediante el empleo del análisis dimensional en el **ANEXO I** adjunto.

ANEXO I

Variables intervinientes para un accesorio o instrumento de forma fija:

- 1 - ρ Densidad o masa específica.
- 2 - U Velocidad media.
- 3 - D Diámetro.
- 4 - γJ^* Producto e/ peso específico y pérdida de energía.
- 5 - μ Viscosidad dinámica.

* Número de variables n : 5 (cinco)

Magnitudes fundamentales adoptadas:

- 1 - m Masa.
- 2 - l Longitud.
- 3 - t Tiempo.

* Número de magnitudes fundamentales: 3 (tres)

Función de la ley que interviene en el fenómeno en análisis:

$$f(\rho, U, D, \gamma J^*, \mu) = 0 \quad (220)$$

De la expresión (6-220) se puede definir otra ecuación adimensional:

$$\Pi = \rho^x U^y D^z (\gamma J^*)^u \mu^v \quad (221)$$

Dimensiones de la variables intervinientes:

$$|\rho| = M L^{-3} T^0$$

$$|U| = M^0 L T^{-1}$$

$$|D| = M^0 L T^0$$

$$|\gamma J| = M L^{-1} T^{-2}$$

$$|\mu| = M L^{-1} T^{-1}$$

La ecuación adimensional (221) descompuesta en sus respectivas magnitudes fundamentales resulta:

$$\left(M^0 L^0 T^0 \right) = \left(\frac{M}{L^3} \right)^x \left(\frac{L}{T} \right)^y \left(L \right)^z \left(\frac{M}{L T^2} \right)^u \left(\frac{M}{L T} \right)^v \quad (222)$$

A continuación se conforman 3 ecuaciones con 5 incógnitas (una por cada magnitud fundamental):

$$\text{Masa } M: \dots\dots + 1 x + 0 y + 0 z + 1 u + 1 v = 0$$

$$\text{Longitud } L: \dots - 3 x + 1 y + 1 z - 1 u - 1 v = 0$$

$$\text{Tiempo } T: \dots\dots 0 x - 1 y + 0 z - 2 u - 1 v = 0$$

El rango r de la matriz que compone el sistema de ecuaciones precedente es $r = 3$. Entonces:

$$* \text{ Número de parámetros adimensionales } (n - r): \dots\dots\dots 5 - 3 = 2 \text{ (dos)}$$

Adopción de las variables fijables:

γJ^* Producto e/ peso específico y pérdida de carga.

μ Viscosidad dinámica.

Conformación de los parámetros adimensionales:

- 1^{er} parámetro Π_1 . Reemplazando en la ecuación (221) por los valores:

$$x = x_1$$

$$y = y_1$$

$$z = z_1$$

$$u = 1$$

$$v = 0$$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \rho^{x_1} U^{y_1} D^{z_1} \gamma J^* \quad (223)$$

- 2^{do} parámetro Π_2 . Sustituyendo en la ecuación (221) por los valores:

$$\begin{aligned} x &= x_2 \\ y &= y_2 \\ z &= z_2 \\ u &= 0 \\ v &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi_2 = \rho^{x_2} U^{y_2} D^{z_2} \mu \quad (224)$$

Determinación de los parámetros adimensionales:

- a- Cálculo del parámetro Π_1 a partir de la ecuación (223).

Planteo de la ecuación dimensional:

$$\left| \Pi_1 \right| = (M L^3 T^0)^{x_1} (M^0 L T^{-1})^{y_1} (M^0 L T^0)^{z_1} (M L^1 T^{-2}) =$$

$$\left| \Pi_1 \right| = M^0 L^0 T^0$$

Desarrollo:

$$\text{Masa } M: \dots\dots + 1 x_1 + 0 y_1 + 0 z_1 + 1 = 0$$

$$\text{Longitud } L: \dots - 3 x_1 + 1 y_1 + 1 z_1 - 1 = 0$$

$$\text{Tiempo } T: \dots\dots 0 x_1 - 1 y_1 + 0 z_1 - 2 = 0$$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -3 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +1 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad (225)$$

Reemplazando los valores (225) en (223):

$$\Pi_1 = \rho^{-1} U^{-2} D^0 \gamma J^* =$$

$$\Pi_1 = \frac{\gamma J^*}{\rho U^2} \quad (226)$$

b- Cálculo del parámetro Π_2 a partir de la ecuación (224).

Planteo de la ecuación dimensional:

$$\left| \Pi_2 \right| = \left(M L^{-3} T^0 \right)^{x_2} \left(M^0 L T^{-1} \right)^{y_2} \left(M^0 L T^0 \right)^{z_2} \left(M L^{-1} T^{-1} \right) =$$

$$\left| \Pi_2 \right| = M^0 L^0 T^0$$

Desarrollo:

$$\text{Masa } M: \dots\dots + 1 x_2 + 0 y_2 + 0 z_2 + 1 = 0$$

$$\text{Longitud } L: \dots - 3 x_2 + 1 y_2 + 1 z_2 - 1 = 0$$

$$\text{Tiempo } T: \dots\dots 0 x_2 - 1 y_2 + 0 z_2 - 1 = 0$$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -3 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \\ z_2 = -1 \end{cases} \quad (227)$$

Reemplazando los valores (227) en (224):

$$\Pi_2 = \rho^{-1} U^{-1} D^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{\nu}{U D}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{Re} \quad (228)$$

Así, se plantea la ecuación en función de los parámetros adimensionales Π_i :

$$f(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \quad (229)$$

La misma función anterior, pero aún más desarrollada, se obtiene reemplazando (226) y (228) en (229):

$$f\left(\frac{\gamma J^*}{\rho U^2}, \frac{1}{Re} \right) = 0 \quad (230)$$

O bien, la (230) se puede expresar de otra forma distinta modificando el ordenamiento a través de la inserción de una nueva función f' :

$$\frac{\gamma J^*}{\rho U^2} = f'\left(\frac{1}{Re} \right)$$

$$\frac{\rho g J^*}{\rho U^2} = f' \left(\frac{1}{Re} \right)$$

$$\Rightarrow J^* = f' \left(\frac{1}{Re} \right) \frac{2}{2} \frac{U^2}{g}$$

$$J^* = J_{LOC}^* = 2 f' \left(\frac{1}{Re} \right) \frac{U^2}{2g} \quad (231)$$

Teniendo en cuenta que para determinar la ecuación (231) se partió de una hipótesis suponiendo que la forma del accesorio era fija, para dar mayor generalidad en concordancia con la realidad de cada particularidad que se presenta, debe considerarse simultáneamente la morfología geométrica en evaluación. De esta manera se tiene con más precisión una fórmula apropiada para cuantificar las pérdidas de energía localizadas.

$$J_{LOC}^* = 2 f' \left(\frac{1}{Re}, \text{forma} \right) \frac{U^2}{2g} \quad (232)$$

↙ K Coeficiente de resistencia.

15.2. Ensanchamiento brusco.

Cuando en una determinada tubería, siguiendo el sentido de circulación de la corriente, se produce una modificación súbita de la sección con diámetro D_1 a otra de diámetro mayor D_2 , se está en presencia de una singularidad que se denomina *ensanchamiento* o *expansión brusca*.

En la práctica, se trata de un accesorio que permite acoplar un tramo de un conducto con un determinado diámetro a otro de dimensión superior (ver *Figura 112*).

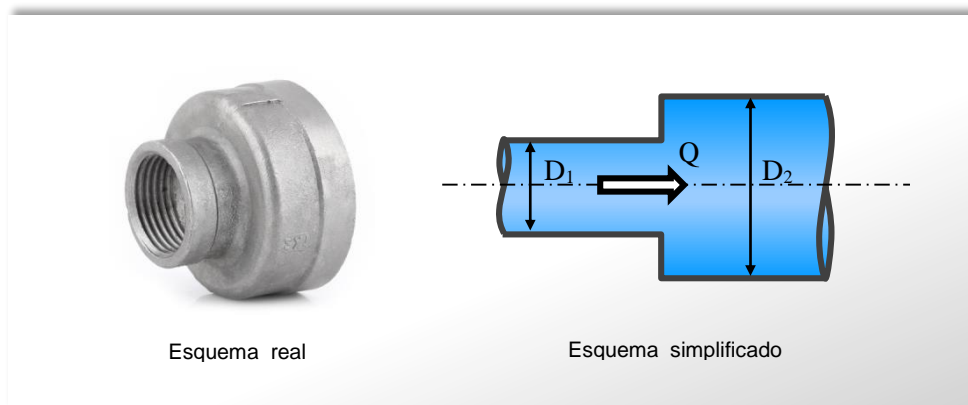


Figura 112 – Ensanchamiento brusco en una tubería a presión.

También puede ocurrir que en una instalación hidráulica, una tubería a presión descargue a un depósito de líquido en reposo (ver *Figura 113*) o bien directamente a la atmósfera (ver *Figura 114*). Ambas situaciones mencionadas representan casos particulares de ensanchamientos bruscos, donde el diámetro pasa del correspondiente a la tubería D_1 a otro de una magnitud sensiblemente mayor ($D_2 \rightarrow \infty$).

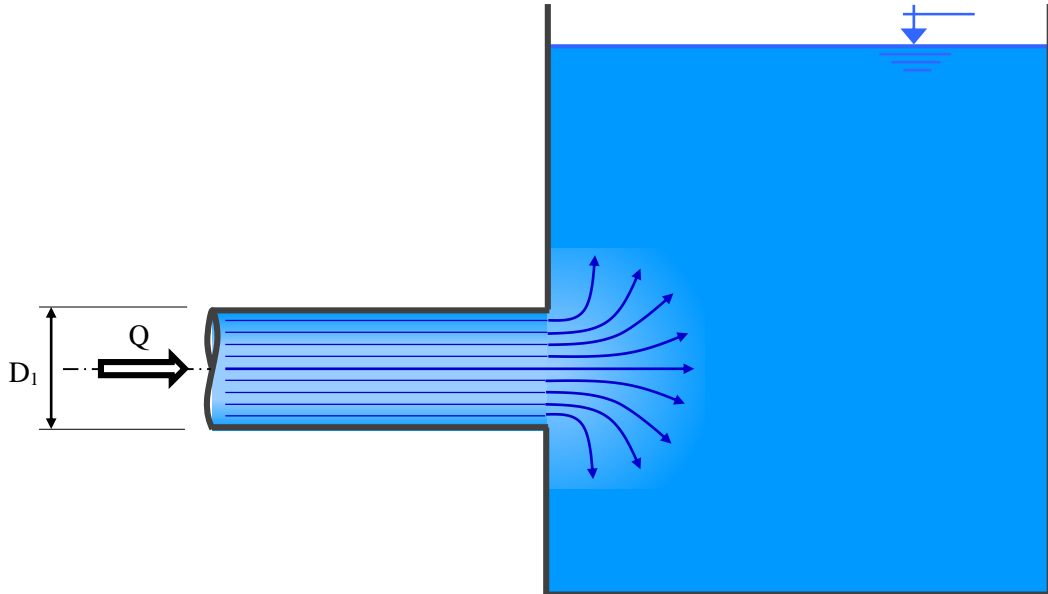


Figura 113 – Descarga de una tubería a presión en un reservorio.

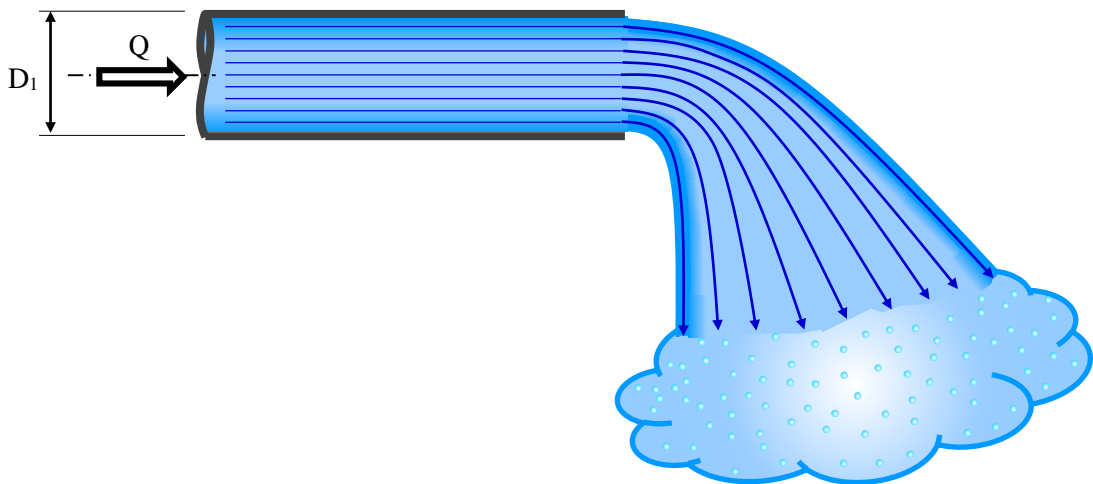


Figura 114 – Descarga de una tubería a presión a la atmósfera.

15.2.1. Cálculo.

Jean Charles Borda (1733-1799), ingeniero y científico francés, arribó a una expresión matemática que proporciona resultados de la pérdida de carga localizada en expansiones bruscas muy próximas a la realidad mediante la aplicación de un análisis puramente teórico. En ese estudio advirtió que la separación de la capa límite se desarrolla a partir de la sección donde se produce la singularidad y continúa a lo largo de un tramo Δl_{1-2} en el sentido de la corriente, longitud que se utiliza para la definición del volumen de control (ver *Figura 115*).

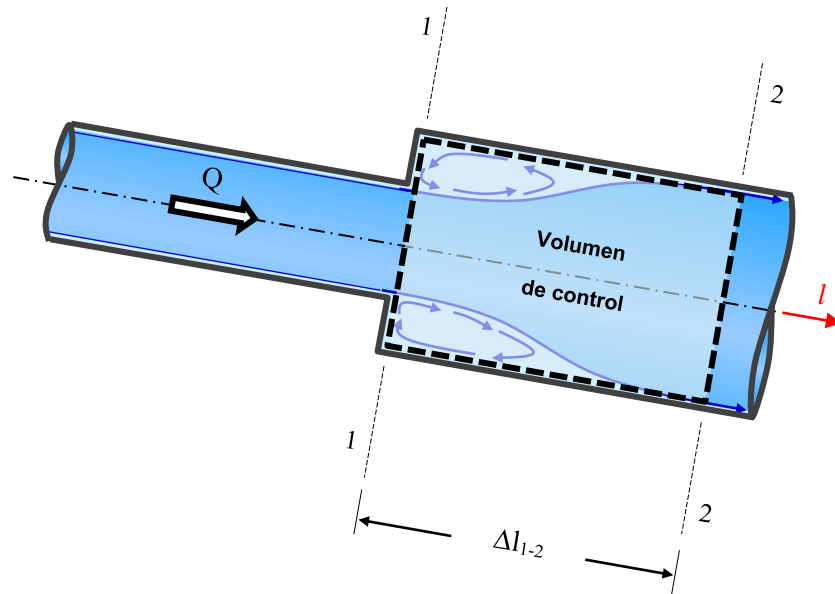


Figura 115 – Volumen de control en un ensanchamiento brusco.

El análisis que permite deducir la fórmula para la cuantificación de esta pérdida localizada, se gesta mediante la aplicación de las siguientes ecuaciones al volumen de control anteriormente indicado (ver Figura 116):

- Ecuación de Bernoulli → conservación de la energía
- Ecuación de continuidad → conservación de la masa

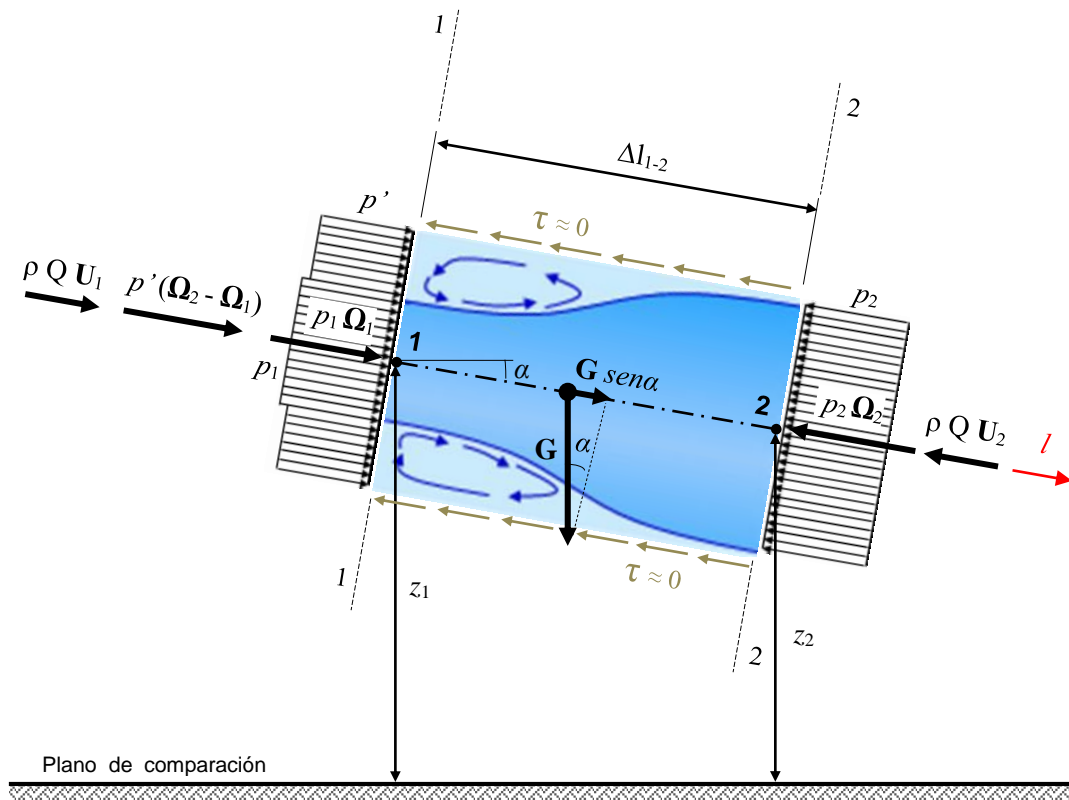


Figura 116 – Fuerzas intervinientes en el volumen de control.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1-1 y 2-2 del volumen de control:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + J_{\text{ens.}}^* \quad (233)$$

Considerando además que el régimen es turbulento, como ocurre en la mayoría de las aplicaciones práctica de la ingeniería hidráulica-civil en escurrimientos a presión, se acepta:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cong 1$$

Por consiguiente:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + J_{\text{ens.}}^* \Rightarrow$$

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{1}{2g} (U_2^2 - U_1^2) + J_{\text{ens.}}^* \quad (234)$$

La ecuación (234) permite evaluar la pérdida por ensanchamiento brusco con la tarea previa de proceder a la medición de las presiones y velocidades, pero a los efectos de formular una expresión más simple, se recurre a complementar la deducción empleando el teorema de la cantidad de movimiento:

$$\sum \mathbf{F} dt = m d\mathbf{U} \Rightarrow$$

$$\sum \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (235)$$

Aplicando la sumatoria de fuerzas en la dirección del movimiento l :

- Fuerzas exteriores actuantes (presión, masa y viscosidad):

$$(\sum \mathbf{F})_l = p_1 \Omega_1 + p'(\Omega_2 - \Omega_1) - p_2 \Omega_2 + \gamma \Omega_2 \Delta l_{1-2} \text{ sen } \alpha - \tau_0 \pi D_2 \Delta l_{1-2} \quad (236)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow \cong p_1} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{z_1 - z_2 \leftarrow} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow \tau_0 \cong 0}$

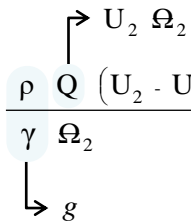
$\tau_0 \cong 0$ Se desprecia por ser una magnitud poco gravitante respecto de las demás actuantes.

$p' \cong p_1$ Asumiendo un pequeño error se adopta esa simplificación a los efectos del cálculo.

- Variación de la cantidad de movimiento respecto al tiempo:

$$\left(m \frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_l = \rho Q (U_2 - U_1) \quad (237)$$

Igualando (236) con (237) para dar cumplimiento con la ecuación (235) aplicada a la dirección del escurrimiento, y luego dividiendo por $\gamma \Omega_2$ se tiene:

$$\frac{p_1 \Omega_2}{\gamma \Omega_2} - \frac{p_2 \Omega_2}{\gamma \Omega_2} + \frac{\gamma \Omega_2 (z_1 - z_2)}{\gamma \Omega_2} = \frac{\rho Q (U_2 - U_1)}{\gamma \Omega_2}$$


En consecuencia:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1) \tag{238}$$

Comparando a continuación las ecuaciones (234) y (238), se puede constatar que los primeros miembros de ambas son iguales y por consiguiente los segundos también los son:

$$\frac{1}{2g} (U_2^2 - U_1^2) + J_{ens.}^* = \frac{2}{2} \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1) \Rightarrow$$

$$J_{ens.}^* = \frac{1}{2g} (2 U_2^2 - 2 U_1 U_2 - U_2^2 + U_1^2)$$

Finalmente:

$$J_{ens.}^* = \frac{1}{2g} (U_1 - U_2)^2 \tag{239}$$

La (239) es la *fórmula de Borda* que permite el cálculo de la pérdida de energía localizada por efecto de un ensanchamiento brusco a partir del cuadrado de la diferencia de velocidades entre ambas conducciones.

Por otra parte, y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, la expresión de Borda se puede escribir en función de las secciones de cada una de las tuberías:

$$Q = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = cte. \Rightarrow$$

$$U_2 = U_1 \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \tag{240}$$

Reemplazando (240) en (239) se obtiene otra variante de la fórmula de Borda:

$$J_{ens.}^* = \frac{U_1^2}{2g} \left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)^2 \tag{241}$$

O bien, en caso de tratarse de tuberías cilíndricas:

$$J_{ens.}^* = \frac{U_1^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \tag{242}$$

Tanto la ecuación (241) como la (242) se pueden resumir en una fórmula que expresa la pérdida de energía por expansión brusca en función de la energía cinética de la corriente antes del ensanchamiento y un coeficiente de resistencia $K_{ens.}$ que tiene en cuenta la relación existente entre las secciones o los diámetros al cuadrado.

$$J_{ens.}^* = K_{ens.} \frac{U_1^2}{2g}$$

Siendo:

$$K_{ens.} = \left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)^2 = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (243)$$

Para el caso en que un conducto desemboca a un tanque o reservorio como el la *Figura 113*, se verifica que la sección Ω_2 resulta ser muy superior a la de la tubería Ω_1 ($\Omega_2 \gg \Omega_1$), por lo que se deduce a partir de la ecuación (243) que el valor del coeficiente de resistencia tiende a la unidad ($K_{ens.} \rightarrow 1$). Idéntico criterio se aplica por ejemplo para situaciones de vuelco de un fluido a la atmósfera, tal como el graficado en la *Figura 114*.

Los ensayos experimentales arrojan valores de pérdida de energía que no concuerdan satisfactoriamente con la fórmula (239) o sus variantes (241) y (242), resultando los mismos ser de una magnitud un tanto superiores a los indicados por la teoría. Esta circunstancia es por demás lógica si se tiene en cuenta que previamente se realizaron dos hipótesis deductivas estrictamente inexactas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \cong 0 \\ p' \cong p_1 \end{array} \right.$$

La coyuntura señalada hace necesario efectuar un ajuste en la expresión teórica de Borda, a los efectos de corregir los resultados de manera que se adecúen en concordancia con la realidad. Entre las diversas adecuaciones existentes en la bibliografía, se citan por su validez, sencillez y practicidad solo las dos siguientes:

- Corrección de Saint-Venant.

Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886), francés, constató que mediante el uso de la fórmula de Borda se calculan valores deficitarios de la pérdida de energía, los que estimó según sus estudios en:

$$\frac{1}{9} \frac{U_1^2}{2g}$$

Por lo tanto sugiere emplear la siguiente ecuación compuesta:

$$J_{ens.}^* = \frac{1}{2g} (U_1 - U_2)^2 + \frac{1}{9} \frac{U_1^2}{2g} \quad (244)$$

- Corrección de Boussinesq.

Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929), francés, comprobó a través de sus investigaciones que la expresión de Borda alcanzaba a cuantificar aproximadamente solo un valor del orden del 90% de la pérdida de energía real, razón por la cual propone realizar el ajuste correspondiente incrementando la misma en un 10%. Se tiene así:

$$J_{ens.}^* = \frac{1,10}{2g} (U_1 - U_2)^2 \quad (245)$$

15.2.2. Representación gráfica de las líneas de energía.

En la *Figura 117* se representan las líneas de energía piezométrica y total para el caso en estudio, correspondiente a un ensanchamiento brusco, simbolizadas en la zona de la singularidad de una forma real (con trazo punteado) y otra simplificada (con trazo lleno).

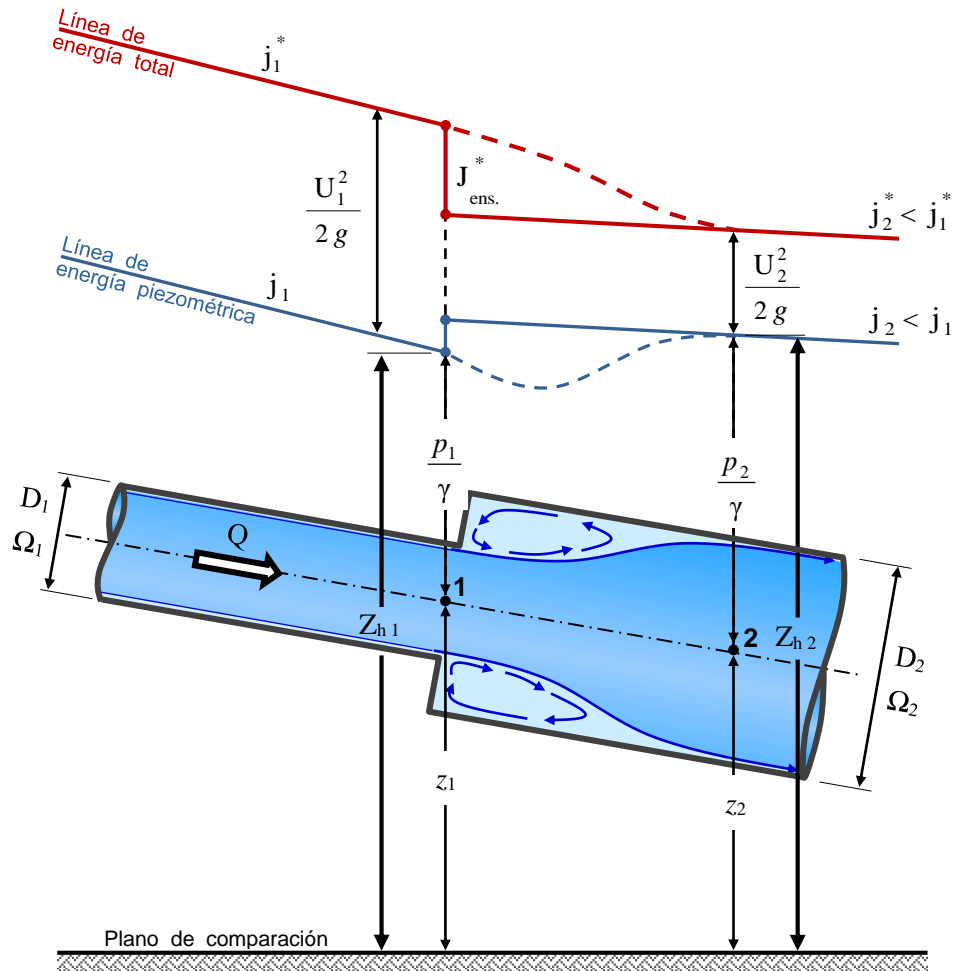


Figura 117 – Líneas de energía en un ensanchamiento brusco.

En el primer tramo la tubería tiene un diámetro D_1 y luego se expande abruptamente continuando con otro tramo de diámetro D_2 , mayor que el anterior. A ambos tramos de la transición se producen pérdidas generales, donde para cada uno de ellos se cumple la siguiente relación entre las pérdidas de energía unitarias fundamentada en que la velocidad U_1 resulta de la ecuación de continuidad ser mayor que la U_2 :

$$j_1^* > j_2^*$$

Esta situación se manifiesta en el gráfico de manera tal que las líneas de energía del sector de tubería con diámetro D_1 se disponen con mayor inclinación que en el sector de diámetro D_2 .

Por otra parte, la pérdida de carga local se marca por convención y simplicidad en el punto coincidente con la sección donde se materializa el ensanchamiento. La representación así dispuesta no es estrictamente conforme con el supuesto de concentrar la pérdida en una sección, sino que la misma se extiende en una longitud Δl_{1-2} (ver nuevamente la *Figura 117*), que en general resulta ser insignificante en comparación a la longitud total de la tubería.

frecuente que se presente en diversos instrumentos o máquinas hidráulicas, como por ejemplo:

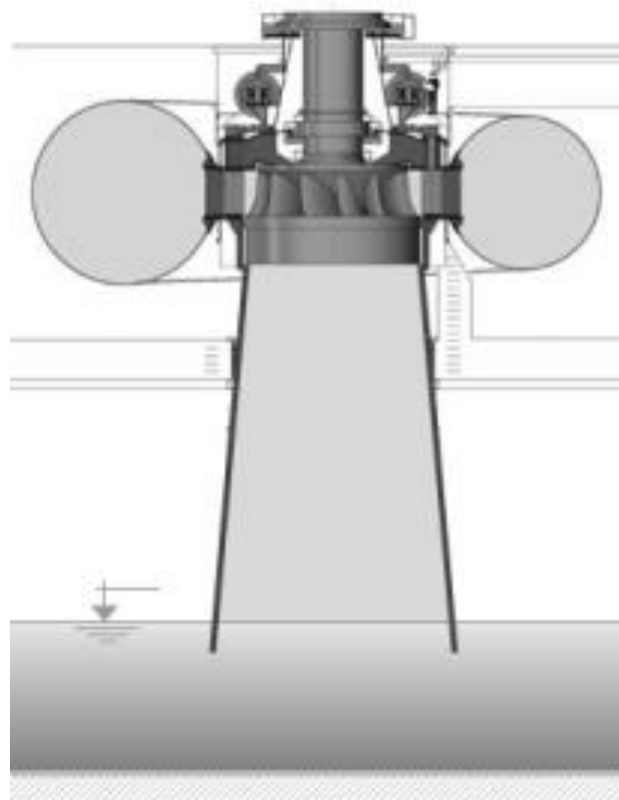
- Tramo de salida de los tubos Venturi.



- Descarga en la carcasa de las bombas centrífugas.



- Tubo de aspiración o de desfogue en turbinas hidráulicas.



Los distintos estudios indican que el ángulo θ de diseño más favorable es del orden de 5° (ver *Figura 119*), ya que la adopción de valores menores implica una más extensa longitud de la expansión con la seria posibilidad de producirse un amplio crecimiento de las pérdidas generales friccionantes por encima de las locales. Por otra parte, para ángulos superiores de θ entre 40° y 60° , el comportamiento hidráulico adquiere las mismas características que si se tratase de un ensanchamiento abrupto, razón por la cual se evitan transiciones con esos rasgos de moderación.

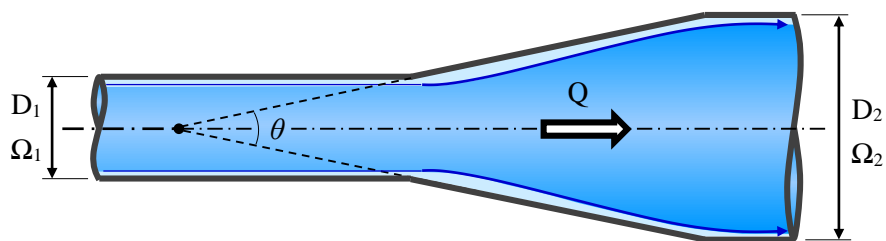


Figura 119 – Diseño geométrico de un ensanchamiento gradual.

El uso de transiciones con valores superiores del ángulo θ a partir de 8° conlleva al inicio de la separación de la vena líquida respecto al borde sólido.

Experiencias de laboratorio realizadas por A. H. Gibson entre 1910 y 1913 sobre tubos difusores concluyeron en una fórmula de aplicación idéntica a la de Borda (expresión 239) para la determinación de la pérdida de energía total por efecto de un ensanchamiento gradual, la cual debe ser afectada por un coeficiente corrector α_G que incluye simultáneamente las pérdidas locales por expansión y las generales por fricción en el tramo troncocónico.

$$J_{\text{ens.g.}}^* = \alpha_G \frac{1}{2g} (U_1 - U_2)^2 \quad (247)$$

Siendo:

α_G Coeficiente de Gibson.

Gibson volcó sus investigaciones en un gráfico que permite al proyectista conocer el coeficiente correctivo α_G según el ángulo de diseño para el aumento del diámetro, o bien mediante estudios más recientes, Crane Co. recomienda la aplicación de las siguientes expresiones respetando las alternativas condicionantes que a continuación se señalan:

- Si $\theta \leq 45^\circ \rightarrow \alpha_G = 2,6 \text{ sen } (\theta/2)$
- Si $45^\circ < \theta \leq 180^\circ \rightarrow \alpha_G \approx 1$

Desarrollando (247):

$$J_{\text{ens.g.}}^* = \alpha_G \frac{1}{2g} \frac{U_1^2}{U_1^2} (U_1 - U_2)^2 = \alpha_G \frac{U_1^2}{2g} \left(\frac{U_1 - U_2}{U_1} \right)^2 =$$

$$J_{\text{ens.g.}}^* = \alpha_G \left(1 - \frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{U_1^2}{2g} = \alpha_G \left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)^2 \frac{U_1^2}{2g} =$$

$$J_{ens.g.}^* = \alpha_G \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \frac{U_1^2}{2g} \tag{248}$$

↓
 $K_{ens.g.}$ Coeficiente de resistencia para ensanchamiento gradual.

La ecuación (248) representa la fórmula matemática capaz de cuantificar la pérdida de energía focalizada en un tramo de conexión con ensanchamiento progresivo entre dos tuberías de distinto diámetro, en función de la energía cinética correspondiente a la sección de entrada.

15.4. Estrechamiento brusco.

Los estrechamientos o contracciones se materializan en la práctica con elementos que permiten efectuar la reducción de la sección de un conducto a otro. A los efectos expeditivos, en general suele usarse el mismo accesorio que en el caso de los ensanchamientos, pero disponiendo el mismo en sentido inverso del escurrimiento y teniendo en cuenta que el comportamiento hidráulico es muy diferente.

Si la reducción es abrupta, de aristas vivas y ángulos rectos, la misma se denomina *estrechamiento brusco* y su configuración básica es tal como se indica en la *Figura 120*.

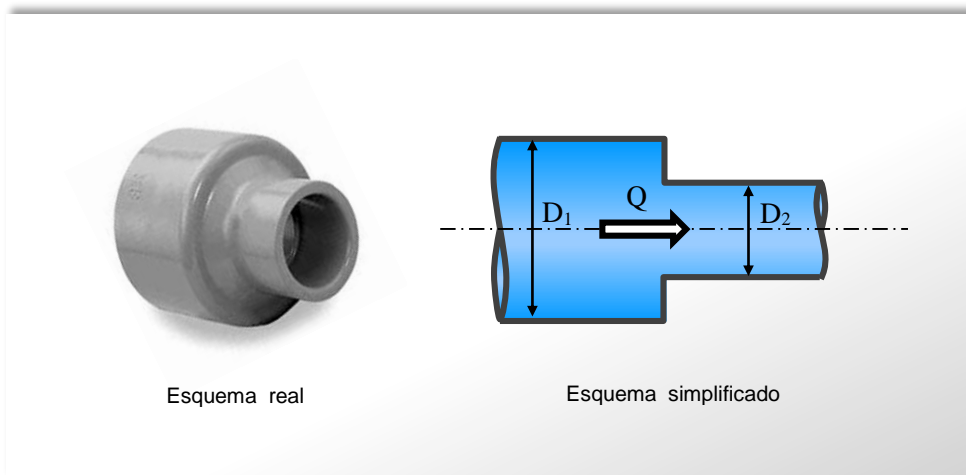


Figura 120 – Estrechamiento brusco en una tubería a presión.

En este contexto se tiene que las líneas de corriente no se ajustan precisamente a los bordes sólidos, difiriendo notablemente tanto aguas arriba como aguas abajo y generándose además zonas con separación de la capa límite que incluyen la presencia de vórtices. Desde una cierta longitud anterior al estrechamiento (sección 1-1 de la *Figura 121*) comienza el apartamiento de los filetes que van convergiendo hacia la sección de estrangulamiento E-E de la tubería y por la acción inercial de las partículas fluidas en movimiento se conforma posteriormente otro sector de desviación que contempla primeramente un estrechamiento y luego un ensanchamiento hasta la sección 2-2. Finalmente y a partir de dicha sección, el escurrimiento continúa su movimiento a través de la vena líquida que ahora colma la totalidad de la sección Ω_2 del conducto saliente.

Observando la *Figura 121* se pueden advertir claramente la presencia de dos fenómenos hidráulicamente muy distintos, según el tramo que corresponda:

1º) Tramo I.

Contracción de la vena líquida entre las secciones 1-1 y C-C, donde se produce la máxima reducción.

2º) Tramo II.

Expansión de la corriente desde la sección C-C hasta la 2-2.

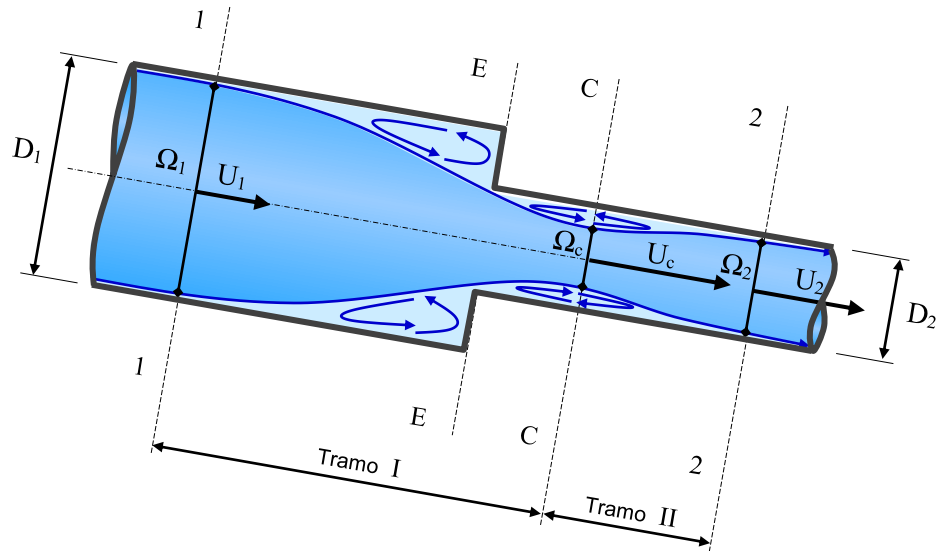


Figura 121 – Contracción y expansión en un estrechamiento brusco.

En los escurrimientos convergentes, tal como es el caso que se manifiesta en el tramo I, donde la velocidad media resulta creciente con respecto al recorrido, las pérdidas de energía hidráulica son tan pequeñas que en términos prácticos pueden considerarse despreciables. Este argumento se basa en razón a que el proceso de conversión de energía de presión a energía cinética es generalmente de elevado rendimiento hidráulico.

Por el contrario, en lo que respecta al tramo II, el patrón del escurrimiento se asemeja al de un ensanchamiento brusco, los procesos son inversos y las pérdidas muy superiores. De esta forma es de aplicación la expresión de Borda para la evaluación de la pérdida de energía.

Así se tiene:

$$J_{est.}^* = J_{1-2}^* = J_{1-c}^* + J_{c-2}^* \quad (249)$$

↓
Corresponde al estrechamiento del tramo I. Valor ≈ 0.
↓
Corresponde al ensanchamiento del tramo II.

15.4.1. Cálculo.

Resulta ser tan pequeña la pérdida de energía en el tramo I y simultáneamente tan significativa en el tramo II que puede suponerse sin un mayor error tecnológico la consideración de la siguiente simplificación al cálculo:

$$J_{est.}^* \cong J_{c-2}^* \quad (250)$$

Aunque parezca un contrasentido, la realidad indica que la magnitud de la pérdida local originada por un estrechamiento brusco resulta consecuencia de un ensanchamiento. Por consiguiente y haciendo valer la ecuación de Borda, se obtiene:

$$J_{est.}^* = J_{c-2}^* = \frac{1}{2g} (U_c - U_2)^2 \quad (251)$$

De la ecuación de continuidad:

$$Q = U_c \Omega_c = U_2 \Omega_2 = cte. \Rightarrow$$

$$U_c = U_2 \frac{\Omega_2}{\Omega_c} \quad (252)$$

Insertando la ecuación (252) en la (251):

$$J_{est.}^* = \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c} - 1 \right)^2 \quad (253)$$

Tomando la sección contraída Ω_c como una porción proporcional de la sección Ω_2 correspondiente a la tubería menor:

$$\Omega_c = \varphi_c \Omega_2 \quad (254)$$

↓
Coeficiente de contracción (valor < 1)

Reemplazando (254) en (253):

$$J_{est.}^* = \left(\frac{1}{\varphi_c} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} \quad (255)$$

↓
 K_{est}

Donde K_{est} es el coeficiente de resistencia para estrechamientos bruscos. Entonces:

$$K_{est.} = \left(\frac{1}{\varphi_c} - 1 \right)^2 \quad (256)$$

Finalmente:

$$J_{est.}^* = K_{est.} \frac{U_2^2}{2g} \quad (257)$$

La pérdida localizada por efecto de un estrechamiento brusco queda expresada mediante la ecuación (257) en función de la energía cinética correspondiente al conducto saliente de menor sección Ω_2 .

Si el fluido circulante es particularmente agua, Weisbach determinó experimentalmente el coeficiente de contracción φ_c para distintas relaciones entre secciones salientes y entrantes Ω_2/Ω_1 , lo que permite elaborar una tabla auxiliar del coeficiente de resistencia K_{est} utilizando la ecuación (256).

Tabla 10 Coeficiente de resistencia en estrechamiento brusco.

RELACIÓN $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$	COEFICIENTE DE CONTRACCIÓN φ_c	COEFICIENTE DE RESISTENCIA K_{est}
0,10	0,624	0,363
0,20	0,632	0,339
0,30	0,643	0,308
0,40	0,659	0,268
0,50	0,681	0,219
0,60	0,712	0,164
0,70	0,755	0,105
0,80	0,813	0,053
0,90	0,892	0,015

Para relaciones de $\Omega_2/\Omega_1 \geq 0,80$ se obtiene en la práctica valores del coeficiente de paso muy pequeños, por lo que en general en esta circunstancia y sin mayor error suele despreciarse la pérdida de energía local.

15.4.2. Representación gráfica de las líneas de energía.

Al igual que en el caso de una expansión abrupta, se recomienda graficar la pérdida de energía por estrechamiento brusco de manera concentrada y en coincidencia con la sección de transición. A su vez, debe tenerse en cuenta que la pérdida de carga será mayor a la de la energía total, puesto que la línea piezométrica desciende menos en el tramo I que en el II, ya que la velocidad media U_1 es menor que U_2 . Ver *Figura 122*.

$$J_{est.} > J_{est.}^*$$

Analizando el movimiento de forma amplia y general se observa que la pérdida originada por la presencia de la singularidad en estudio comienza antes de la transición, en concordancia con la sección 1-1 y finaliza posteriormente a la misma, en la sección 2-2. Tal como se justificó anteriormente, el mayor porcentaje de la energía total producida se presenta en el último tramo, en correspondencia con la zona de ensanche.

Respecto a la línea piezométrica, la misma experimenta una marcada divergencia entre la representación convencional (línea llena) y la real (línea punteada), puesto que la velocidad del escurrimiento comienza a aumentar antes de la sección E-E de transición con la consecuente reducción de la presión. Finalmente retoma su magnitud teórica recién cuando la sección de la vena líquida alcanza la dimensión de la tubería Ω_2 en la sección 2-2.

Las variaciones energéticas en la zona del estrechamiento son:

- Pérdida de la energía total en el sector indicado.
- Disminución de la energía piezométrica.
- Aumento de la energía cinética.

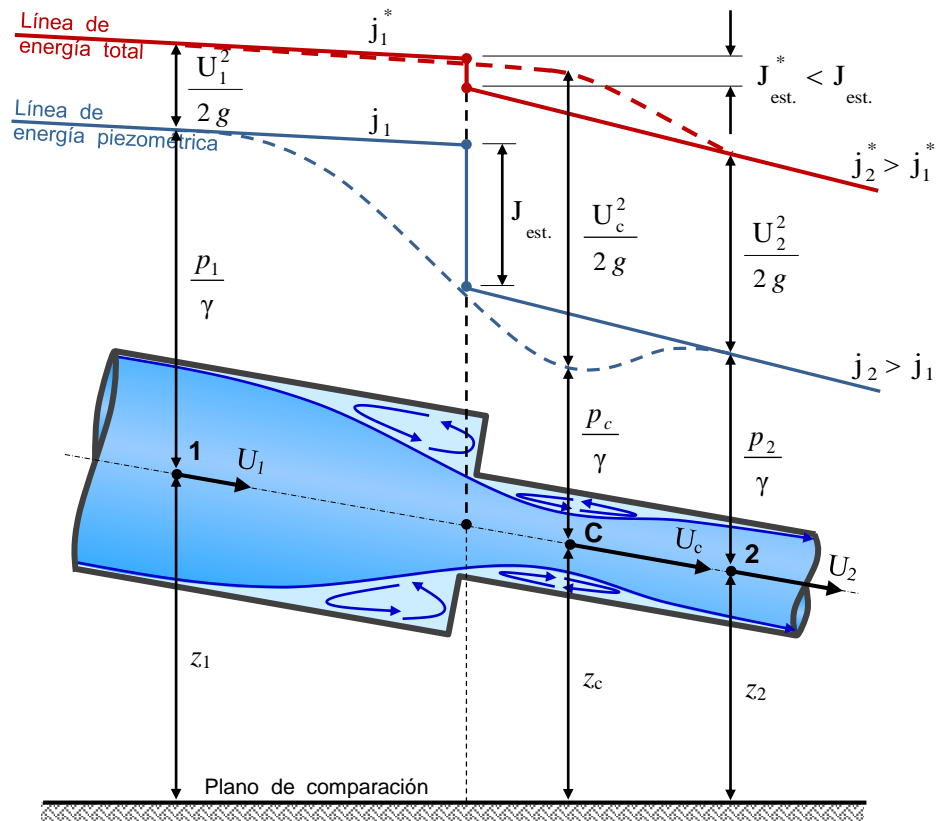


Figura 122 – Líneas de energía en un estrechamiento brusco.

15.4.3. Casos particulares.

Algunas peculiaridades que derivan de los estrechamientos bruscos se resumen en las siguientes situaciones:

- Embocadura recta con bordes vivos.

Corresponde a la vinculación perpendicular de una tubería de aristas vivas con la pared de un depósito. Ver Figura 123.

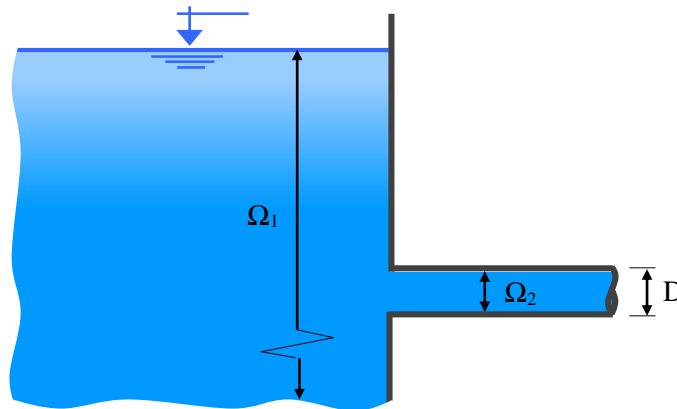


Figura 123 – Embocadura recta con bordes vivos.

La relación entre las secciones Ω_2/Ω_1 resulta ser un valor muy pequeño por lo que el coeficiente de resistencia K_{est} adquiere su máxima magnitud.

$$K_{est} = 0,50$$

- Embocadura oblicua con bordes vivos.

Si la conexión entre el conducto y el tanque deja de ser ortogonal y se materializa con un ángulo arbitrario θ , el coeficiente K_{est} se puede evaluar mediante el empleo de la siguiente expresión empírica:

$$K_{est.} = 0,50 + 0,30 \cos\theta + 0,20 \cos^2\theta \quad (258)$$

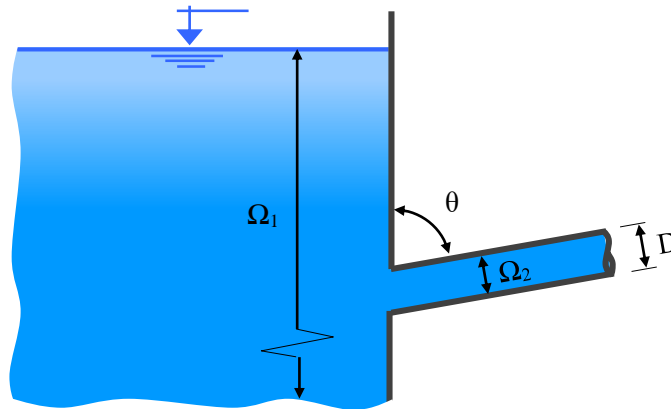


Figura 124 – Embocadura oblicua con bordes vivos.

En el caso específico de una embocadura recta, el ángulo de acometida vale 90° , su coseno trigonométrico es nulo y de la ecuación (258) resulta, tal como se afirmó en el punto anterior, que $K_{est} = 0,50$.

- Embocadura recta con bordes redondeados.

Se refiere a una disposición similar a la descrita en la primera situación pero con aristas suavizadas mediante la intercalación de curvas tipo arco circular. Ver Figura 125.

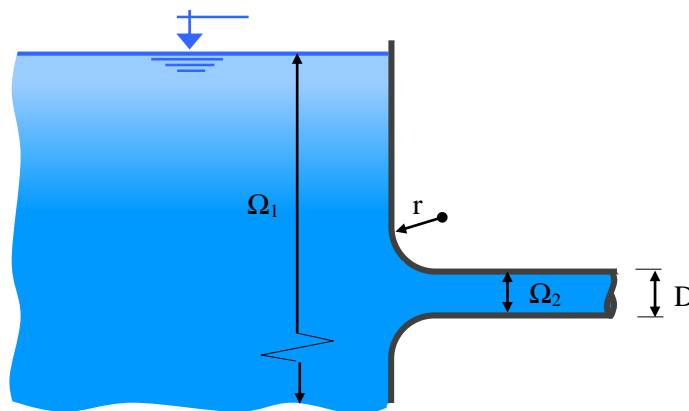


Figura 125 – Embocadura recta con bordes redondeados.

Estudios a tal fin indican que el coeficiente de resistencia K_{est} varía en función de la relación r/D .

Tabla 11 Coeficiente de resistencia en embocadura con bordes redondeados.

RELACIÓN $\frac{r}{D}$	COEFICIENTE DE RESISTENCIA K_{est}
0,00	0,50
0,02	0,37
0,04	0,26
0,08	0,15
0,12	0,09
0,16	0,06
> 0,20	< 0,03

- Tubería recta entrante.

Esta manera de relacionar el reservorio con el tubo modifica sensiblemente la forma de circulación del escurrimiento y en consecuencia la pérdida de energía es muy superior respecto a la embocadura con bordes vivos practicada al filo de la pared. Ver Figura 126.

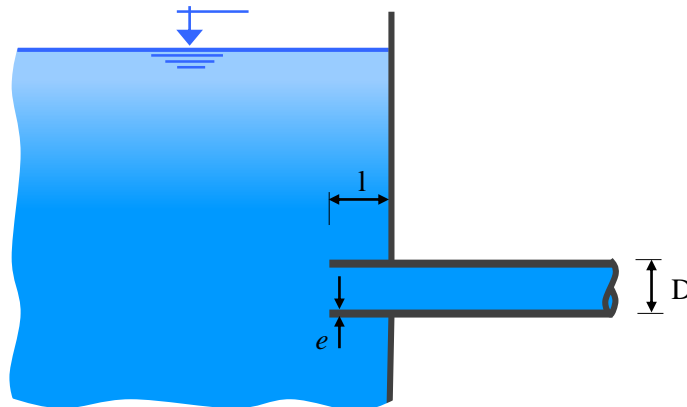


Figura 126 – Tubería recta entrante.

Su magnitud varía de acuerdo con las siguientes dos relaciones:

- l/D Longitud de penetración con respecto al diámetro.
- e/D Espesor del conducto con respecto al diámetro.

Tabla 12 Coeficiente de resistencia en embocadura con tubería recta entrante.

RELACIÓN e/D	COEFICIENTE DE RESISTENCIA K_{est}							
	RELACIÓN l/D							
	0,000	0,002	0,010	0,050	0,100	0,200	0,300	> 0,50
0,00	0,50	0,56	0,63	0,78	0,87	0,93	0,97	1,00
0,01	0,50	0,53	0,56	0,65	0,75	0,79	0,82	0,80
0,02	0,50	0,51	0,52	0,55	0,62	0,66	0,68	0,72
0,03	0,50	0,50	0,50	0,52	0,55	0,57	0,59	0,62
0,04	0,50	0,50	0,50	0,50	0,52	0,53	0,54	0,56

- Reducción gradual.

La pérdida de energía que se obtiene con el empleo de reducciones graduales de la sección es mucho menor que si esa disminución se realiza de forma brusca. Así, cuanto más reducido y moderado es el ángulo θ de la transición (Ver *Figura 127*), entonces más pequeña será la pérdida localizada por efecto del estrechamiento.

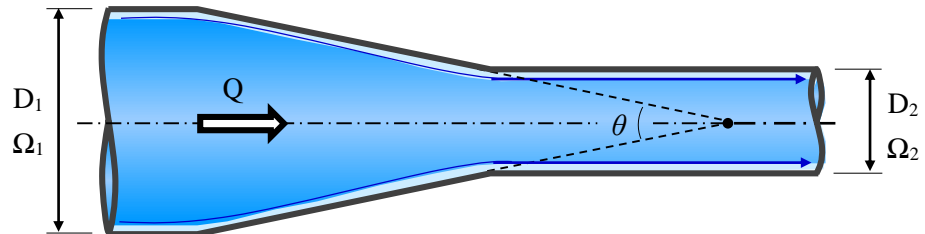


Figura 127 – Reducción gradual.

Una forma práctica de evaluar este tipo de pérdidas es mediante el uso combinado del coeficiente de resistencia K_{est} respectivo con la energía cinética correspondiente al diámetro menor:

$$J_{\text{est.g.}}^* = K_{\text{est.g.}} \frac{U_2^2}{2g} \quad (259)$$

Una alternativa para el cálculo de K_{est} la brinda Crane Co. mediante la aplicación de las siguientes fórmulas empíricas:

$$\begin{aligned} - \text{ Si } \theta \leq 45^\circ \rightarrow K_{\text{est.g.}} &= 0,8 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right] \\ - \text{ Si } 45^\circ < \theta \leq 180^\circ \rightarrow K_{\text{est.g.}} &= 0,5 \sqrt{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Adviértase la importante diferencia de magnitud existente en la pérdida de carga localizada según se trate de embocadura recta con bordes vivos u oblicuos, también con aristas vivas, o recta con bordes redondeados o recta entrante. Si a la inversa, se considerara una desembocadura diseñada con cualquiera de las alternativas anteriormente mencionadas, se obtendrá una misma pérdida de energía para todos los casos, correspondiendo un único coeficiente de resistencia $K \rightarrow 1$, tal como ya se señaló.

15.5. Cambio de dirección.

La necesidad de realizar un cambio de dirección en el recorrido de los conductos a presión se puede materializar concretamente mediante la interposición de accesorios tales como codos o curvas, cuyas formas y materiales se presentan en la industria en muy variadas alternativas. Ver *Figura 6-128*.

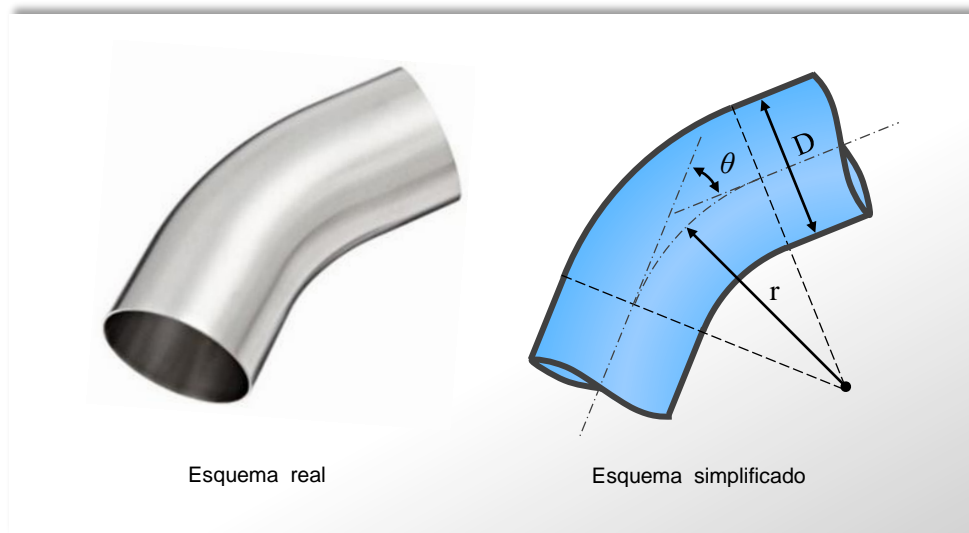


Figura 128 – Cambio de dirección en un escurrimiento a presión.

En la Figura 129 se observan cambios de dirección a 90° en sus versiones de codo regular, también conocido como codo normal y curva o codo de radio grande.



Figura 129 – Cambio de dirección a 90°.

La industria de las conducciones hidráulicas provee distintas alternativas de accesorios capaces de modificar la dirección en variados ángulos tales como 22,5°, 45°, 90°, 135° y 180° (ver Figura 130), sin descartar la construcción fuera de serie para satisfacer necesidades particulares de proyectos que así lo requieran.



Figura 130 – Cambio de dirección en diversos ángulos.

Los parámetros geométricos más importantes que definen este tipo de pérdida de energía localizada se visualizan en la *Figura 131* y son:

- Relación entre el radio de curvatura medio y el diámetro. $\frac{r}{D}$
- Ángulo de desvío de la corriente. θ

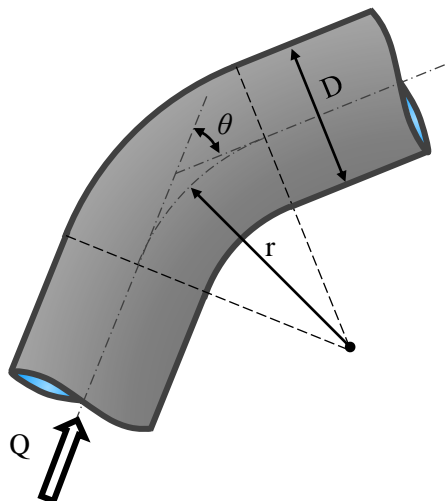


Figura 131 – Características geométricas de un cambio de dirección .

Un cambio de dirección generado por un codo o una curva provoca una perturbación en el escurrimiento como resultado de dos motivos que se gestan simultáneamente:

- Incremento de la presión en el borde exterior o cóncavo de la curva, con la consecuente disminución de la velocidad.
- Decremento de la presión en el borde interior o convexo y el consiguiente aumento de la velocidad.

Como efecto de la curvatura que adoptan las líneas de corriente, tanto las presiones como las velocidades resultan influenciadas por la aceleración normal, la cual en este caso se presenta como una fuerza centrífuga. La justificación a esta afirmación se establece a partir de la ecuación de Euler en su componente normal *n* y aplicada a una curva cuyo plano osculador está ubicado horizontalmente.

Así se tiene:

$$-g \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{r} \quad \Rightarrow$$

Fuerza de masa

Corresponde al peso, el cual en este ejemplo sobre el eje normal *n* es nulo por considerar a la curva contenida en un plano horizontal.

El eje binormal *b* de las coordenadas intrínsecas es paralelo al eje *z* de las coordenadas cartesianas, dirección en la cual actúa la aceleración de la gravedad manifestada a través del peso.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \rho \frac{V^2}{r} \tag{260}$$

De esta forma se deduce, en base al signo negativo del segundo miembro de la ecuación (260), que la presión disminuye a medida que se avanza hacia valores positivos del eje normal n .

Por consiguiente se establece sobre el borde exterior una presión mayor a la presión media de la curva y en el borde interior otra presión menor, cuya diferencia se compensa con la fuerza centrífuga.

En el sector inmediato al sólido, tanto en el borde interior como el exterior, por efecto del principio de Meyer, las velocidades principales de la corriente son prácticamente nulas, y la fuerza centrífuga V^2/r que debiera ser equilibrante resulta ser despreciable, razón por la cual la presión deja de estar compensada y se genera una corriente fluida a lo largo de la pared desde la zona de mayor presión (borde exterior) a la de menor (borde interior). Ver *Figura 132*.

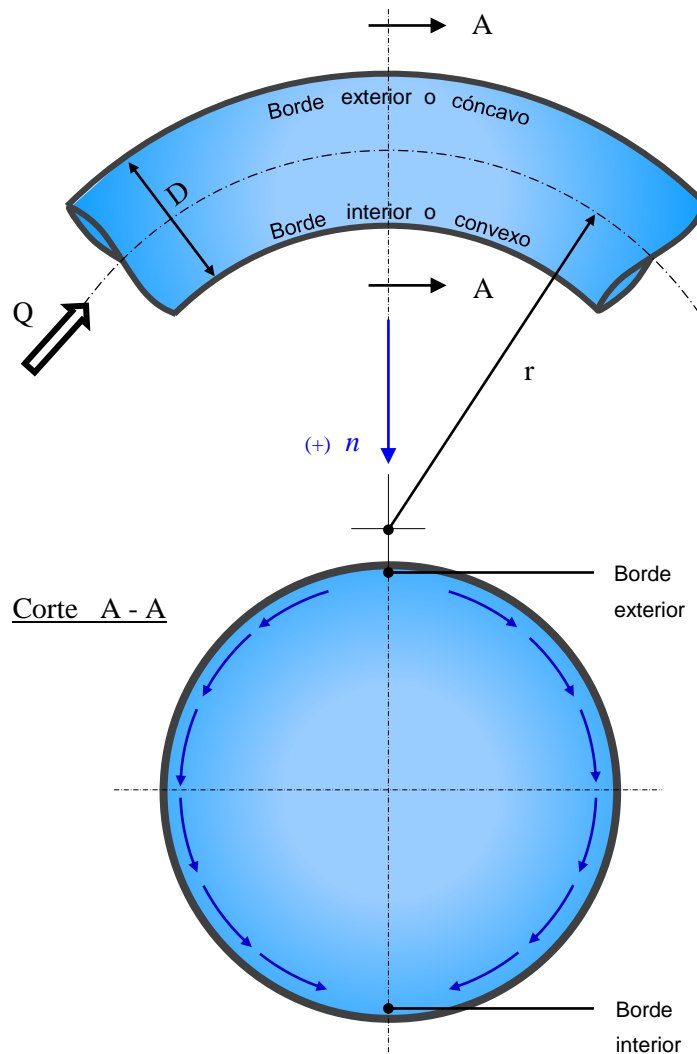


Figura 132 – Esguimiento secundario sobre la pared transversal.

Arribado a esa instancia, parte de la masa fluida se ha trasladado hasta el borde interior, la que dando cumplimiento con el principio de conservación de masa (ecuación de continuidad) se compensa mediante otro movimiento de características diametrales pero con sentido inverso (desde el borde interior hacia el exterior). Ver *Figura 133*.

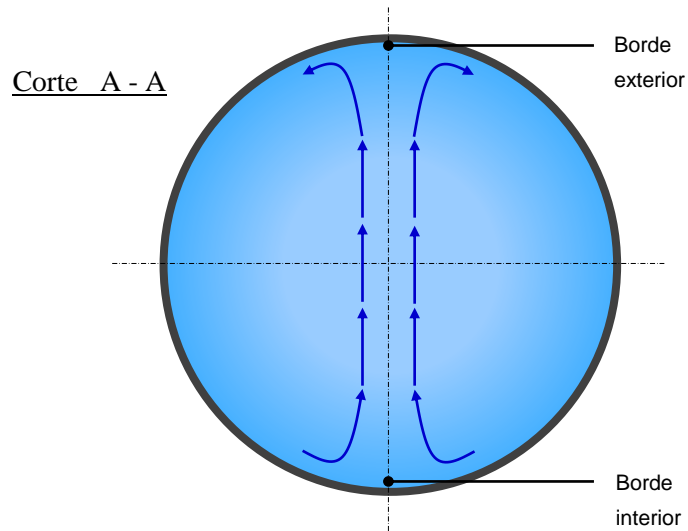


Figura 133 – Escurrimiento secundario diametral.

De esta manera se ha generado un movimiento adicional secundario con una distribución transversal al escurrimiento principal tipo doble helicoides (ver Figura 134.), la que sumada a la separación de la capa límite (ver Figura 135.) producen una pérdida de energía hidráulica localizada como consecuencia de la presencia de una curva en el trayecto de la conducción.

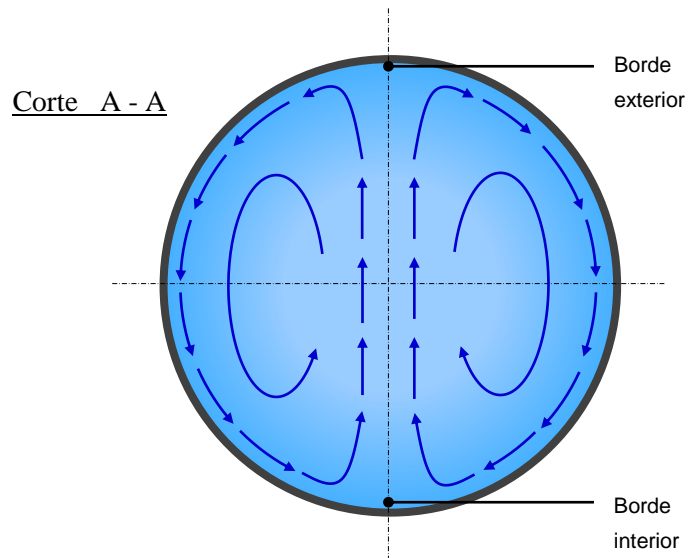


Figura 134 – Escurrimiento secundario transversal tipo doble helicoidal.

El efecto descrito comienza a gestarse de forma anticipada a una distancia relativamente pequeña de la localización de la curva y se luego se propaga hacia aguas abajo hasta una longitud variable entre 50 y 70 veces el diámetro D de la tubería, según demuestran estudios realizados por distintos investigadores.

La forma práctica que se utiliza para evaluar esta pérdida de energía secundaria es a través de la expresión general:

$$J_{c.}^* = J_{c.} = K_{c.} \frac{U^2}{2g} \quad (261)$$

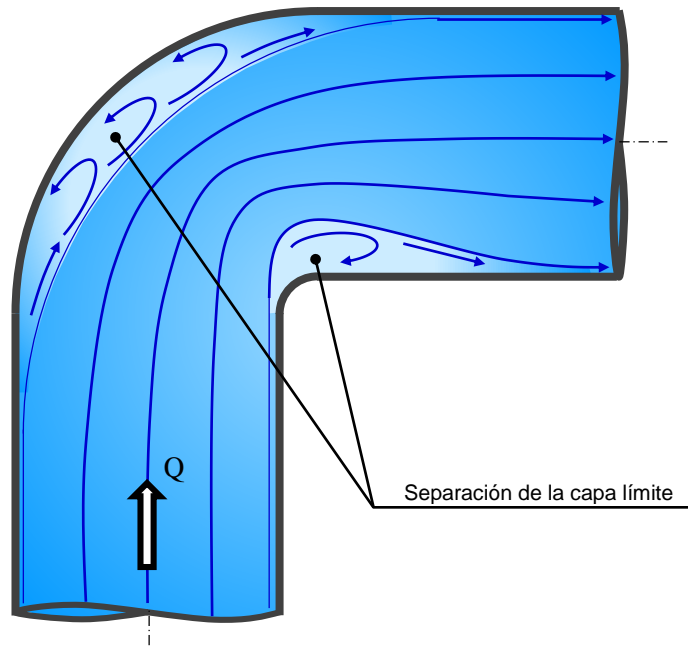


Figura 135 – Separación de la capa límite en cambios de dirección.

Donde el coeficiente de resistencia K_c para codos o curvas es función de:

- θ ángulo de desvío de la corriente.
- r radio de curvatura sobre el eje de la tubería.
- D diámetro de la tubería.

En los manuales específicos al tema se pueden hallar tablas, diagramas y expresiones matemáticas que permiten calcular el coeficiente de resistencia K_c , como paso previo a la determinación de la pérdida de energía. Unas fórmulas analíticas de uso práctico son las que obtuvo Boris V. Nekrasov, basándose en los gráficos producto de la experiencia del profesor G. N. Abramóvich, las que dejan cuantificar el coeficiente de resistencia aplicadas a tuberías hidráulicamente lisas en régimen turbulento pleno cuando se cumplen los siguientes límites:

- Ángulo de desvío de la corriente θ $0^\circ - 180^\circ$
- Relación entre radio de curvatura y diámetro r / D $1 - 25$

En esas condiciones se tiene:

$$K_c = K'_c \left(0,051 + \frac{0,19}{r/D} \right) \tag{262}$$

Donde:

$K'_c \rightarrow$ coeficiente adimensional función del ángulo θ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad K'_c = \text{sen } \theta = 1 \\ \text{Si } \theta \leq 70^\circ \quad \Rightarrow \quad K'_c = 0,9 \text{ sen } \theta \\ \text{Si } \theta \geq 100^\circ \quad \Rightarrow \quad K'_c = 0,7 + 0,35 \theta^\circ/90^\circ \end{array} \right.$$

Si se trata de conductos de sección cuadrada o rectangular, la pérdida de energía localizada por efecto de una curva se puede atenuar sensiblemente intercalando convenientemente aletas que oficien de guías al escurrimiento. Ver *Figura 136*.

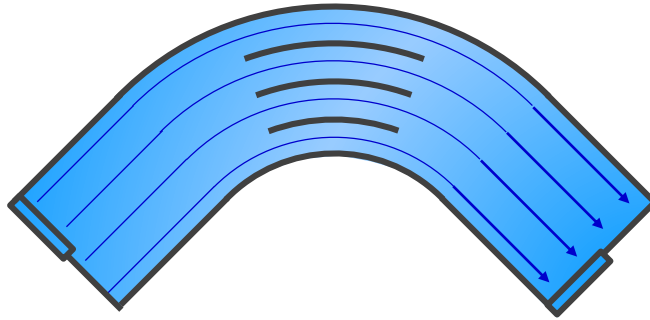


Figura 136 – Cambio de dirección complementado con aletas tipo guía.

En general, para los conductos ejecutados con tuberías de acero, es de práctica corriente materializar los cambios de dirección mediante curvas construidas con segmentos rectos de la tubería, fabricados y soldados entre sí (ver *Figura 137*). La información disponible para la evaluación de los coeficientes de resistencia K es incompleta, aunque en la bibliografía especializada se puede cubrir satisfactoriamente ese faltante si se lo complementa con algunos ajustes basados en el buen criterio y la experiencia.

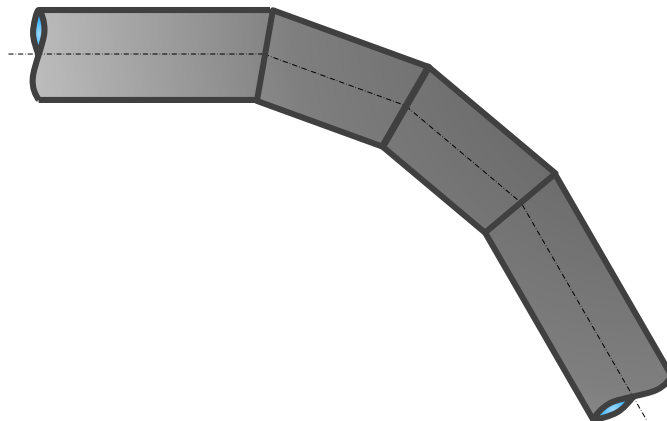


Figura 137 – Cambio de dirección con curva segmentada.

15.6. Válvulas.

Las válvulas hidráulicas son dispositivos regulables, compuestas por elementos mecánicos, las cuales acopladas a una tubería destinada a un escurrimiento a presión son aptas para modificar algunas de las siguientes características del escurrimiento:

- Gasto o caudal.
- Presión.
- Dirección de la corriente.

La sola presencia de una válvula en una conducción hidráulica, aún en el caso más favorable a la circulación del fluido que es en la posición de "apertura completa", es capaz de originar una significativa pérdida localizada según el diseño geométrico que le corresponda.

Existen muy diversas versiones de válvulas en el mercado, cuyo empleo se determina en función del tipo de fluido circulante, la velocidad del escurrimiento, temperatura de operación, presión, velocidad de la maniobra, y como consecuencia de esos parámetros se definen el material del cuerpo y el obturador, conjuntamente con la forma de unión al conducto (roscada o bridada).

A continuación se señalan algunas de las válvulas más importantes que se emplazan en las instalaciones hidráulicas, indicando su comportamiento y la evaluación de las pérdidas secundarias que generan:

a) Válvula esclusa.

La válvula esclusa, también denominada compuerta o guillotina, se caracteriza por poseer un obturador compuesto por una placa plana móvil y un vástago roscado que permite su deslizamiento de forma transversal a la dirección de la corriente fluida. Ver *Figura 138*.

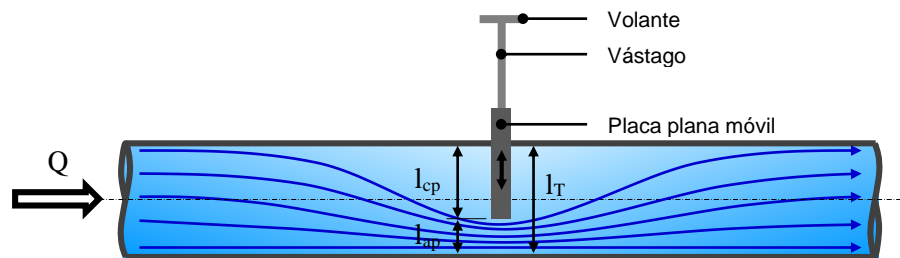


Figura 138 – Esquema de una válvula esclusa parcialmente abierta.

De esta manera se puede obstruir total o parcialmente el escurrimiento, gestando una pérdida de energía localizada en relación directa con el grado de cierre de la válvula.

Resulta práctico cuantificar la apertura total (o cierre total) a través del número de vueltas n_T del vástago necesario para cumplir el recorrido de la placa plana entre las posiciones de “cierre total” y “apertura completa”. El desplazamiento total de la placa l_T entre esas dos posiciones extremas resulta del producto entre el número de vueltas n_T y el paso de la rosca del vástago.

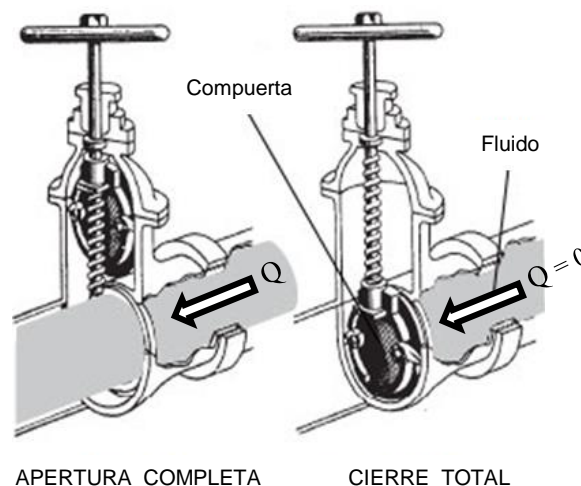


Figura 139 – Válvula esclusa en sus dos posiciones extremas.

El grado de apertura se mide en general en % y se refiere a la relación porcentual entre la distancia recorrida en el movimiento de apertura parcial de la compuerta l_{ap} y la longitud máxima resultante entre los extremos de apertura y cierre total l_T . Dicha relación también coincide con el cociente entre el número de vueltas de apertura parcial y el total.

$$\text{Grado de apertura (\%)} = \frac{l_{ap}}{l_T} 100 = \frac{n_{ap}}{n_T} 100 \quad (263)$$

$\cong D$

Algunos autores o proyectistas, inversamente a lo anteriormente señalado, utilizan el concepto de *grado de cierre*, adoptando como longitud de referencia en la regulación de la válvula al largo del cerramiento parcial l_{cp} . Así el grado de apertura y el de cierre se relacionan de la siguiente manera:

$$\text{Grado de cierre (\%)} = 100\% - \text{Grado de apertura (\%)} \quad (264)$$

Así debe tenerse en cuenta que cuando se trata, por ejemplo de un grado de apertura del 50% de la válvula (o 50% de grado de cierre), la sección de paso del fluido resulta ser superior al 50% de la sección total según se puede visualizar en la *Figura 140*.

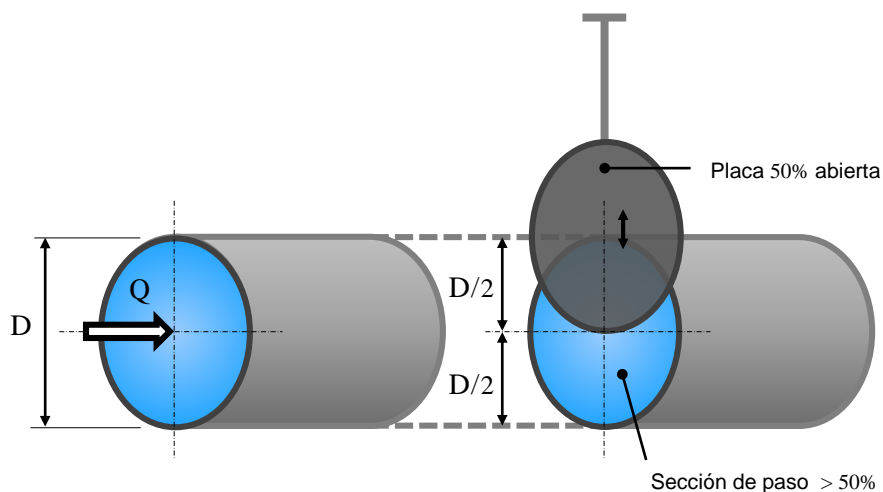


Figura 140 – Esquema de una válvula esclusa 50% abierta.

En la *Tabla 13* se indican valores orientativos del coeficiente de resistencia $K_{v.esc.}$, determinados en sus investigaciones por Emil Kuichling (Estadounidense 1848-1914), de la cual se puede establecer que para grados de apertura entre 30 y 100% las pérdidas que se producen son irrelevantes, lo que hace que la válvula en cuestión sea poca apta para moderar el caudal. En general, las válvulas esclusas requieren un grado de cierre de aproximadamente 85% (15% de grado de apertura) para que el gasto disminuya apenas a valores del orden del 20%.

Entre sus características ventajosas, este tipo de válvula se distingue por permitir la circulación de cualquier tipo de fluido y no generar significativas pérdidas secundarias, recomendándose además no emplearla como reguladora del gasto por carecer de sensibilidad a tal fin y provocar cavitación con el consecuente deterioro.

Tabla 13 Coeficiente de resistencia en una válvula esclusa.

POSICIÓN		COEFICIENTE DE RESISTENCIA $K_{v,esc.}$
% Apertura	Observaciones	
100,0 %	Apertura completa.	0,00
66,7 %	Apertura parcial.	0,77
58,3 %	Apertura parcial.	1,55
50,0 %	Apertura parcial.	3,27
45,0 %	Apertura parcial.	4,57
41,7 %	Apertura parcial.	6,33
37,5 %	Apertura parcial.	8,63
33,3 %	Apertura parcial.	11,89
25,0 %	Apertura parcial.	22,68
20,8 %	Apertura parcial.	31,35
19,4 %	Apertura parcial.	35,36
18,1 %	Apertura parcial.	41,21
0,0 %	Cierre total.	∞

En caso de necesitar efectuar cálculos orientativos se recomienda adoptar los siguientes valores del coeficiente de resistencia $K_{v,esc.}$:

{	100% abierta - Apertura Completa.	0,20
	75% abierta	1,15
	50% abierta	5,60
	25% abierta	24,00

Por el contrario, si se requiere precisión en la determinación de la pérdida de carga localizada, se sugiere recurrir a los datos de información técnica del fabricante o a los manuales específicos del tema, donde se requerirá para la definición de $K_{v,esc.}$ tener conocimiento del modelo de válvula, diámetro y tipo de vinculación a la tubería mediante rosca o brida (ver *Figura 141*).



Figura 141 – Válvulas esclusas roscada y bridada.

Ventajas:

- La forma de cierre a través de la compuerta plana permite que su diseño sea de poco volumen y consecuentemente de menor costo.
- Escasa dimensión entre las caras de acople a la tubería.
- Genera pequeña pérdida de carga secundaria.
- No requieren lubricación sus partes móviles.

Inconvenientes:

- No apto para utilizar como regulador de caudal.
- El asiento donde se afirma la compuerta en el cierre total consta de una cavidad susceptible de retener sólidos que evitan la estanqueidad del dispositivo.
- Si las presiones y/o temperaturas son elevadas suelen producirse fugas a través de las empaquetaduras.
- Ante pequeños grados de apertura las velocidades son muy grandes, capaces de generar erosión tanto en la compuerta como en el asiento. Simultáneamente por esa misma acción, la presión puede disminuir a valores inferiores a la tensión de vapor produciendo efectos de cavitación.

b) Válvula esférica.

La válvula esférica es un dispositivo que en su interior contiene una bola, la cual está atravesada diametralmente por una perforación cilíndrica de igual sección transversal que la tubería (ver *Figura 142*), aunque en algunos casos es de menor valor, adquiriendo una forma similar a un tubo Venturi. Originalmente la estanqueidad estaba limitada al contacto metal con metal entre la esfera y el asiento, pero la evolución de los plásticos han contribuido a su desarrollo.

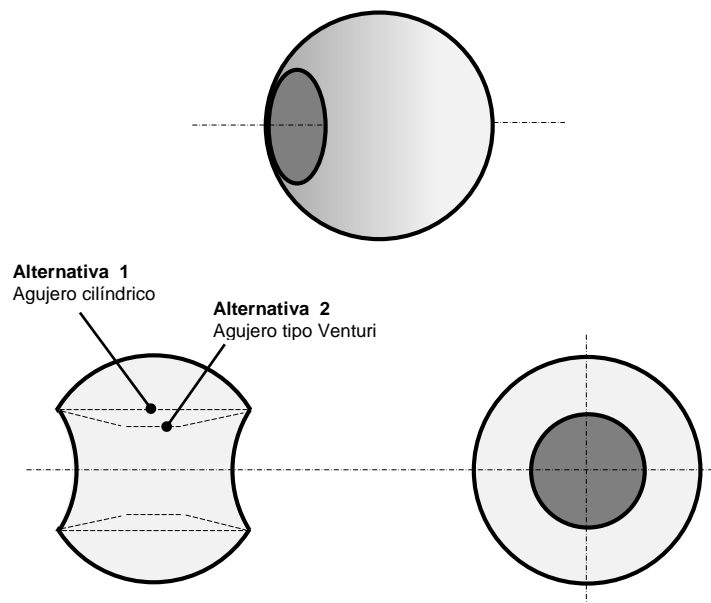


Figura 142 – Perspectiva, vista y perfil de la esfera interior de la válvula

Cuando a la posición de la bola se le hace coincidir el eje de su agujero interior con el eje longitudinal de la tubería, se está en presencia de la condición de “apertura completa” de la válvula (ver *Figura 143*), circunstancia esta que habilita la libre circulación del fluido con escasa resistencia al avance y consecuentemente muy baja pérdida de energía localizada.

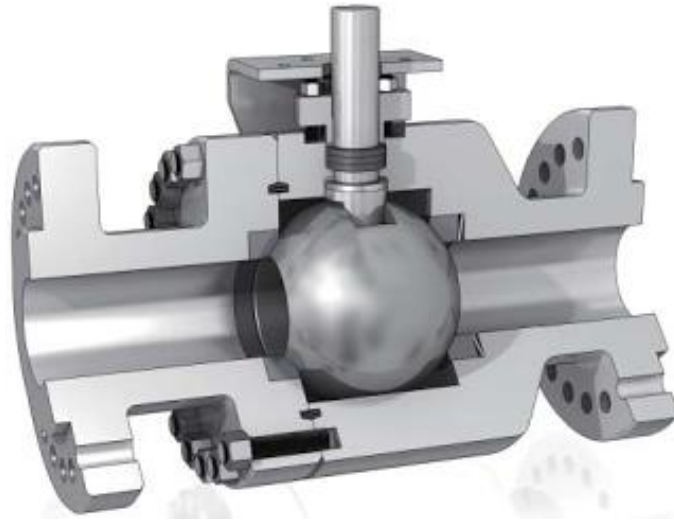


Figura 143 – Válvula esférica en posición “apertura completa”.

Su morfología permite un adecuado control del gasto para posiciones intermedias del vástago, variando el ángulo θ entre 0° y 90° . Ver Figura 144.

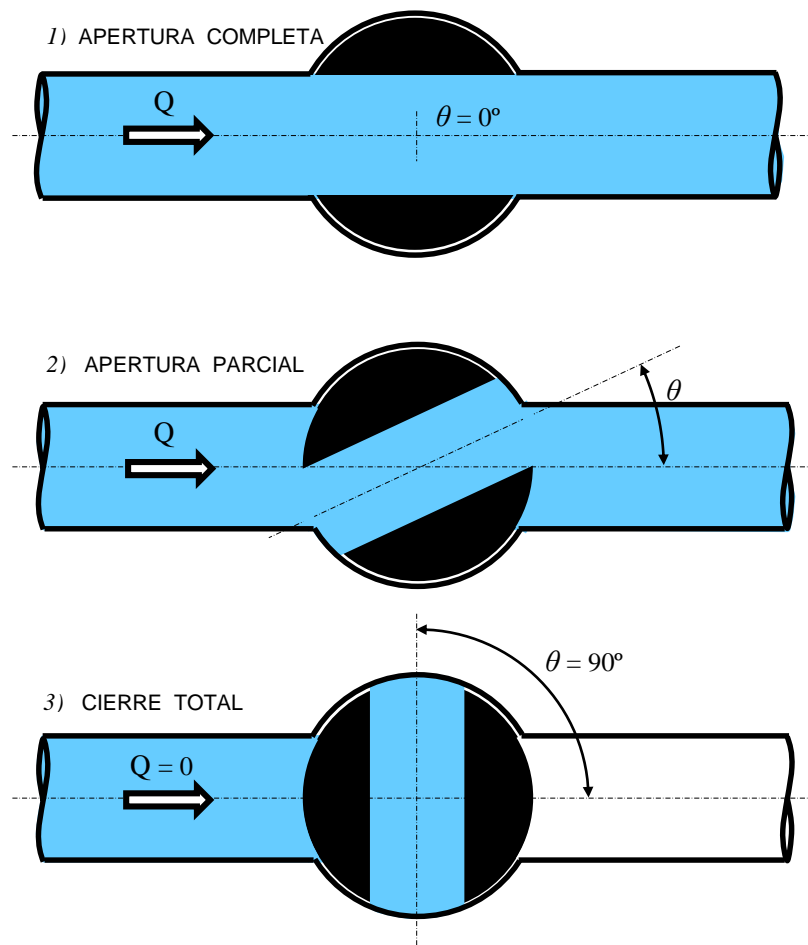


Figura 144 – Posiciones del vástago en válvulas esféricas.

La *Tabla 14* muestra los valores del coeficiente de resistencia $K_{v,esf.}$, obtenidos de la experiencia realizada por Julius Weisbach (Alemania 1806-1871), los cuales pueden servir al lector solo como datos de referencia.

Tabla 14 Coeficiente de resistencia en una válvula esférica.

POSICIÓN			COEFICIENTE DE RESISTENCIA $K_{v,esf.}$
Ángulo θ	% Apertura	Observaciones	
0°	100,0 %	Apertura completa.	≈ 0
5°	94,4 %	Apertura parcial.	0,05
10°	88,9 %	Apertura parcial.	0,29
15°	83,3 %	Apertura parcial.	0,75
20°	77,8 %	Apertura parcial.	1,56
25°	72,2 %	Apertura parcial.	3,10
30°	66,7 %	Apertura parcial.	5,47
35°	61,1 %	Apertura parcial.	9,68
40°	55,6 %	Apertura parcial.	17,30
45°	50,0 %	Apertura parcial.	31,20
50°	44,4 %	Apertura parcial.	52,60
55°	38,9 %	Apertura parcial.	106,00
60°	33,3 %	Apertura parcial.	206,00
65°	27,8 %	Apertura parcial.	486,00
82°	8,8 %	Cierre total.	∞
90°	0,0 %	Cierre total.	∞

Por sus características, las válvulas esféricas son de uso frecuente en tuberías por donde circulan fluidos a altas presiones y velocidades, aunque también suelen utilizarse en conductos de pequeños diámetros. Los fabricantes proveen a la industria de acuerdo a sus necesidades distintas variantes de modelos en diversos diámetros y materiales para ser acoplados a los conductos mediante las opciones roscada o bridada (ver *Figura 145*).



Figura 145 – Válvulas esféricas roscada y bridada.

Ventajas:

- Manejo ágil. Girando el vástago un ángulo de 90° se pasa de la posición de apertura completa a cierre total y viceversa.
- Costo reducido.
- No necesita lubricación y es de sencillo mantenimiento.
- Baja pérdida de carga secundaria.

Inconvenientes:

- Uso limitado por la temperatura admisible del material utilizado.
- Requiere un espacio considerable, por ser la distancia entre caras la de mayor longitud respecto de otros tipos de válvulas.
- Una porción del fluido queda retenida dentro de la esfera cuando el vástago está en la posición de "cierre total". Ver *Figura 144 3*).
- Es muy pequeña la carrera entre las posiciones de "apertura completa" y "cierre total", efectuándose en solo un cuarto de vuelta del vástago.

c) Válvula globo.

La válvula globo basa su maniobrabilidad mediante la variación del posicionamiento de un émbolo obturador que accionado por un vástago consigue asentarse sobre una sección circular, la cual está dispuesta de forma paralela al eje de la tubería. Dependiendo de la situación requerida se puede cerrar, abrir y regular el paso del escurrimiento del fluido.

Sus elementos componentes principales son los indicados en la *Figura 146*.

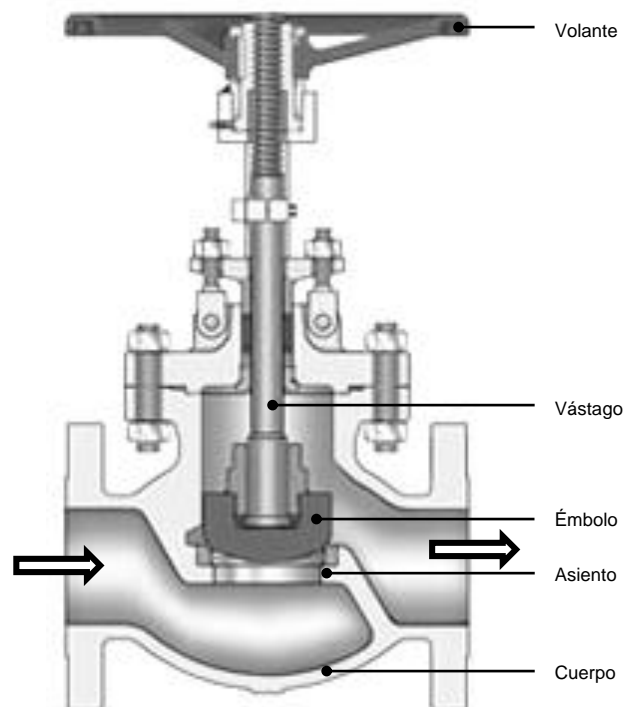


Figura 146 – Corte y componentes de una válvula globo.

El volante acciona un vástago que se desplaza transversalmente a la dirección de la tubería, y como puede observarse en la *Figura 147 a*), el recorrido del fluido resulta ser bastante sinuoso, aún para la posición de "apertura completa".

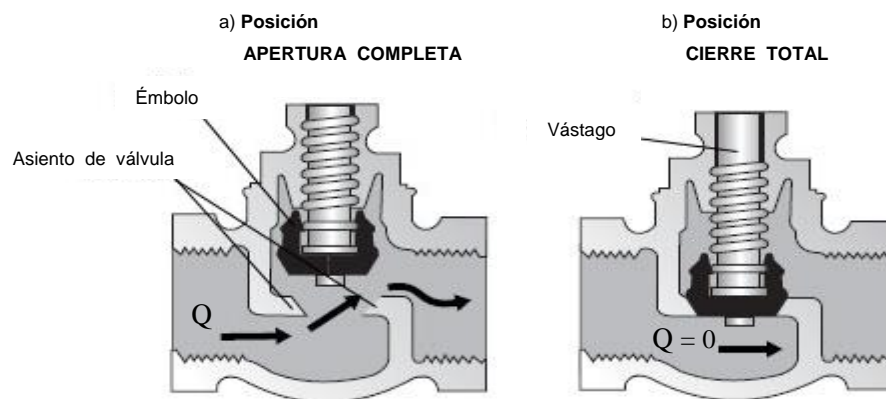


Figura 147 – Apertura y cierre de una válvula globo.

Ese cambio interno de la dirección de la corriente ocasiona turbulencias y pérdidas de energía que puede disminuir la vida útil del asiento. Por esa razón, en algunas válvulas globo, el asiento en vez de ser una parte integral del cuerpo, se fabrica de manera independiente para que pueda ser reemplazado.

Su uso principal está destinado al corte y la regulación del caudal, generalmente destinado a conductos que transportan líquidos, o bien vapores o gases o pastas semilíquidas.

Tabla 15 Coeficiente de resistencia en una válvula globo.

POSICIÓN	COEFICIENTE DE RESISTENCIA $K_{v,gl.}$									
	UNIÓN ROSCADA					UNIÓN BRIDADA				
	Diámetro Nominal (mm)					Diámetro Nominal (mm)				
	13	25	50	100	25	50	100	200	500	
100 % abierta (apertura completa)	14,0	8,2	6,9	5,7	13,0	8,5	6,0	5,8	5,5	
75 % abierta (apertura parcial)	24,5	14,4	12,1	10,0	22,8	14,9	10,5	10,2	9,6	
50 % abierta (apertura parcial)	35,0	20,5	17,2	14,2	32,5	21,2	15,0	14,5	13,8	
25 % abierta (apertura parcial)	98,0	57,4	48,3	39,9	91,0	59,5	42,0	40,6	38,5	
0 % abierta (cierre total)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	

En la Tabla 15 se pueden obtener valores de referencia del coeficiente de resistencia $K_{v,gl.}$, ordenados según el tipo de vinculación a la tubería, diámetro y grado de apertura.

Una especial precaución debe tenerse en cuenta con relación al montaje en este tipo de válvula, ya que la misma está diseñada para escurrimientos unidireccionales.

El fabricante señala sobre el cuerpo una flecha que indica la posición de trabajo (ver *Figura 148*).



Figura 148 – Posición de trabajo de las válvulas globo.

Ventajas:

- Muy buena regulación del gasto para escurrimientos medianos a totales.
- Diseñada para uso frecuente.
- Excelente cierre.

Inconvenientes:

- Pérdida de energía excesiva a consecuencia del recorrido tortuoso del fluido.
- Daños en el asiento al atrapar sólidos.
- Alto costo de adquisición y mantenimiento.

d) Válvula mariposa.

La tipo mariposa es una de las primeras variantes de válvula diseñadas por el hombre, la cual consiste esencialmente en una placa circular y transversal a la tubería, que accionada por un volante dispuesto diametralmente a dicha placa puede girar alrededor del mismo. Ver sus partes principales en la *Figura 149*.

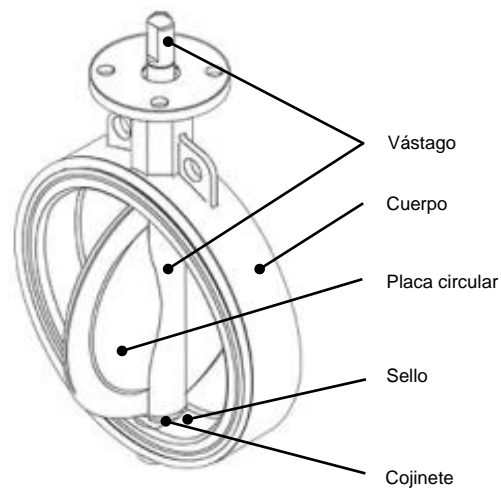


Figura 149 – Detalles de una válvula mariposa.

El asiento contra el cual se produce el cierre de la placa circular puede estar constituido con componentes metálicos o sino con sellos elásticos, como por ejemplo neopreno. Esta última alternativa provee un cierre efectivamente hermético pero trae aparejada una dificultad con relación a la temperatura del fluido que puede disminuir la vida útil del material.

La faz operativa resulta ser rápida y sencilla, ya que su carrera total entre las posiciones extremas de “apertura completa” y “cierre total” requiere tan solo del giro de un ángulo $\theta = 90^\circ$ (1/4 de vuelta) por parte del vástago. Ver Figuras 150 y 151.

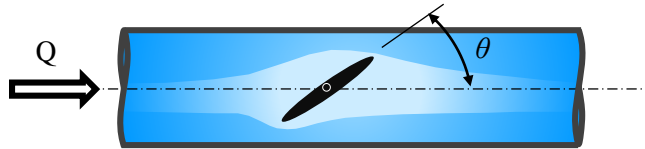


Figura 150 – Ángulo operativo variable.



Figura 151 – Válvula mariposa con palanca operativa.

A pesar de ello, para los casos de tuberías donde la sección es relativamente importante, se puede optar por un sistema ejecutivo de apertura-cierre con una técnica de multiplicador de vueltas mediante engranajes, transformando el cuarto de giro de la placa circular en varias vueltas de volante. De esta forma se logra una mayor precisión en la regulación del caudal (ver Figura 152).



Figura 152 – Válvula mariposa con sistema multiplicador de vueltas.

En la *Tabla 16* se indican valores referenciales del coeficiente de resistencia $K_{v.m.}$ en función del ángulo de apertura.

Tabla 16 Coeficiente de resistencia en una válvula mariposa.

POSICIÓN			COEFICIENTE DE RESISTENCIA $K_{v.m.}$
Ángulo θ	% Apertura	Observaciones	
0°	100,0 %	Apertura completa.	0,05
5°	94,4 %	Apertura parcial.	0,24
10°	88,9 %	Apertura parcial.	0,52
15°	83,3 %	Apertura parcial.	0,90
20°	77,8 %	Apertura parcial.	1,54
25°	72,2 %	Apertura parcial.	2,51
30°	66,7 %	Apertura parcial.	3,91
35°	61,1 %	Apertura parcial.	6,22
40°	55,6 %	Apertura parcial.	10,80
45°	50,0 %	Apertura parcial.	18,70
50°	44,4 %	Apertura parcial.	32,60
55°	38,9 %	Apertura parcial.	58,80
60°	33,3 %	Apertura parcial.	118,00
65°	27,8 %	Apertura parcial.	256,00
70°	22,2 %	Apertura parcial.	751,00
90°	0,0 %	Cierre total.	∞

Ventajas:

- Baja pérdida de energía.
- Peso limitado.
- Dimensiones reducidas.
- Escaso mantenimiento por poseer muy pocos elementos móviles.
- Rápida operación.
- Mínima acumulación de sedimentos por ser un escurrimiento rectilíneo.
- No se altera el volumen dentro de la tubería durante la maniobra.

Inconvenientes:

- Elevado momento torsor para su accionamiento.
- Poco apta para la regulación del caudal.
- No calificada para altas presiones.
- Expuesta a la cavitación.

e) Válvula aguja.

En la *Figura 153* se muestra un esquema básico de los elementos que componen una válvula aguja y simultáneamente se señala el recorrido que efectúa el fluido dentro de la misma.

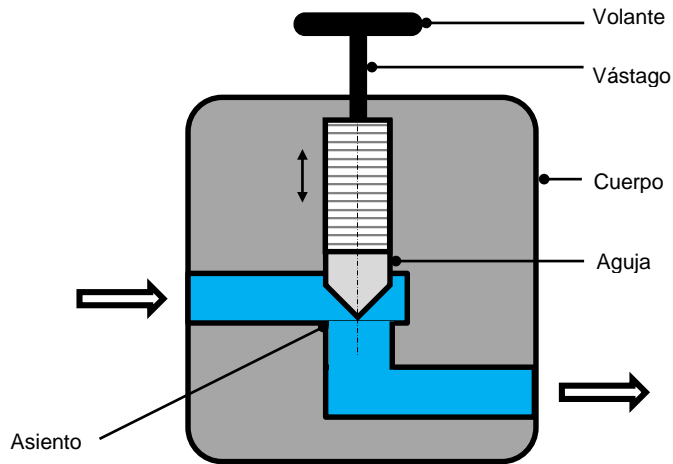


Figura 153 – Esquema básico de una válvula aguja.

El corte transversal de una válvula aguja indicado en la *Figura 154* consiste en un diseño muy similar al de la válvula globo, difiriendo solamente en que el remate del vástago adopta una forma cónica.

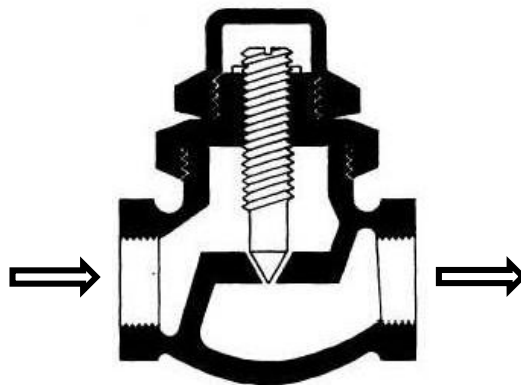


Figura 154 – Corte transversal de una válvula aguja.

Otra variante de una válvula aguja se describe a través del corte esbozado en la *Figura 155*.

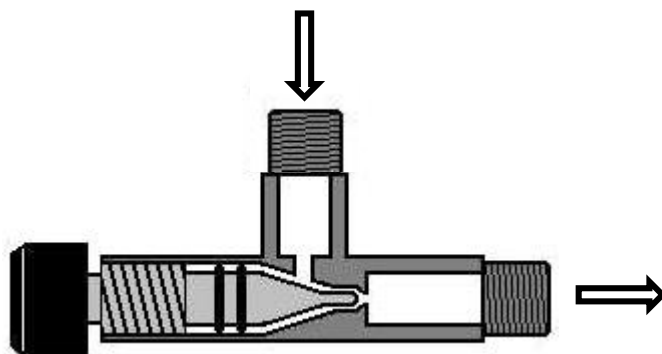


Figura 155 – Corte transversal de otra variante de válvula aguja.

El diseño particular sumado a que el movimiento del vástago suele efectuarse mediante rosca de paso fino, hace que las válvulas tipo aguja se adapten considerablemente para lograr una muy adecuada regulación del caudal. Sus aplicaciones incluyen el uso con fluidos sometidos a elevadas presiones y temperaturas.



Figura 156 – Válvula aguja.

Tabla 17 Coeficiente de resistencia en una válvula aguja.

POSICIÓN		COEFICIENTE DE RESISTENCIA $K_{v.ag.}$
Apertura %	Observaciones	
100 %	Apertura completa.	9,0
90 %	Apertura parcial.	9,5
80 %	Apertura parcial.	10,0
75 %	Apertura parcial.	10,2
70 %	Apertura parcial.	10,8
65 %	Apertura parcial.	11,0
60 %	Apertura parcial.	12,5
55 %	Apertura parcial.	15,0
50 %	Apertura parcial.	20,0
45 %	Apertura parcial.	29,0
40 %	Apertura parcial.	47,0
35 %	Apertura parcial.	67,0
30 %	Apertura parcial.	90,0
25 %	Apertura parcial.	122,0
20 %	Apertura parcial.	185,0
15 %	Apertura parcial.	380,0
10 %	Apertura parcial.	850,0
0 %	Cierre total.	∞

Ventajas:

- Buena regulación del gasto.
- Hermética.
- Poca pérdida de energía en la posición “apertura completa”.
- Escaso desgaste.

Inconvenientes:

- Alta torsión para su operación.
- Cavitación con baja caída de presión.
- No recomendable para líquidos muy viscosos.

f) Otras válvulas usuales.

Existen una amplia variedad de válvulas además de las indicas precedentemente, en las cuales, dentro de cada tipo existen distintos modelos. Resulta muy difícil generalizar la forma de cálculo de las pérdidas locales originadas por estos accesorios, por lo que se recomienda para cada caso específico recurrir a las indicaciones técnicas emanadas del fabricante.

- Válvula antirretorno.

Son válvulas que permiten el escurrimiento en un solo sentido de la corriente, la cual se bloquea cuando esta pretende hacerlo a la inversa. Un ejemplo práctico son las conexiones domiciliarias de agua potable, donde las normas exigen el uso de este tipo de accesorio a fin de evitar el retorno del agua a la red distribuidora.

Ver *Figura 157*.

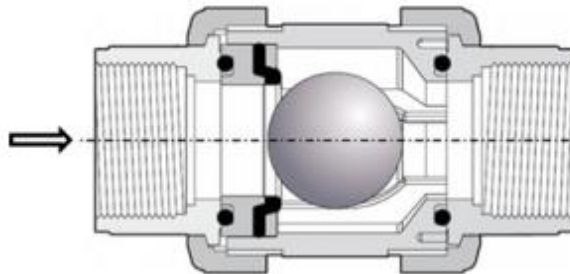


Figura 157 – Válvula antirretorno.

Un caso muy común de este tipo de válvulas son las denominadas *válvulas de pie*, en general precedidas por una rejilla de protección, y de uso común en las instalaciones de bombeo. Ver *Figura 158*.

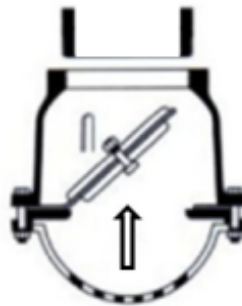


Figura 158 – Válvula de pie.

- Válvula de codo.

Corresponde a una variante de la válvula globo y se la ubica en correspondencia con un cambio de dirección del conducto. La trayectoria curva del fluido se concreta de forma más sencilla, situación que colabora en disminuir las pérdidas singulares. Ver *Figura 159*.



Figura 159 – Válvula de codo.

- Válvula de aire.

Con la finalidad de permitir la expulsión, o por lo contrario el ingreso de aire a la conducción, se utilizan estas válvulas, ubicándolas estratégicamente en los puntos superiores de la tubería tal como se indica en la *Figura 160*.

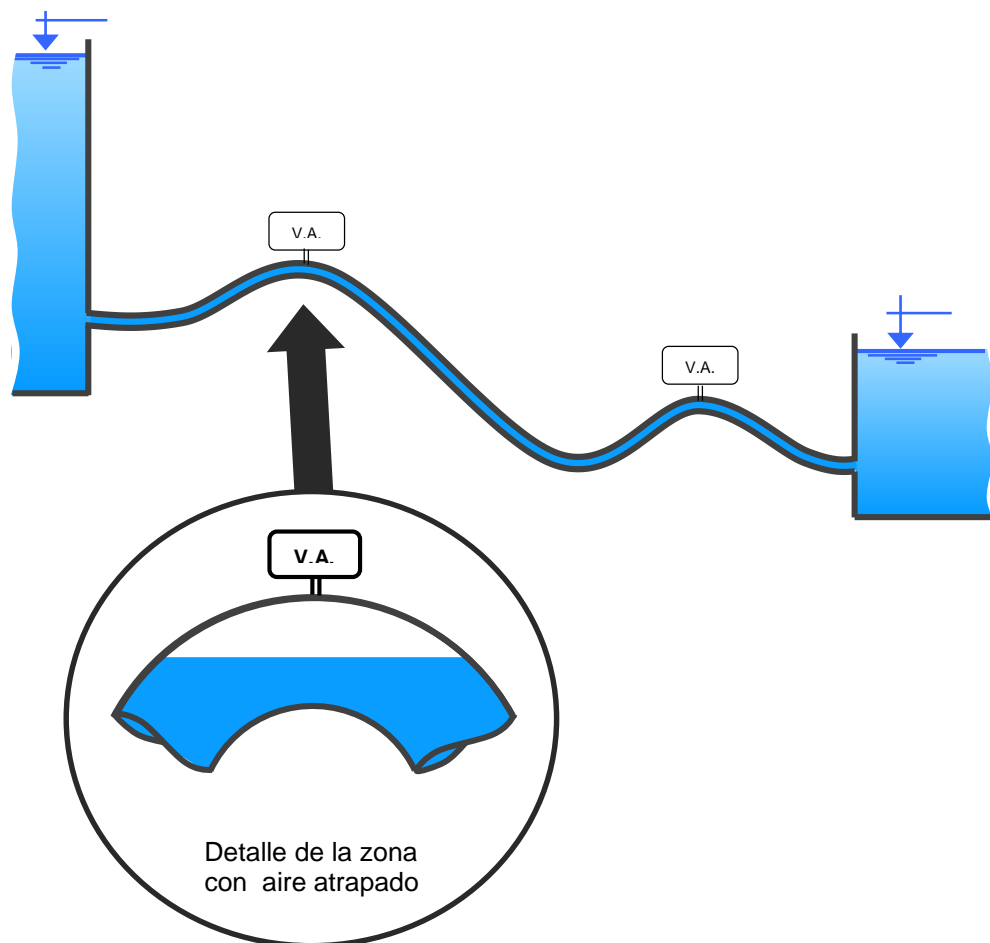


Figura 160 – Instalación con válvulas de aire.

La presencia de aire en las tuberías se puede atribuir a las siguientes causas:

- Expulsión incompleta del aire ante la acción del llenado líquido de la tubería.
- Ingreso de aire a través de los vórtices que provocan las bombas hidráulicas y por las zonas de aspiración con sellado defectuoso.
- Si el fluido en circulación es particularmente agua, este siempre contiene aire disuelto que se transforma en burbujas ante la disminución de la presión.

Este fenómeno puede provocar problemas que perjudiquen la marcha normal de la instalación, y sus consecuencias se pueden resumir en:

- Disminución de la sección efectiva.
- Aumento de la pérdida de energía.
- Decremento del caudal.
- Lecturas no confiables en los accesorios de medición.
- Problemas de cavitación.

Por otra parte y en otras circunstancias del funcionamiento, también es necesario que la válvula asegure adecuadamente el acceso del aire, de modo de evitar que se generen presiones negativas capaces de provocar el colapso de la tubería por aplastamiento.

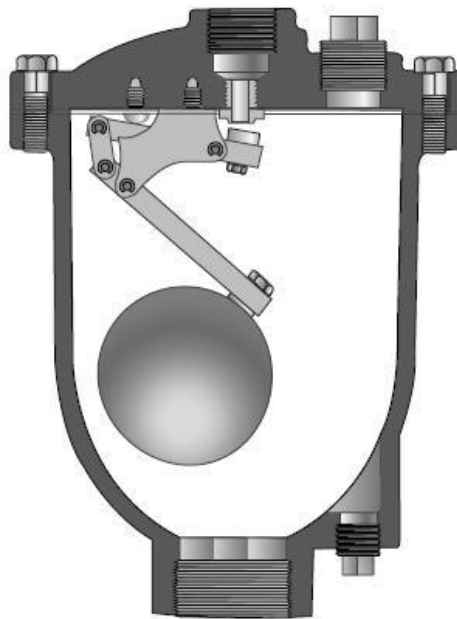


Figura 161 – Válvula de aire.

La presencia de una válvula de aire no interfiere en el escurrimiento del fluido en general, ya que se disponen en una derivación del conducto provocando una casi despreciable pérdida singular. Se asume solo la colocación de un accesorio tipo “T”, por el cual no hay ningún caudal desviado.

- Válvula de alivio.

También llamada válvula reductora de presión o válvula de seguridad, está diseñada con el objeto de limitar la presión del fluido a un valor predeterminado de máximo funcionamiento. Su utilización resguarda a la conducción de las sobrepresiones ocasionadas por el efecto de golpe de ariete.

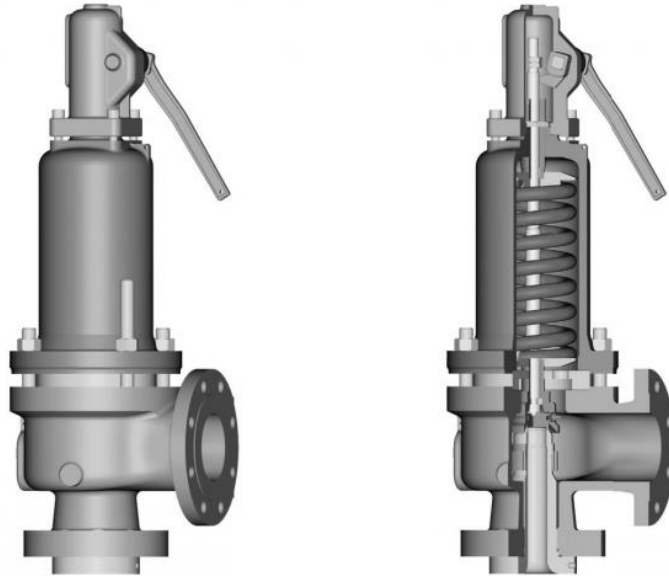


Figura 162 – Válvula de alivio.

En las instalaciones domésticas o industriales que cuentan con calentadores, se colocan en los mismos o sobre la tubería, una válvula de alivio calibrada de modo que se produzca la apertura de la misma en caso de sobrepresiones originadas por un aumento desproporcionado de temperatura.

Su conexión al sistema es similar al de las válvulas de aire, razón por la cual la pérdida de energía por su presencia en general es pequeña.

- Válvula reguladora de presión.

Las válvulas reguladoras de presión, a diferencia de las válvulas de alivio, tienen como finalidad de funcionamiento establecer una presión en la instalación y mantenerla constante en el tiempo.

Se usan en los sistemas de impulsiones donde es necesario obtener un escurrimiento con movimiento permanente durante el tiempo de bombeo.

Estos tipos de válvula incorporan a su cuerpo una tubería de by-pass para evitar un aumento de presión que sea perjudicial para la instalación.



Figura 163 – Válvula reguladora de presión.

15.7. Otros accesorios.

- Ramales.

Los ramales son accesorios de las instalaciones hidráulicas que permiten conectar en diversas variantes hasta 3 tuberías. Según la forma en que se proceda con la ejecución de la conexión estos pueden interactuar sobre las corrientes circulantes ejerciendo acciones de:

- Bifurcación.
- Enlace.
- Desvío.
- Unidirección.

Comercialmente se los encuentran en general con desvíos de igual o distinto diámetro respecto del principal y acometidas a 90° (ver *Figura 164*) y 45° (ver *Figura 165*).



Figura 164 – Ramales a 90° Tipo “T”.

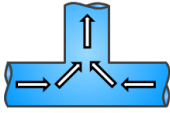
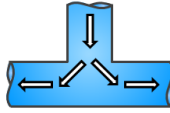
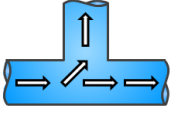
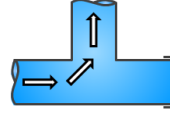
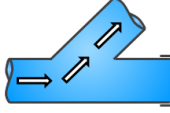
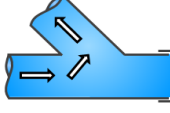
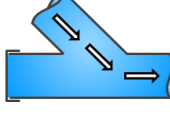
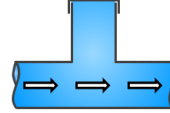
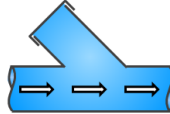
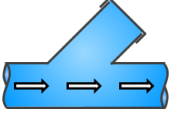


Figura 165 – Ramales a 45° Tipo “Y”.

La presencia de ramales, en sus distintos tipos, dentro de las instalaciones generan pérdidas de energía localizada que se pueden evaluar con los coeficientes de resistencia K_{ram} , que se muestran en la *Tabla 18* con la fórmula:

$$J_{ram}^* = K_{ram} \frac{U^2}{2g} \quad (265)$$

Tabla 18 Coeficiente de resistencia en ramales a 90° y 45°.

FUNCIÓN DEL RAMAL	CONFIGURACIÓN DEL ESCURRIMIENTO	COEFICIENTE DE RESISTENCIA $K_{ram.}$
Enlace		3,00
Bifurcación		1,50
Bifurcación		2,00
Desvío		1,50
Desvío		1,00
Desvío		3,00
Desvío		0,50
Unidirección		0,10
Unidirección		0,05
Unidirección		0,15

- Caudalímetros.

Son instrumentos destinados a medir el caudal o gasto del fluido circulante a través de un conducto cerrado a presión. Existe una gran cantidad de modelos de caudalímetros, alimentados cada uno con sus teorías, lo que induce a confirmar que no hay una fórmula que permita determinar el caudal, sino que el tipo a utilizar será aquel que mejor se adapte a las necesidades teniendo como base la magnitud del caudal, y otras propiedades tales como viscosidad, presión, temperatura y composición química.

La pérdida de energía que produce depende del modelo que se trate y de la forma de diseño dispuesta por el fabricante.

- Tubo Venturi.

Junto con la tobera y la placa - orificio conforman el grupo de medidores de caudal denominados deprimógenos, los que se caracterizan por generar un estrechamiento en el escurrimiento.

Aplicando la ecuación de Bernoulli se logra una expresión que permite determinar la pérdida de energía localizada.

$$J_{\text{ven.}}^* = K_{\text{ven.}} \frac{U^2}{2g} \quad (266)$$

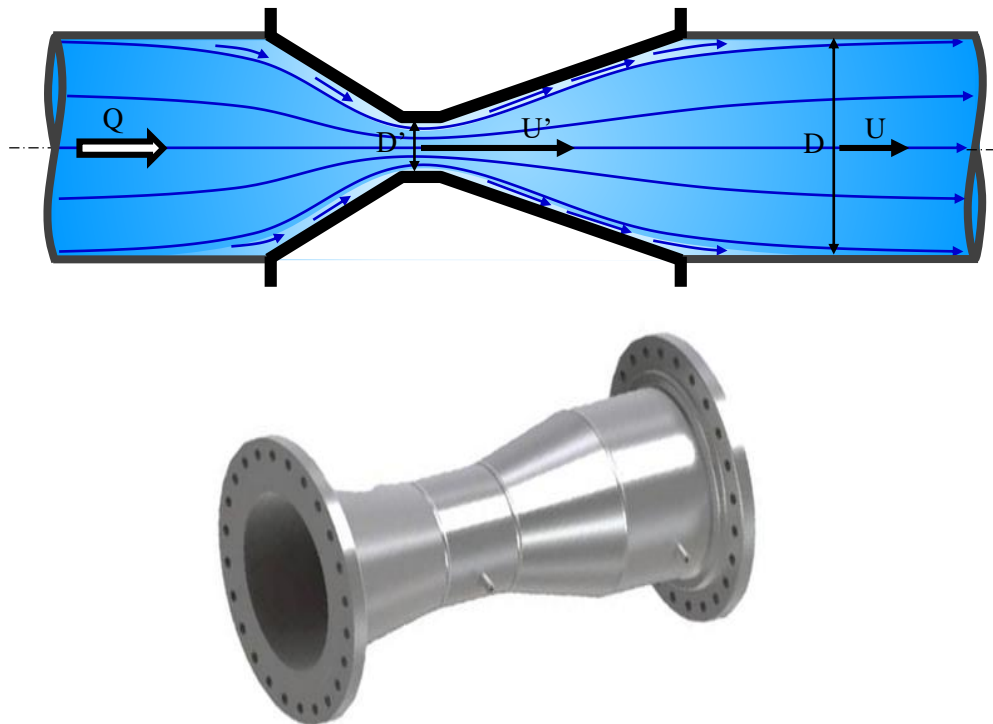



Figura 166 – Tubo Venturi.

Se adopta como valor de coeficiente de resistencia $K_{\text{ven.}}$ al mismo correspondiente con el que se obtiene con el ensanchamiento gradual desarrollado en el punto 15.3., considerando simultáneamente que en la zona de estrechamiento las pérdidas son despreciables. Así se tiene:

$$J_{ven}^* = \alpha_G \left(\frac{\Omega}{\Omega'} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \alpha_G \left[\left(\frac{D}{D'} \right)^2 - 1 \right]^2 \frac{U^2}{2g} \quad (267)$$


 $K_{ven.}$

Donde α_G es el coeficiente de Gibson.

- Tobera.

La pérdida de energía en un caudalímetro tipo tobera o boquilla es superior al Venturi, ya que en este caso hay un explícito desprendimiento de la capa límite en la zona de ensanchamiento. Ver *Figura 167*.

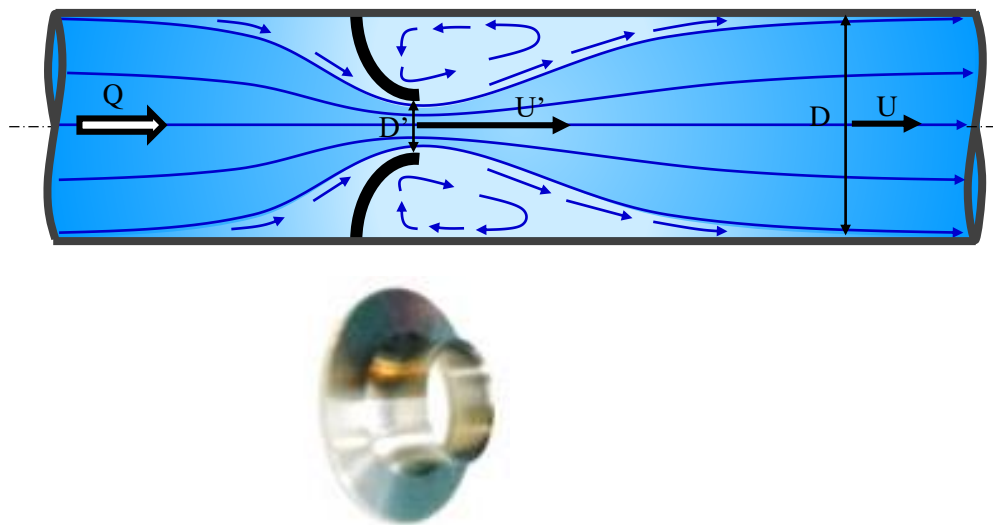


Figura 167 – Tobera o boquilla.

En esta situación, la pérdida de energía es comparable a la calculada por la fórmula de Borda, por lo que se tiene:

$$J_{tob.}^* = \frac{1}{2g} (U' - U)^2$$

El coeficiente de resistencia resulta:

$$K_{tob.} = \left(\frac{\Omega}{\Omega'} - 1 \right)^2 = \left[\left(\frac{D}{D'} \right)^2 - 1 \right]^2 \quad (268)$$

- Placa - orificio.

La placa - orificio o diafragma es la manera más utilizada dentro de los sistemas deprimógenos, y produce la contracción por efecto de la separación del escurrimiento, tanto en la zona de estrechamiento como en la de ensanchamiento. A diferencia de la tobera, en la cual su forma redondeada acompaña al movimiento en la contracción, los valores de la pérdida de energía que se obtienen son mayores.

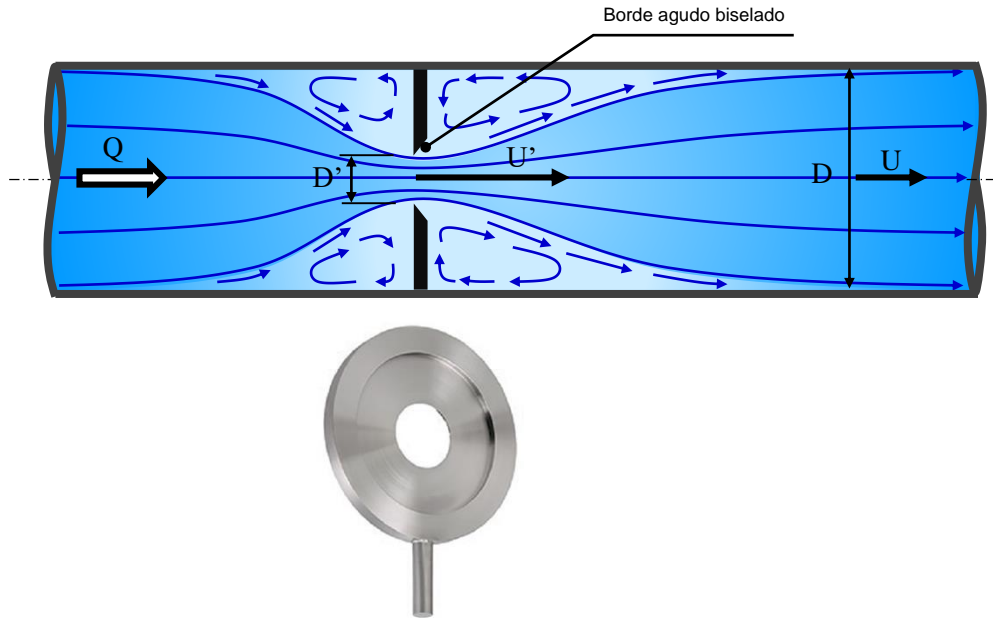


Figura 168 – Placa – orificio o diafragma.

- Rotámetro.

Es un caudalímetro de tipo industrial que se utiliza para la medición de gastos de líquidos y gases con escasa precisión. Su funcionamiento se sustenta en el principio de sección variable, consistente en un tubo troncocónico y un flotador (ver Figura 169).

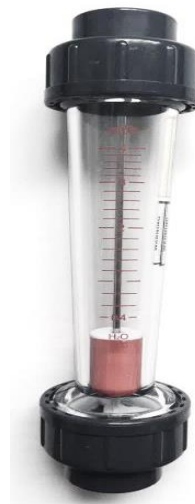


Figura 169 – Rotámetro.

El escurrimiento del fluido provoca la elevación proporcional al caudal del flotador en el tubo ahusado, lo que incrementa el área para la circulación. A mayor caudal más sube el flotante y sobre las marcas ejecutadas en el tubo se puede leer el gasto circulante.

- Turbina.

El caudalímetro de turbina es un instrumento provisto de un rotor con álabes que gira por efecto del paso de la corriente fluida.



Figura 170 – Caudalímetro de turbina.

- * Mecánico.

Está provisto de un cuenta-vueltas que permite la lectura acumulada del líquido circulante ante el giro del rotor.

- * Electrónico.

El rotor gira proporcionalmente al caudal circulante y genera un campo magnético que es leído e interpretado por un sensor.

- Vortex.

Consiste en un dispositivo con un cuerpo transversal al escurrimiento el cual genera vórtices o remolinos que se desplazan hacia aguas abajo. Dichos vórtices se van formando periódicamente y de manera alternativa a cada lado del obstáculo generando diferencias de presión que son censadas a través de un cristal piezoeléctrico.



Figura 171 – Caudalímetro vortex.

El caudal circulante es proporcional a la frecuencia de los vórtices lo que posibilita su utilización como instrumento de medición del gasto.

- Filtros.

Se refiere a unos tipos de accesorios que incluyen tanto rejillas como coladeras.



Figura 172 – Filtros.

Ya se ha indicado que las válvulas de pie en general vienen acompañadas de un filtro para evitar la aspiración de materiales sólidos.

La bibliografía clásica no aporta suficiente información con relación a las pérdidas de energía que producen los filtros, pero particularmente en el caso de rejillas planas las mismas pueden evaluarse mediante la expresión de Creager:

$$K_{rej.} = 1,45 \left(\frac{\Omega}{\Omega_n} \right)^2 - 0,45 \left(\frac{\Omega}{\Omega_n} \right) - 1 \quad (269)$$

Donde:

- Ω Sección transversal de la tubería.
- Ω_n Sección neta de paso de la rejilla.

Las pérdidas son superiores cuando mayor es la velocidad de paso entre las aberturas del filtro, por lo que es aconsejable proyectar o seleccionar al mismo de forma de disminuir la celeridad del movimiento en ese tramo. Una alternativa adecuada y viable consiste en recurrir a un diseño adoptando la forma de bulbo, mediante el cual se obtiene una más amplia sección neta Ω_n y consecuentemente una menor velocidad y pérdida de energía.



Figura 173 – Tipos de filtros.

15.8. Método de las longitudes equivalentes.

Es un procedimiento de resolución operativa hidráulica aplicable a conducciones complementadas con accesorios, el cual permite realizar una particular simplificación al planteamiento clásico. La metodología consiste esencialmente en reemplazar cada uno de los accesorios que se presentan en la traza por una tubería virtual que tenga las mismas características geométricas, físicas e hidráulicas de la existente, y que cuente además con una longitud recta tal que produzca una pérdida de energía equivalente a la que genera la singularidad sustituida.

En síntesis, el concepto se basa en suplantar cada uno de los accesorios por una tubería ideal y de esta manera proceder al cálculo de forma mucho más sencilla, resolviendo simplemente sobre un conducto libre de singularidades en su recorrido.

Así, la tubería de cálculo resulta ser de mayor longitud que la tubería real, de tal modo que el excedente correspondiente al tramo virtual provoca una pérdida de energía general de idéntica magnitud a la pérdida de energía local originada por la acción del accesorio.

Este criterio se puede interpretar fácilmente de manera gráfica a partir de la comparación expuesta en la *Figura 174*.

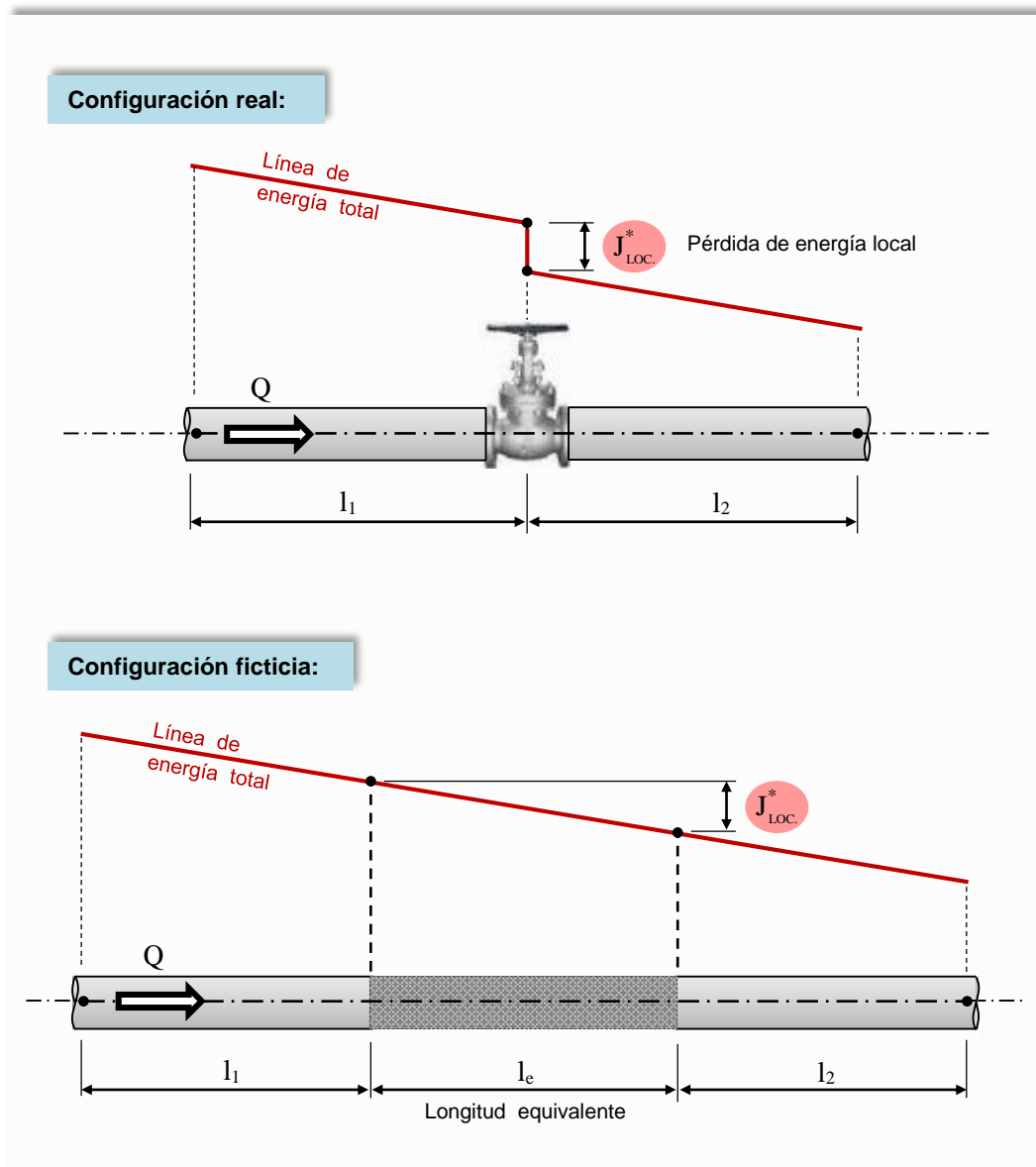


Figura 174 – Reemplazo de tubería equivalente por accesorio.

Adoptando la denominación l_e para designar a la *longitud equivalente* adicional, entonces se plantean dos expresiones distintas que representan separadamente la misma magnitud de la pérdida de energía originada por un accesorio. Así se cuantifica:

- De forma clásica:
$$J_{LOC.}^* = K \frac{U^2}{2g} \quad (270)$$

- Como equivalencia de pérdidas primarias:
$$J_{LOC.}^* = f \frac{l_e}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (\text{Darcy-Weisbach}) \quad (271)$$

$$K \frac{U^2}{2g} = f \frac{l_e}{D} \frac{U^2}{2g} \Rightarrow$$

$$l_e = \frac{K D}{f} \quad (272)$$

Añadiendo las longitudes equivalentes l_e a la dimensión real de la conducción ($l_1 + l_2$ en la *Figura 174*), se obtiene la *longitud de cálculo* l_c que permite la evaluación del escurrimiento hidráulico de la instalación de manera simple como si se tratara solamente de pérdidas generales.

$$l_c = l_1 + l_2 + l_e \quad (273)$$

Es de uso frecuente la obtención de la longitud equivalente l_e a partir de nomogramas, diagramas, ábacos o tablas publicados en libros de texto, manuales y/o folletos del fabricante, en función exclusiva del diámetro y la forma del accesorio, pero haciendo caso omiso a la influencia de la rugosidad k de la tubería. Esta modalidad es común entre los proyectistas cuando se trata de una baja incidencia de las pérdidas secundarias sobre las primarias, pero debe tenerse una precaución especial cuando dicha incidencia es preponderantemente significativa.

En efecto, en instalaciones compuestas de una cantidad importante de accesorios y una pequeña longitud real de la tubería, la práctica anteriormente descrita puede conducir a equivocaciones sustanciales en la determinación de la longitud equivalente l_e , ya que las pérdidas locales calculadas pueden arrojar valores sensiblemente menores a los reales.

Si se utiliza la ecuación (271) se puede evaluar con bastante precisión la longitud equivalente l_e , pero para ello es necesario determinar adecuadamente el coeficiente de fricción f para régimen turbulento. Una variante es mediante el uso de la fórmula de Colebrook y White - ecuación (173) -, o bien otras alternativas algo más sencillas como la de P. K. Swamee y A. K. Jain - ecuación (207). Con cualquiera de esas expresiones mencionadas, la solución se torna muy engorrosa puesto que son ecuaciones implícitas (el término correspondiente al factor de fricción f se encuentra dentro del argumento del logaritmo), por lo que se recomienda el empleo de la fórmula de Altshul en su versión más simplificada - ecuación (204) - la cual es de tipo explícita.

De esta forma, la longitud equivalente l_e se determina introduciendo la fórmula (204) en (272).

$$l_e = \frac{K D}{0,11 \left(\frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{1/4}} = 9,09 \frac{K D}{\left(\frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{1/4}} \Rightarrow$$

$$l_e = 9,09 \frac{K D^{5/4}}{(k + 68v/U)^{1/4}} \quad (274)$$

La expresión (274) se complica si la incógnita del problema es el caudal o gasto Q, puesto que también se ignora la velocidad media U, para lo cual se puede optar por dos procedimientos alternativos a los efectos de cuantificar el valor de la longitud equivalente l_e :

- a) Suponer que el escurrimiento se desarrolla en régimen turbulento con funcionamiento hidráulico tipo rugoso, para lo cual siguiendo con ese criterio se prescinde de la influencia del número de Reynolds representado por el término $68 v / U$ en la expresión (274).

Así se tiene:

$$l_e = 9,09 \frac{K D^{5/4}}{k^{1/4}} \quad (275)$$

- b) Sabiendo que la velocidad económica en impulsiones es del orden de 1,5 a 2,0 m/s, adoptar como velocidad media de circulación el límite superior $U = 2 \text{ m/s}$ para estar así situado del lado de la seguridad en el cálculo.

Entonces:

$$l_e = 9,09 \frac{K D^{5/4}}{(k + 34v)^{1/4}} \quad (276)$$

Resumiendo, con la fórmula (274) o sus variantes simplificadas (275) y (276) se pueden definir con mayor exactitud las longitudes equivalentes l_e de los accesorios intercalados en una instalación por el que escurre un líquido newtoniano en régimen turbulento.

Si se trata particularmente que el fluido en circulación es agua a $15 \text{ }^\circ\text{C}$, se puede recurrir más simplemente a la expresión de Hazen y Williams para resolver el cálculo en cuestión.

Igualando las ecuaciones que representan la pérdida localizada y despejando el término correspondiente a la longitud equivalente l_e :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{LOC.}^* = K \frac{U^2}{2g} = K \frac{Q^2}{2g \Omega^2} = 8 \frac{K Q^2}{g \pi^2 D^4} \\ J_{LOC.}^* = \frac{l_e}{(0,278 C_{H-W})^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D^{4,87}} \quad (\text{Hazen-Williams}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow l_e = 8 \frac{K Q^2}{g \pi^2 D^4} \frac{0,278^{1,85} C_{H-W}^{1,85} D^{4,87}}{Q^{1,85}} = 0,0076 K C_{H-W}^{1,85} Q^{0,15} D^{0,87}$$

\downarrow
 $9,81 \text{ m/s}^2$

$$l_e = 0,0077 K C_{H-W}^{1,85} U^{0,15} \frac{\pi^{0,15} (D^2)^{0,15}}{4^{0,15}} D^{0,87}$$

$$l_e = 0,007 K C_{H-W}^{1,85} U^{0,15} D^{1,17} \quad (277)$$

El empleo de la ecuación (277) permite conocer la longitud equivalente l_e medida en metros m , para lo cual debe introducirse tanto la velocidad media U como el diámetro D con las unidades correspondientes al sistema MKS .

15.9. Pérdidas de energía locales en régimen laminar.

Las pérdidas de energía secundarias desarrolladas hasta el presente numeral se refieren exclusivamente al movimiento del fluido en régimen turbulento, el cual contempla al tipo de circulación en general que más se presenta cuando se trata particularmente de líquidos con baja viscosidad como es el caso del agua.

La tendencia actual para la evaluación de las pérdidas localizadas se orienta hacia una nueva metodología mucho más general que contiene en su análisis al número de Reynolds Re para la determinación del coeficiente de resistencia K (ver al respecto la expresión 232), hecho que permite obtener una mayor precisión sobre el cálculo en régimen laminar.

No obstante ello, y en una primera aproximación, pueden considerarse para el cálculo de las pérdidas de energía secundarias en régimen laminar las mismas expresiones indicadas para escurrimiento turbulento.

Ajustando el cálculo en base a resultados de diversas experiencias realizadas en laboratorios hidráulicos se puede suponer más próxima a la realidad la siguiente mayoración del coeficiente de resistencia K :

- Codos y curvas: Aumentar 5 veces.
- Uniones y bifurcaciones: Incrementar multiplicando por 1,3.

También debe tenerse en cuenta la existencia de gráficos elaborados por los mismos fabricantes que permiten determinar el factor de multiplicación para cada accesorio, el cual debe aplicarse al coeficiente K del escurrimiento turbulento para calcular el correspondiente en régimen laminar.

15.10. Comentarios y recomendaciones.

En los escurrimientos hidráulicos que se plasman a través de tuberías a presión, entre las diversas variables intervinientes, coexisten simultáneamente las pérdidas de energía generales con las locales, debiendo evaluarse convenientemente las mismas en las instancias resolutorias de los problemas que se presentan en la práctica.

Cuando se trata de instalaciones conformadas por conductos de longitudes importantes en su recorrido, resultan ser de muy escasa influencia en el escurrimiento las pérdidas de energía localizadas, razón por la cual algunos autores e investigadores las han denominado erróneamente "pérdidas menores".

A los efectos de tener más en claro la mayor o menor preponderancia relativa de las pérdidas de energía secundarias con respecto a las primarias, se plantea a continuación un problema resuelto que involucra a una misma instalación con 4 situaciones distintas que se diferencian una de otra exclusivamente en la longitud real de la tubería. Ver *Figura 175*.

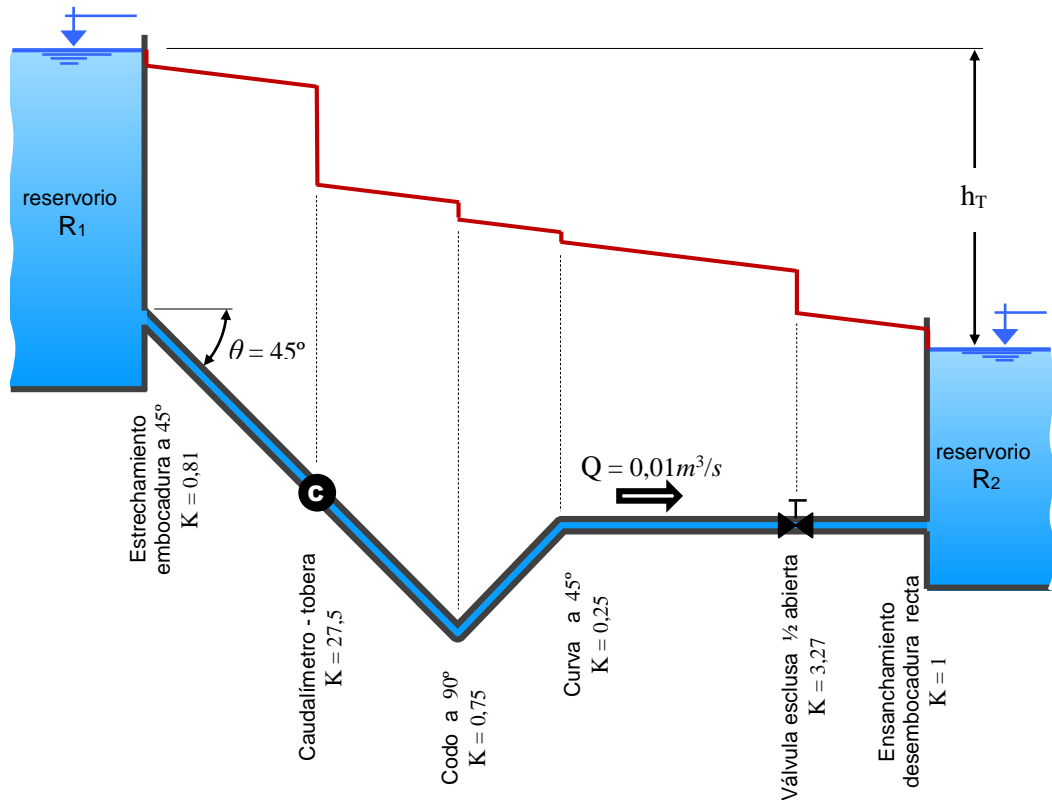


Figura 175 – Croquis de un conducto a presión con accesorios.

Problema

Determinar el desnivel topográfico h_T necesario para que circule agua con un caudal Q a través de una tubería de diámetro D y rugosidad k entre los reservorios R_1 y R_2 , suponiendo separadamente las siguientes 4 opciones de la longitud total del conducto $l = 10.000\ m, 1.000\ m, 100\ m$ y $10\ m$.

Datos fijos:

- $Q = 0,01\ m^3/s$
- $k = 0,0001\ m$ (PRFV)
- $\nu = 0,000001\ m^2/s$ (agua a $20\ ^\circ C$)
- $D = 0,10\ m$

Cálculos preliminares

$$- \Omega = \frac{\pi D^2}{4} = 0,008\ m^2$$

$$- U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{0,001\ m^3/s}{0,008\ m^2} = 1,27\ m/s$$

Pérdidas de energía locales.

- Estrechamiento - embocadura a 45° .

$$K_{est.45^\circ} = 0,5 + 0,3 \cos 45^\circ + 0,2 \cos^2 45^\circ = 0,81$$

$$J_{est.45^\circ}^* = K_{est.45^\circ} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{est.45^\circ}^* = 0,81 \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2} = 0,07\ m$$

- Caudalímetro tipo tobera (relación 0,40).

$$K_{\text{caud.}} = 27,50$$

$$J_{\text{caud.}}^* = K_{\text{caud.}} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{\text{caud.}}^* = 27,50 \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2} = 2,26 m$$

- Codo a 90°.

$$K_{\text{codo } 90^\circ} = 0,75$$

$$J_{\text{codo } 90^\circ}^* = K_{\text{codo } 90^\circ} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{\text{codo } 90^\circ}^* = 0,75 \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2} = 0,06 m$$

- Curva a 45°.

$$K_{\text{curva } 45^\circ} = 0,25$$

$$J_{\text{curva } 45^\circ}^* = K_{\text{curva } 45^\circ} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{\text{curva } 45^\circ}^* = 0,25 \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2} = 0,02 m$$

- Válvula esclusa (50 % abierta).

$$K_{\text{v.esc.50\%}} = 3,27$$

$$J_{\text{v.esc.50\%}}^* = K_{\text{v.esc.50\%}} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{\text{v.esc.50\%}}^* = 3,27 \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2} = 0,27 m$$

- Ensanchamiento - desembocadura recta.

$$K_{\text{ens.}} = 1,00$$

$$J_{\text{ens.}}^* = K_{\text{ens.}} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{\text{ens.}}^* = 1,00 \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2} = 0,08 m$$

Suma de las pérdidas de energía locales

$$\sum J_{\text{LOC.}}^* = J_{\text{est.45}^\circ}^* + J_{\text{caud.}}^* + J_{\text{codo } 90^\circ}^* + J_{\text{curva } 45^\circ}^* + J_{\text{v.esc.50\%}}^* + J_{\text{ens.}}^*$$

$$\sum J_{\text{LOC.}}^* = 0,07 m + 2,26 m + 0,06 m + 0,02 m + 0,27 m + 0,08 m$$

$$\sum J_{\text{LOC.}}^* = 2,76 m$$

Pérdidas de energía generales.

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{1,27 m/s \cdot 0,10 m}{10^{-6} m^2/s} = \frac{127.000}{\downarrow}$$

Régimen turbulento

$$\frac{D}{k} = \frac{0,10 m}{0,0001 m} = 1.000$$

$$\left. \begin{array}{l} Re = 127.000 \\ \frac{D}{k} = 1.000 \end{array} \right\} \text{Del diagrama de Rouse} \rightarrow f = 0,022$$

Solución:

- Caso I - Longitud $l_I = 10.000 m$

$$J_I^* = f \frac{l_I}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_I^* = 0,022 \frac{10.000 m}{0,10 m} \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2}$$

$$J_I^* = 180,85 m$$

$$\Rightarrow h_T = J_I^* + \sum J_{\text{LOC.}}^* = 180,85 m + 2,76 m =$$

$$h_T = 183,61 m$$

- Caso II - Longitud $l_{II} = 1.000 m$

$$J_{II}^* = f \frac{l_{II}}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{II}^* = 0,022 \frac{1.000 m}{0,10 m} \frac{1,27^2 (m/s)^2}{2 \cdot 9,81 m/s^2}$$

$$J_{II}^* = 18,08 m$$

$$\Rightarrow h_T = J_{II}^* + \sum J_{\text{LOC.}}^* = 18,08 m + 2,76 m =$$

$$h_T = 20,84 m$$

- Caso III - Longitud $l_{III} = 100 \text{ m}$

$$J_{III}^* = f \frac{l_{III}}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{III}^* = 0,022 \frac{100 \text{ m}}{0,10 \text{ m}} \frac{1,27^2 \text{ (m/s)}^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$J_{III}^* = 1,81 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h_T = J_{III}^* + \sum J_{LOC}^* = 1,81 \text{ m} + 2,76 \text{ m} =$$

$$h_T = 4,57 \text{ m}$$

- Caso IV - Longitud $l_{IV} = 10 \text{ m}$

$$J_{IV}^* = f \frac{l_{IV}}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$J_{IV}^* = 0,022 \frac{10 \text{ m}}{0,10 \text{ m}} \frac{1,27^2 \text{ (m/s)}^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$J_{IV}^* = 0,18 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h_T = J_{IV}^* + \sum J_{LOC}^* = 0,18 \text{ m} + 2,76 \text{ m} =$$

$$h_T = 2,94 \text{ m}$$

Cuadro resumen de los resultados

CASO	LONGITUD (m)	PÉRDIDA DE ENERGÍA		DESNIVEL h_T (m)	INFLUENCIA DE LA PÉRDIDA DE ENERGÍA LOCAL
		General (m)	Local (m)		
I	10.000	180,85	2,76	183,61	1,50 %
II	1.000	18,08	2,76	20,84	13,24 %
III	100	1,81	2,76	4,57	60,39 %
IV	10	0,18	2,76	2,94	93,88 %

Haciendo una evaluación analítica elemental de los resultados volcados en el cuadro resumen se aprecia por un lado extremo que para el caso I, el cual involucra una muy importante longitud de 10.000 m en la instalación, las pérdidas locales representan apenas el 1,50 % del total, razón por la cual es factible recomendar la simplificación del cálculo despreciando la presencia de las mismas.

No se puede obrar de igual manera en una instalación como la representada en el otro caso extremo individualizado con el numeral IV, donde los artefactos emplazados son exactamente los mismos pero la longitud supuesta de 10 m es sumamente exigua, sensiblemente menor al caso I. En esta situación las pérdidas de energía secundarias son el 93,88 % del total resultando imposible prescindir de ellas en el cálculo.

En las otras dos alternativas intermedias (casos II y III para longitudes de 1.000 m y 100 m respectivamente) se pueden visualizar la mayor o menor preponderancia que producen las singularidades, influjo que a su vez se verá alterado si además se agregan o quitan accesorios, o tratándose de válvulas, si se aumenta o disminuye su grado de apertura.

Por lo anteriormente expresado se concluye que no existe una norma manifiesta que reglamente el límite que determina hasta donde se puede prescindir de las pérdidas de energía locales a los efectos del cálculo, por lo que será en base al conocimiento y experiencia del proyectista la definición del criterio a utilizar al respecto.

16. TUBERÍAS CON GASTO O CAUDAL VARIABLE EN EL RECORRIDO.

Todo lo considerado hasta el presente con relación a las pérdidas de energía generales en tuberías se sustenta sobre la hipótesis que el caudal circulante es constante en toda la longitud del recorrido ($\partial Q / \partial l = 0$). En este apartado se estudiará una metodología que permita arribar a una expresión capaz de cuantificar la pérdida de energía en una tubería en la cual el caudal de entrada Q_e por un extremo es superior al de salida Q_s por el otro.

En efecto, la diferencia entre Q_e y Q_s es un caudal que se pierde a lo largo del conducto como producto de derivaciones laterales o escapes, el cual se denomina *gasto en ruta* Q_r . Una forma muy expeditiva y práctica aplicable al cálculo de los parámetros característicos en redes de distribución de agua potable en tramos de tuberías de sección constan es considerar que ese gasto se pierde con una porcentualidad uniforme en el camino.

$$Q_r = Q_e - Q_s \tag{278}$$

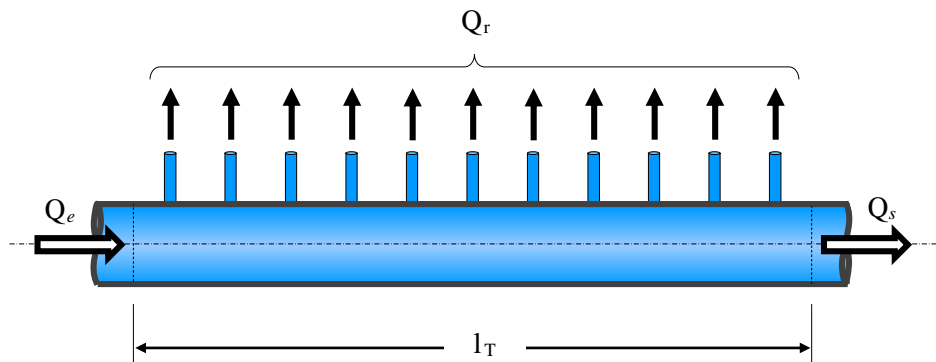


Figura 176 – Gasto en ruta.

Así se tiene que el gasto unitario en ruta es:

$$q_r = \frac{Q_r}{l_r} \tag{279}$$

Y su ecuación de dimensión correspondiente:

$$[q_r] = \frac{L^3 / T}{L}$$

Entonces, entre las expresiones (278) y (279), la relación entre Q_e y Q_s se puede escribir de la siguiente manera:

$$Q_s = Q_e - q_r l_T \quad (280)$$

Considerando en el conducto de la *Figura 176* una sección cualquiera, a una distancia genérica l del área de ingreso como se indica en la *Figura 177*, el caudal que se obtiene en la misma es:

$$Q_l = Q_e - q_r l \quad (281)$$

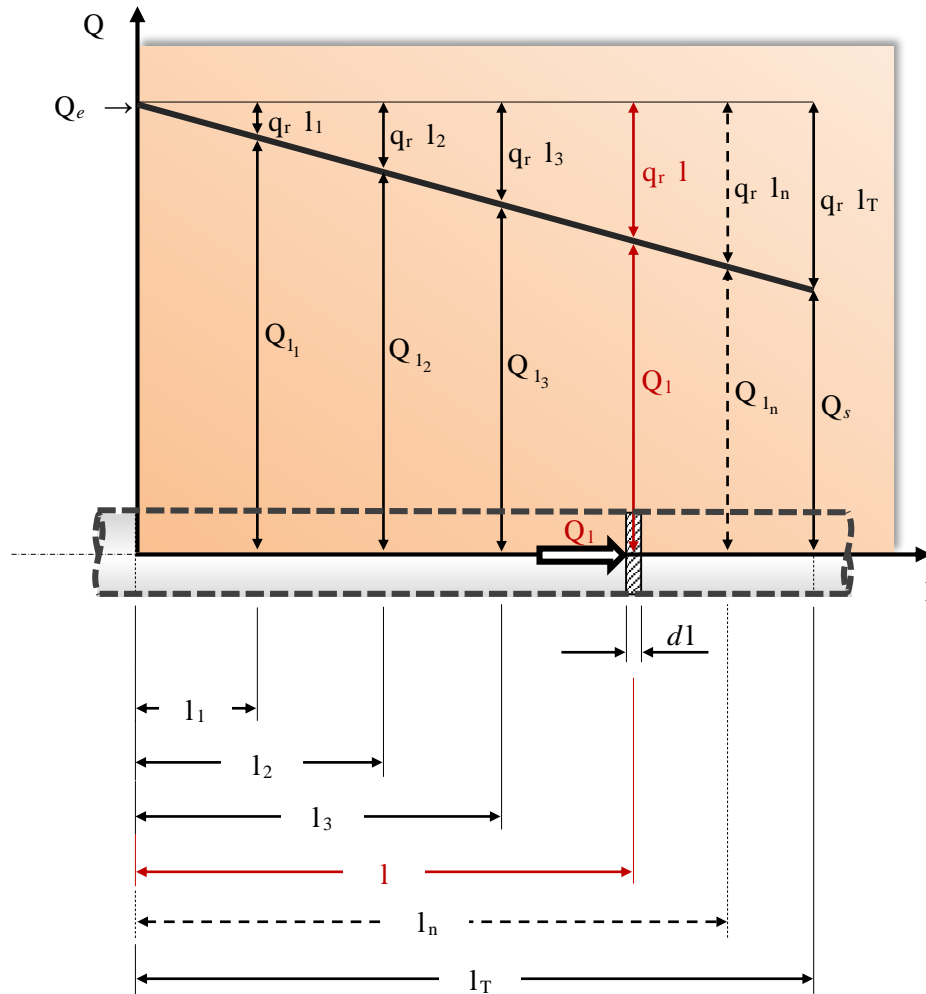


Figura 177 – Diagrama del caudal en función del recorrido.

Así se tiene que en la sección indicada, distante a una longitud l del acceso a la tubería, la pérdida de energía total es:

$$J_l^* = f \frac{l}{D} \frac{U_l^2}{2g} = f \frac{l}{D} \frac{4^2}{\pi^2 (D^2)^2} \frac{Q_l^2}{2g} = \frac{8 f l}{\pi^2 g} \frac{Q_l^2}{D^5}$$

Y la pérdida de energía unitaria:

$$j_l^* = \frac{J_l^*}{l} = \frac{8 f}{\pi^2 g} \frac{Q_l^2}{D^5} = f(Q_l^2) \quad (282)$$

La pérdida de energía hidráulica varía en cada una de las secciones consideradas del conducto, reduciéndose en función de la disminución que experimenta el caudal elevado al cuadrado. Ver fórmula (282).

Reemplazando (281) en (282):

$$j_1^* = \frac{8 f}{\pi^2 g} \frac{(Q_e - q_r l)^2}{D^5}$$

Considerando la pérdida de energía que se desarrolla en la sección de salida, o sea aplicada a toda la longitud de la tubería l_T , la misma se calcula operando de la siguiente manera:

$$J_s^* = \int_0^{l_T} j_1^* dl$$

$$J_s^* = \int_0^{l_T} \frac{8 f}{\pi^2 g} \frac{(Q_e - q_r l)^2}{D^5} dl \tag{283}$$

Con todo el rigor técnico se puede afirmar que el coeficiente de fricción f es variable con relación al recorrido, puesto que también se produce una alteración del número de Reynolds Re por efecto de la disminución de la velocidad media U , pero a los efectos prácticos y sin cometer un error significativo se lo considerará constante en este análisis.

Resolviendo la integral de (283):

$$J_s^* = \frac{8 f}{\pi^2 g D^5} \int_0^{l_T} (Q_e^2 - 2 Q_e q_r l + q_r^2 l^2) dl$$

$$J_s^* = \frac{8 f}{\pi^2 g D^5} \left(Q_e^2 l_T - 2 Q_e q_r \frac{l_T^2}{2} + q_r^2 \frac{l_T^3}{3} \right)$$

$$J_s^* = \frac{8 f}{\pi^2 g D^5} \left(Q_e^2 - \underset{\downarrow Q_r}{Q_e q_r} l_T + \frac{1}{3} \underset{\downarrow Q_r^2}{q_r^2} l_T^2 \right) l_T \tag{284}$$

De (278):

$$Q_e = Q_s - Q_r \tag{285}$$

Introduciendo (285) en (284):

$$J_s^* = \frac{8 f}{\pi^2 g D^5} \left(Q_s^2 + 2 Q_s Q_r + Q_r^2 - Q_s Q_r - Q_r^2 + \frac{Q_r^2}{3} \right) l_T \tag{286}$$

$$Q_c^2 = Q_s^2 + Q_s Q_r + \frac{Q_r^2}{3} \tag{287}$$

Si al término entre paréntesis de la ecuación (286) se lo llama caudal de cálculo Q_c al cuadrado, entonces se tiene:

$$J_s^* = \frac{8 f}{\pi^2 g D^5} Q_c^2 l_T \quad (288)$$

A la expresión (287) se la puede ubicar arbitraria y convenientemente entre los siguientes límites inferior y superior:

$$\underbrace{\left(Q_s + \frac{Q_r}{2} \right)^2}_{\text{Límite inferior}} < \underbrace{Q_c^2}_{Q_c^2} < \underbrace{\left(Q_s + \frac{Q_r}{\sqrt{3}} \right)^2}_{\text{Límite superior}}$$

\uparrow 1,155
 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)$

$$\left(Q_s + 0,50 Q_r \right)^2 < Q_c^2 < \left(Q_s + 0,58 Q_r \right)^2$$

O bien:

$$Q_s + 0,50 Q_r < Q_c < Q_s + 0,58 Q_r \quad (289)$$

Observando la desigualdad (289) se adopta como valor de cálculo Q_c a la media aritmética de los extremos propuestos:

$$Q_c = Q_s + 0,54 Q_r \quad (290)$$

Sustituyendo (290) en (288) se obtiene la pérdida de energía en la sección de salida Ω_s .

$$J_s^* = \frac{8 f}{\pi^2 g D^5} \left(Q_s + 0,54 Q_r \right)^2 l_T \quad (291)$$

No habiendo una certera precisión en la proporcionalidad entre la pérdida de energía y el cuadrado del caudal, resulta posible y menos complejo aceptar como valor de cálculo a la relación (290) simplificada de la siguiente manera:

$$Q_c = Q_s + 0,50 Q_r \quad (292)$$

Asumida esta simplificación, el caudal de cálculo Q_c se puede expresar en función de los caudales entrante Q_e y saliente Q_s . Y ahora reemplazando (278) en (292):

$$Q_c = Q_s + 0,50(Q_e - Q_s) \Rightarrow$$

$$Q_c = \frac{Q_e + Q_s}{2} \quad (293)$$

De lo anteriormente expresado se saca como conclusión que la pérdida de energía en un conducto con gasto en ruta se puede evaluar con suficiente aproximación suponiendo una tubería con caudal constante cuya magnitud sea igual al valor medio entre Q_e y Q_s .

Por lo tanto finalmente se tendrá:

$$J_s^* = \frac{8 f}{\pi^2 g D^5} \left(\frac{Q_e + Q_s}{2} \right)^2 l_T \tag{294}$$

De la fórmula (282) se puede apreciar que la pérdida de energía total varía según una función parabólica, mientras que el caudal circulante va disminuyendo en su recorrido con sentido hacia aguas abajo.

Al estar considerando una tubería de diámetro D constante, simultáneamente con el caudal Q_1 también se reduce la velocidad media U_1 y la energía cinética por unidad de peso:

$$\propto \frac{U_1^2}{2g}$$

Así se tendrá un mayor acercamiento entre la línea de energía total y la de energía piezométrica cuanto más próxima se considere una sección a la de salida. Ver *Figura 178*.

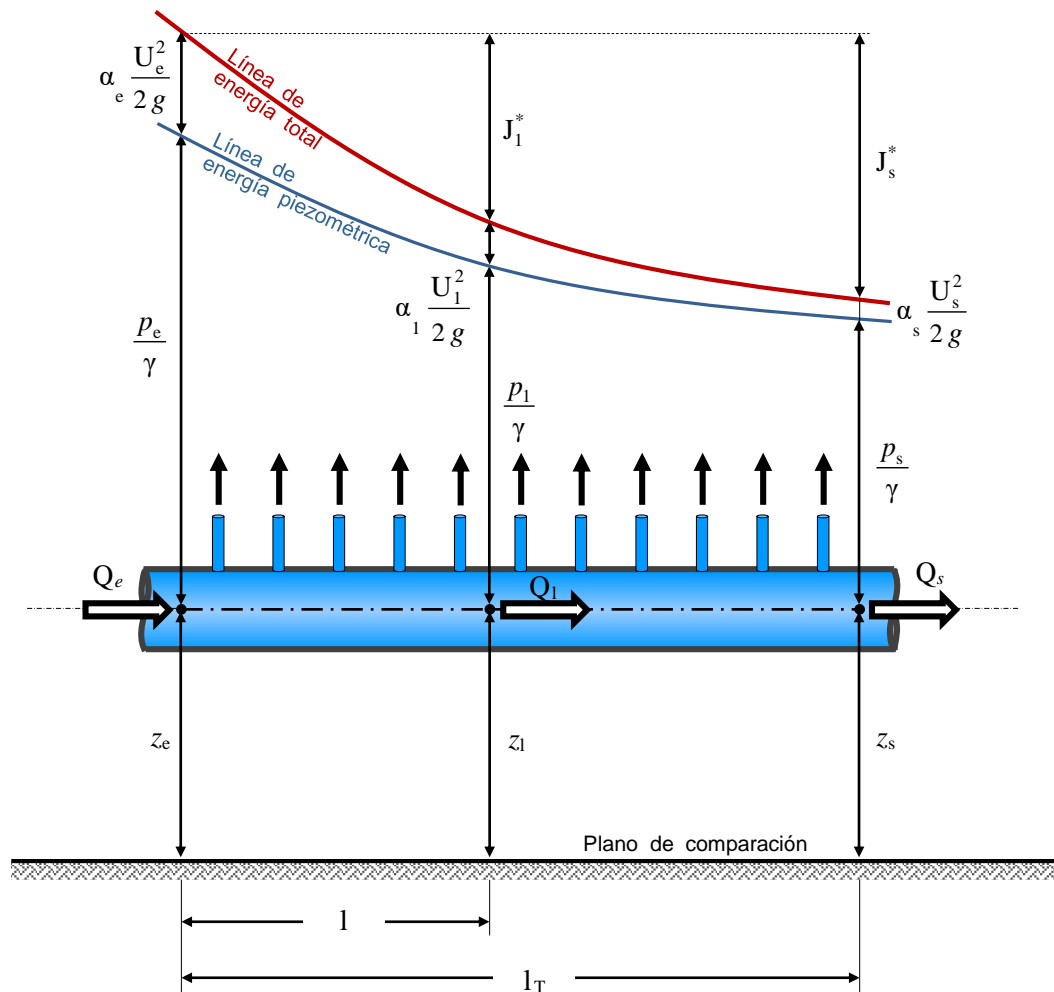


Figura 178 – Líneas de energía en tubería con gasto en ruta.

17. TUBERÍAS COMBINADAS.

17.1. Consideraciones básicas.

El procedimiento más usual de transporte de fluidos es mediante el escurrimiento a través de un sistema de tuberías de forma circular en general, ya que las mismas ofrecen la máxima área encerrada para un mismo perímetro y la mayor resistencia estructural de los conductos a presión.

Todo lo estudiado hasta el presente comprende instalaciones con un único tipo de conducto cerrado y sección constante, en donde pueden encontrarse adicionalmente un cierto número de accesorios intercalados. En gran cantidad de casos relacionados con la ingeniería hidráulica de las tuberías a presión se presentan diversas circunstancias un tanto más complejas, ya que pueden comprender en su estructura más de un conducto o bien uno solo con tramos alineados de distinto diámetro.

Los problemas clásicos que se presentan en la práctica residen esencialmente en la determinación del:

- Gasto o caudal.
Consiste en el cálculo del gasto o caudal conociendo previamente la pérdida de energía, las características geométricas y físicas de las tuberías y las propiedades viscosas del fluido.
- Pérdida de energía.
Requiere precisarse la pérdida de energía que se necesita para provocar el gasto o caudal sabiendo también de antemano la tipología de la conducción y las cualidades del fluido.

Las diversas formas en que se pueden disponer las conducciones cerradas dentro de las instalaciones que se presentan en el campo hidráulico de la ingeniería civil, se resumen gráficamente a continuación:

a - Individual.

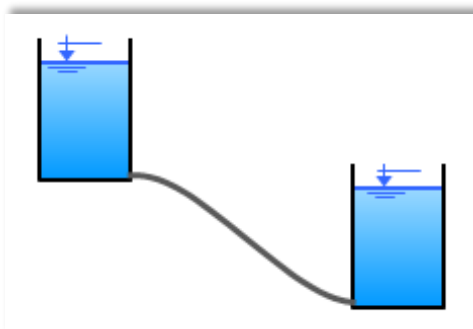


Figura 179 – Tubería individual.

b - Serie.

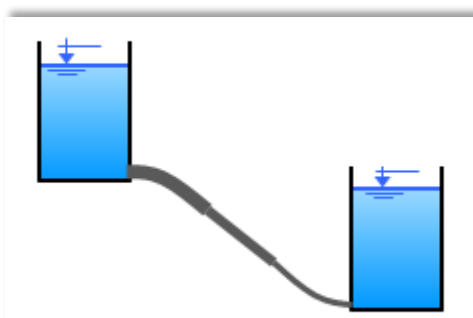


Figura 180 – Tuberías en serie.

c - Paralelo.

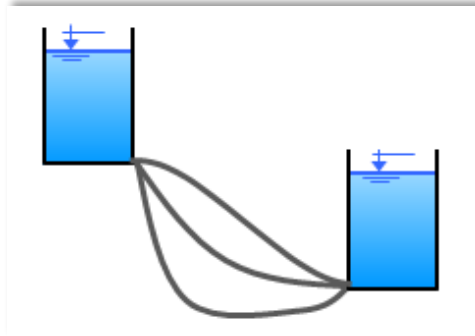


Figura 181 – Tuberías en paralelo.

d - Mixta. Combinación serie - paralelo.

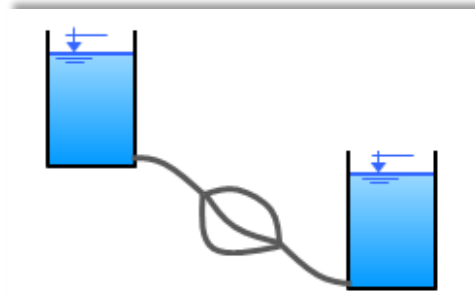


Figura 182 – Tuberías combinadas en serie y paralelo.

e - Malla.

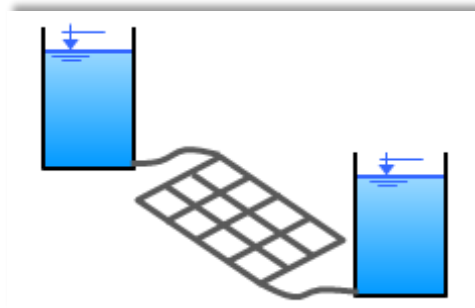


Figura 183 – Tuberías dispuestas con forma de malla.

f - Ramal.

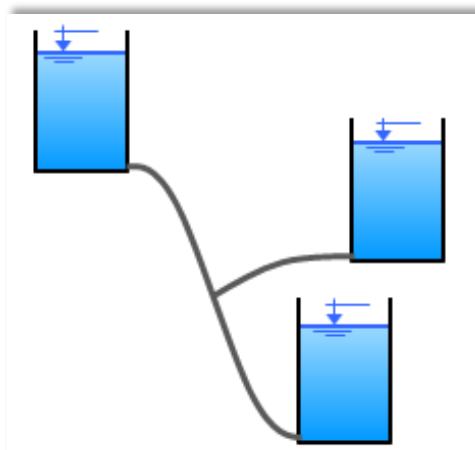


Figura 184 – Tuberías ubicadas tipo ramal.

El cálculo, si se ejecuta de manera minuciosa, contempla la consideración tanto de las pérdidas generales como las localizadas, pudiendo estas últimas ser reemplazadas por una tubería equivalente según la alternativa propuesta en el apartado 15.8.

Según la incidencia que tengan las pérdidas secundarias, se podrá prescindir de las mismas si su influencia es despreciable. Por ejemplo, en instalaciones donde la longitud de la conducción es relativamente pequeña y cuenta además con numerosos artefactos, es por demás importante su contemplación, como así también cuando se trate de regulaciones de caudal mediante el accionamiento de válvulas, ya que las mismas son las responsables de la modificación del gasto.

Las herramientas de cálculo a considerar en el presente análisis comprenden dos casos a saber:

1- Caso general - Solución con criterio racional.

Empleo de la fórmula de Darcy - Weisbach.

$$j = j^* = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} = f \frac{8}{g \pi^2} \frac{Q^2}{D^5} \quad (295)$$

Válida para:

- Todo tipo de líquidos newtonianos.
- Cualquier temperatura del fluido.
- Régimen laminar y turbulento.
- La rugosidad es función relativa del número de Reynolds y la rugosidad absoluta.

2- Caso particular - Solución con criterio empírico.

Uso de la ecuación de Hazen - Williams.

$$j = j^* = \frac{1}{\left(0,278 C_{H-W}\right)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D^{4,87}} \quad (296)$$

Limitaciones:

- Solo aplicable cuando el fluido es agua en estado líquido.
- Temperatura: 15,5° C
- Válido solo para régimen plenamente turbulento.
- La rugosidad se adopta como una propiedad absoluta del material de la tubería.

La diferencia entre ambas formas de encarar el análisis del escurrimiento estriba en la manera de considerar la rugosidad, en la primera metodología se adopta un criterio racional mientras que la segunda es empírica y exclusivamente para agua a la temperatura indicada.

La resolución de las incógnitas que se presentan para la definición de los conductos hidráulicos no resulta ser exacta, por lo que el proyectista guarda la opción de decidir por la herramienta de cálculo que más convenga en función de la facilidad y factibilidad de aplicación.

17.2. Tubería individual.

17.2.1. Comentario general.

Todo lo desarrollado hasta el presente es de aplicación directa al cálculo hidráulico de instalaciones que cuentan únicamente con un solo tipo de tubería, en el cual se consideran las pérdidas de energía generales y eventualmente, si son significativas, las pérdidas locales. Por ser de apreciable interés práctico, dentro de este tipo de escurrimientos, merece la consideración de ser analizado el caso correspondiente a la regulación del caudal mediante la inclusión de una válvula aguas abajo de la tubería.

17.2.2. Regulación con válvula.

El efecto de regular un gasto determinado a través de una conducción se obtiene por medio de la generación de una pérdida de carga localizada creada a través de una válvula situada al pie del recorrido y con un cierto grado de cierre de la misma, de tal forma que permita el escurrimiento del caudal Q deseado.

Su disposición básica en general tiene la forma que se muestra en la *Figura 185*, ubicándola ex profeso al pie de la conducción a los efectos de evitar formación de bolsones de aire ante la acción de cierre.

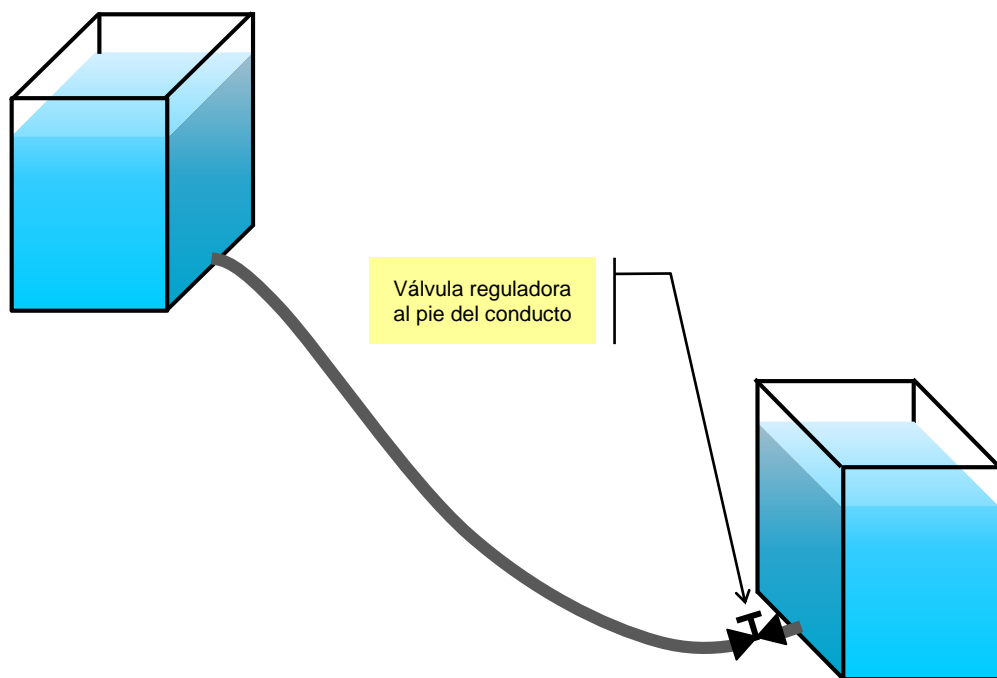


Figura 185 – Tubería individual con regulación del caudal.

Se tienen en cuenta las siguientes hipótesis de cálculo, en los casos en que la tubería de la instalación cuenta con una longitud apreciable:

- La línea de energía potencial o piezométrica es prácticamente coincidente con la línea de energía total, puesto que el término correspondiente a la energía cinética se asume como muy pequeño con relación al de la energía piezométrica.
- No se tiene en cuenta la pérdida por embocadura.
- La única pérdida localizada actuante es la producida por la válvula reguladora.

En la *Figura 186* se representa la línea de energía total superpuesta con la de energía piezométrica de acuerdo a las hipótesis planteadas.

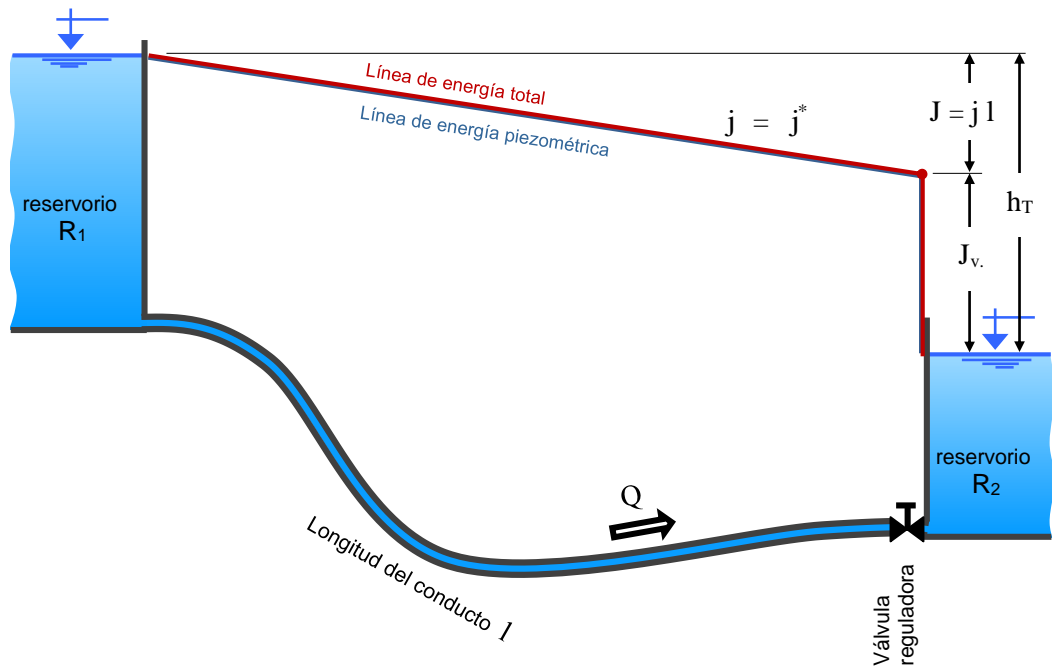


Figura 186– Representación gráfica de las hipótesis de cálculo.

El problema más común que se presenta consiste en la determinación del caudal Q que escurre a través de la tubería cuando la válvula reguladora se presenta con un determinado grado de cierre, la cual produce la correspondiente pérdida de energía hidráulica localizada.

a) Caso general.

Solución con criterio racional. Aplicación de la ecuación de Darcy - Weisbach.

De la *Figura 186* y en las condiciones impuestas por las hipótesis, se debe cumplir que el desnivel topográfico h_T sea igual a la suma de la pérdida de energía por frotamiento J más la pérdida localizada J_v originada por la válvula reguladora.

$$h_T = J + J_v = j l + J_v \quad (297)$$

$$h_T = \underbrace{f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g}}_{\text{Darcy - Weisbach}} + K_v \frac{U^2}{2g}$$

Siendo:

$$U = \frac{4 Q}{\pi D^2}$$

Y:

$$U^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4}$$

Reemplazando en la anterior:

$$h_T = \frac{8}{g \pi^2 D^5} f l Q^2 + \frac{8}{g \pi^2 D^4} K_v Q^2 \quad (298)$$

A partir del grado de cierre de la válvula reguladora con que está operando la instalación se obtiene el coeficiente de resistencia K_v , de tablas o gráficos brindados por el fabricante.

Sacando factor común:

$$h_T = \frac{8}{g \pi^2 D^5} (f 1 + K_v D) Q^2$$

Finalmente:

$$Q = \sqrt{\frac{g \pi^2 D^5 h_T}{8 (f 1 + K_v D)}} \tag{299}$$

En esta instancia todavía no es posible la aplicación directa de la expresión (299), ya que se ignora la magnitud del coeficiente de fricción f , por lo que se procede mediante el uso de aproximaciones sucesivas para su resolución.

Como primer paso se recomienda en la primer tentativa adoptar el valor de $f = f^{(1)}$ extraído del diagrama de H. Rouse cuando el régimen es turbulento y la tubería se comporta hidráulicamente como rugosa. Así se obtiene a partir de la relación:

$$D/k \xrightarrow[\text{de H. Rouse}]{\text{Del diagrama}} f^{(1)}$$

Con esa primera aproximación del coeficiente $f^{(1)}$ se calcula un gasto $Q^{(1)}$ provisorio mediante el uso de la ecuación (299).

Luego se obtiene otro valor del coeficiente de fricción $f^{(2)}$ más próximo a la realidad que el anterior $f^{(1)}$, pero ahora con el auxilio del número de Reynolds $Re^{(1)}$:

$$\left. \begin{aligned} Re^{(1)} &= \frac{U^{(1)} D}{\nu} = \frac{4 Q^{(1)}}{\pi D \nu} \\ D/k & \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\text{de H. Rouse}]{\text{Del diagrama}} f^{(2)}$$

Si $f^{(2)} = f^{(1)}$, entonces el caudal $Q^{(1)}$ representa el gasto definitivo circulante por la tubería.

En caso de no verificarse la misma, se procede a realizar otra iteración determinando un nuevo gasto $Q^{(2)}$, también mediante el empleo de la expresión (299) pero con $f^{(2)}$ y así sucesivamente hasta obtener la suficiente aproximación a la igualdad entre dos valores consecutivos de los coeficientes de resistencia f .

Una vez arribado el cálculo a esa situación de igualdad, se adoptará al último gasto Q obtenido como valor definitivo de la circulación del fluido.

b) Caso particular.

Solución con criterio empírico. Aplicación de la expresión de Hazen - Williams.

En esta hipótesis de cálculo también es válida la expresión (297), en la que reemplazando la (200) correspondiente a las experiencias de Hazen y Williams, se transforma de la siguiente manera:

$$h_T = \frac{1}{\left(0,278 C_{H-W}\right)^{1,85} D^{4,87}} Q^{1,85} + \frac{8 K_v}{g \pi^2 D^4} Q^2 \quad (300)$$

↳ Hazen - Williams

Denominando:

$$cte.1 = \frac{1}{\left(0,278 C_{H-W}\right)^{1,85} D^{4,87}}$$

$$cte.2 = \frac{8 K_v}{g \pi^2 D^4}$$

La ecuación (300) se la replantea en su forma implícita y con los agrupamientos de valores propuestos adopta una forma mucho más sencilla:

$$cte.1 Q^{1,85} + cte.2 Q^2 - h_T = 0 \quad (301)$$

La fórmula (301) resulta ser una ecuación con una sola incógnita, la cual permite el cálculo del caudal Q que escurre por la tubería. Si bien su disposición en la expresión matemática no es la más simple para despejar y determinar el gasto Q , por el hecho de aparecer en dos términos con potencias distintas pero cercana magnitud (1,85 y 2), se aconseja calcular al mismo empleando algún método iterativo como por ejemplo el de aproximaciones sucesivas de Newton - Raphson - Fourier.

Para ello se procede considerando la ecuación (301) como una función $f(Q)$ igualada a cero.

$$f(Q) = cte.1 Q^{1,85} + cte.2 Q^2 - h_T = 0 \quad (302)$$

La medida inicial consiste en adoptar un valor tentativo arbitrario del caudal Q_0 , el cual debe ser positivo y se recomienda de una magnitud del orden resultante del producto entre una velocidad media U_0 aproximada de 1 a 2 m/s y la sección transversal Ω de la tubería ($Q_0 = U_0 \Omega$).

Reemplazando el gasto Q_0 seleccionado dentro de la ecuación (302), se obtendrá un resto $\Delta f(Q_0)$.

$$cte.1 Q_0^{1,85} + cte.2 Q_0^2 - h_T = \Delta f(Q_0)$$

Las iteraciones se efectúan mediante las aproximaciones que se realizan resolviendo la siguiente expresión general:

$$\Delta Q = - \frac{\Delta f(Q)}{\left(\frac{df(Q)}{dQ}\right)} = - \frac{\Delta f(Q)}{cte.1 1,85 Q^{0,85} + cte.2 2 Q}$$

↳ Derivada de la ecuación (302).

↳ El signo negativo tiene por objeto establecer la convergencia en las sucesivas aproximaciones hacia el resultado real.

Concretamente la primera aproximación será:

$$\Delta Q_0 = - \frac{\Delta f(Q_0)}{cte.1 \cdot 1,85 Q_0^{0,85} + cte.2 \cdot 2 Q_0}$$

Se obtiene ahora un nuevo valor de Q_1 más próximo que Q_0 al caudal real:

$$Q_1 = Q_0 + \Delta Q_0$$

Luego, en una segunda aproximación, se procede de manera análoga a los pasos anteriores:

$$cte.1 Q_1^{1,85} + cte.2 Q_1^2 - h_T = \Delta f(Q_1)$$

Entonces:

$$\Delta Q_1 = - \frac{\Delta f(Q_1)}{cte.1 \cdot 1,85 Q_1^{0,85} + cte.2 \cdot 2 Q_1}$$

De esta manera se tiene:

$$Q_2 = Q_1 + \Delta Q_1$$

Y así se continúa sucesivamente hasta obtener un caudal Q_n que se considere definitivo de escurrimiento Q , con un valor del resto $\Delta f(Q_n)$ lo suficientemente pequeño, de modo que pueda darse prácticamente por satisfecha la ecuación (302).

$$Q_n = Q_{n-1} + \Delta Q_{n-1} = Q$$

17.3. Tuberías en serie.

17.3.1. Definición del problema.

Consiste en una instalación compuesta de dos o más tuberías dispuestas una a continuación de la otra, las cuales se pueden diferenciar por los diámetros y/o rugosidades del material constitutivo. El fluido circulante tiene una única trayectoria en donde se producen pérdidas de energía generales por fricción y locales, como consecuencia de embocadura, cambio de diámetros, desembocadura y artefactos intercalados en el recorrido. Ver *Figura 187*.

Un sistema de tuberías dispuestas en serie debe cumplir las siguientes condiciones de frontera:

- 1) Ecuación de continuidad.

El caudal es el mismo en todos y cada uno de los conductos acoplados linealmente, por lo cual se debe cumplir en todos los tramos:

$$Q = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = U_3 \Omega_3 = \dots U_i \Omega_i \dots = U_n \Omega_n = cte.$$

- 2) La suma total de las pérdidas de energía general y locales es igual a la energía disponible.

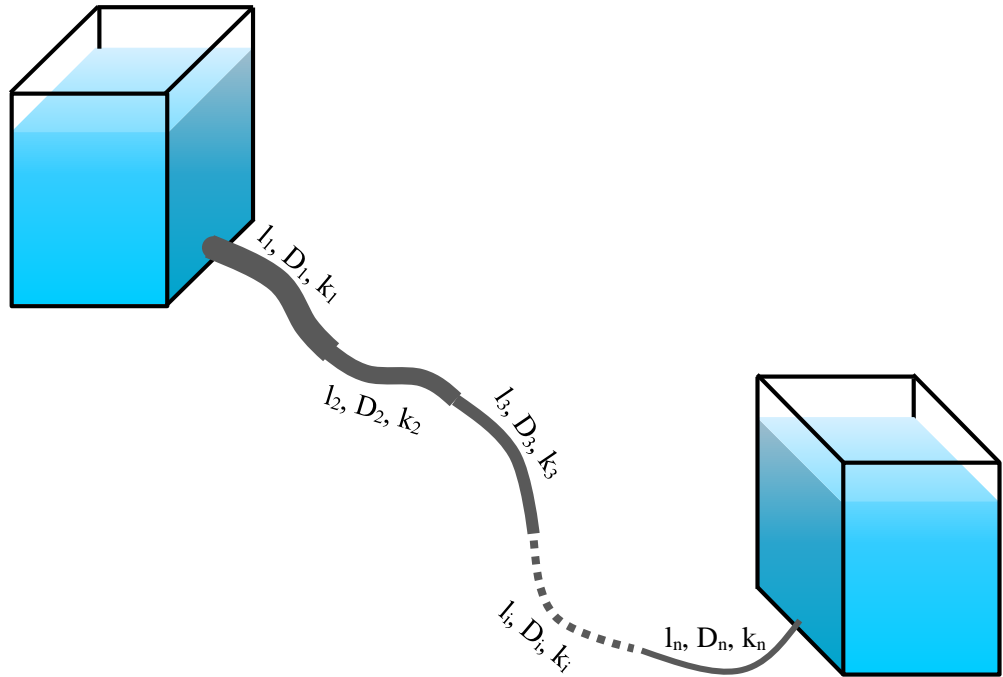


Figura 187 – Instalación con tuberías dispuestas en serie.

17.3.2. Solución con criterio racional.

Válido para cualquier tipo de líquidos newtonianos sin mayor limitación de temperatura empleando la ecuación de Darcy - Weisbach.

a) Considerando las pérdidas de energía locales.

En el caso que se expone en la *Figura 188*, la energía disponible a la que se hace referencia, está dada por el desnivel topográfico h_T entre las cotas de la superficie libre de los reservorios R_1 y R_2 .

La energía disponible h_T resulta igual a la suma de las pérdidas por fricción a lo largo de las tuberías y las pérdidas locales que se gestan por las singularidades:

$$h_T = \sum_{i=1}^n J_{i \text{ FRIC.}}^* + \sum_{j=1}^m J_{j \text{ LOC.}}^* \quad (304)$$

O bien

$$h_T = \sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} + \sum_{j=1}^m K_j \frac{U_j^2}{2g} \quad (305)$$

Siendo:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g \Omega^2} = \frac{Q^2}{2g} \frac{4^2}{\pi^2 D^4}$$

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{8}{g \pi^2} \frac{Q^2}{D^4}$$

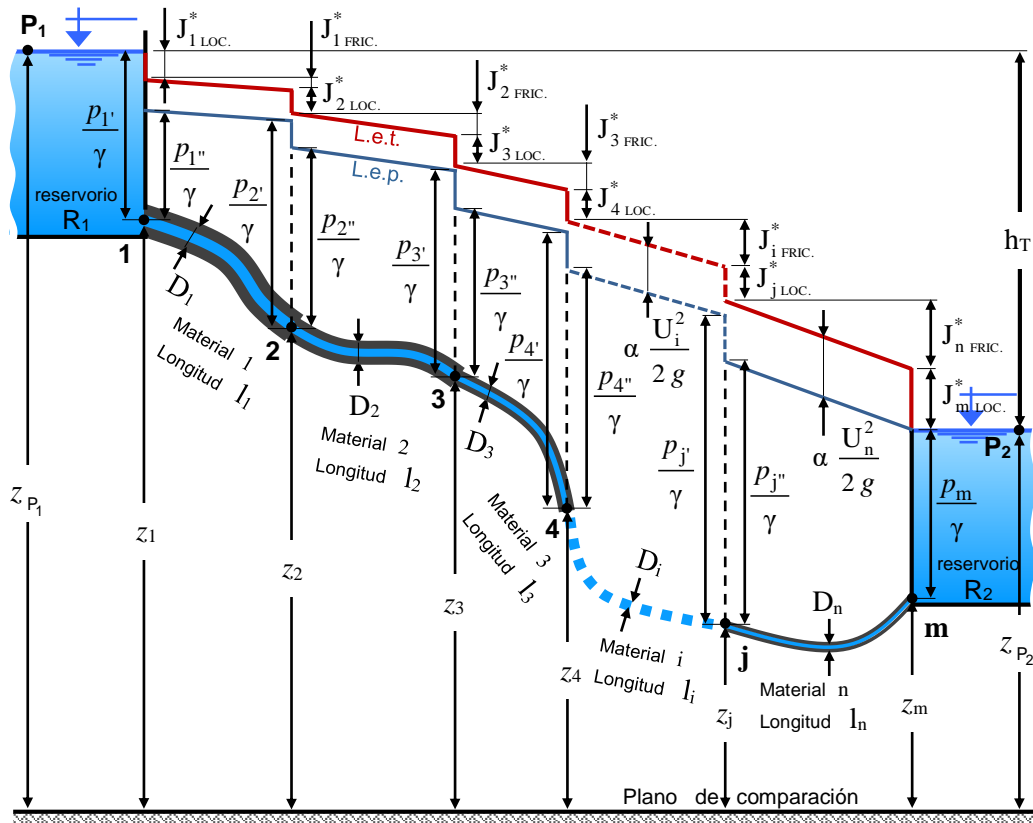


Figura 188 – Detalle de las líneas de energía en una instalación con tuberías en serie.

Reemplazando en (305):

$$h_T = \sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{D_i} \frac{8}{g \pi^2} \frac{Q^2}{D_i^4} + \sum_{j=1}^m K_j \frac{8}{g \pi^2} \frac{Q^2}{D_j^4}$$

$$h_T = \frac{8}{g \pi^2} Q^2 \left[\sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{D_i^5} + \sum_{j=1}^m \frac{K_j}{D_j^4} \right]$$

Despejando Q de la anterior se obtiene una expresión que permite determinar el caudal del fluido que escurre en una instalación con tuberías dispuestas en serie.

$$Q = \pi \sqrt{\frac{g}{8} \frac{h_T}{\sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{D_i^5} + \sum_{j=1}^m \frac{K_j}{D_j^4}}} \quad (306)$$

La presencia de los coeficientes de fricción f_i da lugar a que la solución del problema deba plantearse por vía de un proceso iterativo de aproximaciones. A los efectos concretos del procedimiento resolutivo se aconseja realizar los siguientes pasos prácticos:

- 1- Calcular la relación D_i / k_i (diámetro / rugosidad absoluta) de cada tubería componente del sistema en serie.

- 2- En cada tramo de conducto adoptar un coeficiente de fricción $f_i^{(1)}$ provisorio y tentativo. El superíndice (1) hace referencia a que se corresponde con la 1^{era} aproximación de f y se recomienda comenzar con las magnitudes indicadas en el diagrama de H. Rouse para valores de D_i / k_i en plena turbulencia y tuberías hidráulicamente rugosas.
- 3- Determinar en una primera iteración un caudal provisorio $Q_p^{(1)}$ mediante la aplicación de la ecuación (306), donde todos los términos son datos fehacientes, a excepción de los coeficientes f_i que han sido definidos de forma cuasi arbitraria.
- 4- Mediante la aplicación de la ecuación de continuidad establecer las velocidades medias $U_i^{(1)}$ en cada tramo para esta primer acercamiento donde se supone el escurrimiento de un caudal $Q_p^{(1)}$.

$$U_i^{(1)} = \frac{4 Q_p^{(1)}}{\pi D_i^2} \quad (307)$$

- 5- Con las velocidades medias $U_i^{(1)}$ conseguidas a partir de la ecuación (307) obtener la primera alternativa de los números de Reynolds para cada intervalo de las tuberías componentes:

$$Re_i^{(1)} = \frac{U_i^{(1)} D_i}{\nu} \quad (308)$$

- 6- Del diagrama de H. Rouse:

- Ingresando con $\left\{ \begin{array}{l} \frac{D_i}{k_i} \\ Re_i^{(1)} \end{array} \right.$
- Se extraen nuevos valores del coeficiente de fricción $f_i^{(2)}$ más próximos a la realidad del escurrimiento que los anteriores.
 - a) Si $f_i^{(1)} = f_i^{(2)}$
 - \Rightarrow El caudal $Q_p^{(1)}$ es el caudal definitivo Q_d .
 - b) Si $f_i^{(1)} \neq f_i^{(2)}$
 - \Rightarrow Se vuelve al paso 3- considerando ahora los valores de $f_i^{(2)}$ y así realizar un nuevo cálculo de gasto provisorio a denominar $Q_p^{(2)}$.

- 7- El procedimiento se continúa con un número n de sucesivas iteraciones que finaliza cuando se verifica la condición:

$$f_i^{(n-1)} = f_i^{(n)}$$

En esta instancia el caudal $Q_p^{(n)}$ inicialmente provisorio correspondiente a la iteración n se considera como caudal definitivo de cálculo.

$$Q_d = Q_p^{(2)}.$$

- b) Despreciando las pérdidas de energía locales.

Precedentemente, con relación al cálculo de escurrimientos en tuberías hidráulicas a presión, se ha indicado que en muchos casos se puede prescindir sin mayor error de las pérdidas secundarias por alcanzar valores irrelevantes frente a las generadas por efecto de la fricción a lo largo del conducto. Asumiendo esa hipótesis resolutive resulta que la energía disponible h_T se considere igual a la suma de las pérdidas de energía por fricción generadas en los conductos que componen el sistema en serie, por lo que la ecuación (304) se reduce a:

$$h_T = \sum_{i=1}^n J_{i \text{ FRIC.}}^* \tag{309}$$

Además se consideran prácticamente coincidentes las líneas de energía total con las de energía piezométrica, por el hecho de resultar irrisorio el valor de la energía cinética frente a la correspondiente a la presión. Ver *Figura 189*.

Con esas consideraciones se puede trabajar directamente sobre la línea de energía piezométrica, por lo que la ecuación (309) puede ser expresada en función de las pérdidas de carga. Entonces:

$$h_T = \sum_{i=1}^n J_{i \text{ FRIC.}} \tag{310}$$

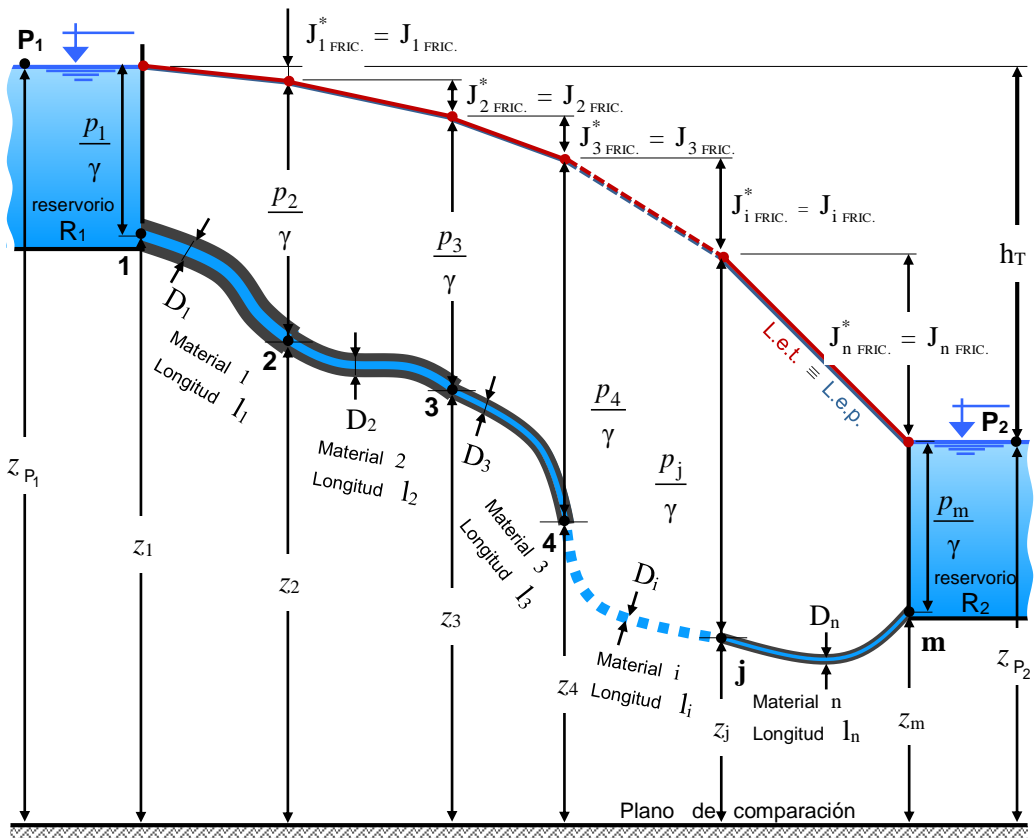


Figura 189 – Líneas de energía ignorando las pérdidas secundarias en tuberías en serie.

Así planteada esta nueva hipótesis, la expresión que permite determinar el caudal Q corresponde a la ecuación (306), pero ignorando el término que representa a las pérdidas de energía locales.

$$Q = \pi \sqrt{\frac{g}{8} \frac{h_T}{\sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{D_i^5}}} \tag{311}$$

Otra vez, la existencia de los coeficientes de fricción f_i dentro de la ecuación (311), provoca que la solución deba buscarse también mediante un procedimiento de aproximaciones.

El gasto Q puede determinarse también de forma iterativa mediante la aplicación de los siete pasos prácticos descritos en el caso anterior, donde se consideran para el cálculo la existencia de las pérdidas secundarias.

Así mismo, el mercado informático provee aplicaciones que resuelven el problema en cuestión teniendo en cuenta el tipo de fluido circulante y las distintas secciones transversales de los conductos.

17.3.3. Solución con la fórmula empírica de Hazen - Williams.

Válido solo en casos de tuberías a presión en las cuales el líquido circulante es agua a temperatura igual o próxima a los $15,5^\circ \text{C}$.

a) Considerando las pérdidas de energía locales.

En general aplica la ecuación general (304), pero particularmente se considera para este caso la fórmula (200) de Hazen - Williams a los efectos de evaluar las pérdidas por fricción. Así entonces se tiene:

$$h_T = \sum_{i=1}^n \frac{l_i Q^{1,85}}{(0,278 C_{H-Wi})^{1,85} D_i^{4,87}} + \sum_{j=1}^m K_j \frac{U_j^2}{2g} \quad (312)$$

\downarrow
 $\sum_{i=1}^n J_{i \text{ FRIC.}}^*$

\downarrow
 $\sum_{j=1}^m J_{j \text{ LOC.}}^*$

Donde:

$$\frac{U_j^2}{2g} = \frac{8}{g \pi^2} \frac{Q^2}{D_j^4} \quad (313)$$

Por consiguiente, insertando (313) en (312):

$$h_T = \left[\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{(0,278 C_{H-Wi})^{1,85} D_i^{4,87}} \right] Q^{1,85} + \left[\sum_{j=1}^m K_j \frac{8}{g \pi^2 D_j^4} \right] Q^2 \quad (314)$$

La expresión (314) permite resolver el problema planteado, donde se tiene una única incógnita que corresponde al caudal Q .

A diferencia del método racional su solución se torna un tanto más simple, dado que el coeficiente de rugosidad C_{H-Wi} se considera único y propio de cada material de los tramos de conducción. Pero por otra parte se presenta la dificultad que la

incógnita Q aparece en dos términos distintos de la ecuación (314) elevados a distintos exponentes pero próximos entre sí en su valor.

La solución puede buscarse aplicando el método de Newton - Raphson - Fourier, que como ya se ha explicado consiste en un algoritmo iterativo convergente. Otra forma resolutoria es mediante el uso de la aplicación informática, programando la ecuación (314) a resolver en una hoja de cálculo y dando valores sucesivos hasta hallar la magnitud de Q que satisfaga la misma.

b) Despreciando las pérdidas de energía locales.

Para este caso es de aplicación la ecuación (312) pero descontando el término que corresponde a las pérdidas localizadas, quedando reducida la expresión al siguiente formato:

$$h_T = \sum_{i=1}^n J_{i \text{ FRIC.}}^* = \sum_{i=1}^n \frac{l_i Q^{1,85}}{(0,278 C_{H-w_i})^{1,85} D_i^{4,87}} \quad (315)$$

Entonces:

$$Q = \left[\frac{h_T}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{(0,278 C_{H-w_i})^{1,85} D_i^{4,87}}} \right]^{1/1,85} \quad (316)$$

Al ser el coeficiente de rugosidad una magnitud fija para cada material componente de las tuberías en serie, la ecuación (316) se resuelve directamente sin necesidad de recurrir al desarrollo de iteraciones de ningún tipo.

17.3.4. Ejemplo numérico.

Se desea determinar el caudal $Q [l/s]$ de agua que escurre desde un reservorio R_1 a otro R_2 , en una instalación con 3 tuberías dispuestas en serie, de acuerdo a lo señalado en la *Figura 190*.

Datos:

- Tubería 1
 - Material: PVC
De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_1 = 0,000007$
 - Longitud $l_1 = 450 \text{ m}$
 - Diámetro $D_1 = 100 \text{ mm}$

- Tubería 2
 - Material: Asbesto Cemento
De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_2 = 0,000030$
 - Longitud $l_2 = 600 \text{ m}$
 - Diámetro $D_2 = 200 \text{ mm}$

- Tubería 3
 - Material: PRFV
De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_3 = 0,000075$
 - Longitud $l_3 = 500 \text{ m}$
 - Diámetro $D_3 = 150 \text{ mm}$
- Pérdida de energía total \equiv Desnivel topográfico.
 $h_T = 25 \text{ m}$
- Fluido: Agua a $15 \text{ }^\circ\text{C}$ → Viscosidad cinemática $\nu = 1,139 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Calcular gasto o caudal Q [l/s], teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

1°) Considerando las pérdidas localizadas.

- a- Empleando la ecuación de Darcy - Weisbach.
- b- Utilizando la fórmula de Hazen - Williams.

2°) Despreciando las pérdidas localizadas.

- a- Aplicando la expresión de Darcy - Weisbach.
- b- Usando la fórmula de Hazen - Williams.

Cálculos auxiliares.

- Secciones hidráulicas transversales:

$$\text{- Tramo 1: } \Omega_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi 0,10^2 \text{ m}^2}{4} = 0,008 \text{ m}^2$$

$$\text{- Tramo 2: } \Omega_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi 0,20^2 \text{ m}^2}{4} = 0,031 \text{ m}^2$$

$$\text{- Tramo 3: } \Omega_3 = \frac{\pi D_3^2}{4} = \frac{\pi 0,15^2 \text{ m}^2}{4} = 0,018 \text{ m}^2$$

- Inversa de las rugosidades relativas:

$$\text{- Tramo 1: } \frac{D_1}{k_1} = \frac{0,10 \text{ m}}{0,000007 \text{ m}} = 14.285,71$$

$$\text{- Tramo 2: } \frac{D_2}{k_2} = \frac{0,20 \text{ m}}{0,000030 \text{ m}} = 6.666,67$$

$$\text{- Tramo 3: } \frac{D_3}{k_3} = \frac{0,15 \text{ m}}{0,000075 \text{ m}} = 2.000,00$$

- Pérdidas primarias:

- * Aplicación de la ecuación (105) de Darcy-Weisbach.

$$\begin{aligned}
 \text{- Tramo 1: } J_{1FR.}^* &= f_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{U_1^2}{2g} = f_1 \frac{450 m}{0,10 m} \frac{Q^2}{2g \Omega_1^2} \\
 J_{1FR.}^* &= f_1 \frac{450 m}{0,10 m} \frac{1}{2 \cdot 9,8 m/s^2 (0,008 m^2)^2} Q^2 \\
 J_{1FR.}^* &= f_1 \cdot 3.587.372,45 Q^2 \quad (317)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{- Tramo 2: } J_{2FR.}^* &= f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{U_2^2}{2g} = f_2 \frac{600 m}{0,20 m} \frac{Q^2}{2g \Omega_2^2} \\
 J_{2FR.}^* &= f_2 \frac{600 m}{0,20 m} \frac{1}{2 \cdot 9,8 m/s^2 (0,031 m^2)^2} Q^2 \\
 J_{2FR.}^* &= f_2 \cdot 195.272,87 Q^2 \quad (318)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{- Tramo 3: } J_{3FR.}^* &= f_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{U_3^2}{2g} = f_3 \frac{500 m}{0,15 m} \frac{Q^2}{2g \Omega_3^2} \\
 J_{3FR.}^* &= f_3 \frac{500 m}{0,15 m} \frac{1}{2 \cdot 9,8 m/s^2 (0,018 m^2)^2} Q^2 \\
 J_{3FR.}^* &= f_3 \cdot 524.901,32 Q^2 \quad (319)
 \end{aligned}$$

- * Aplicación de la ecuación (200) de Hazen-Williams.

$$\begin{aligned}
 \text{- Tramo 1: } J_{1FR.}^* &= \frac{l_1}{\left(0,278 C_{H-W_1}\right)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D_1^{4,87}} \\
 \text{De la Tabla 6: para PVC} &\rightarrow C_{H-W_1} = 150 \\
 J_{1FR.}^* &= \frac{450}{(0,278 \cdot 150)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{0,10^{4,87}} \\
 J_{1FR.}^* &= 33.570,73 Q^{1,85} \quad (320)
 \end{aligned}$$

$$\text{- Tramo 2: } J_{2FR.}^* = \frac{I_2}{\left(0,278 C_{H-W_2}\right)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D_2^{4,87}}$$

De la *Tabla 6*: para As. Cemento $\rightarrow C_{H-W_2} = 135$

$$J_{2FR.}^* = \frac{600}{(0,278 \cdot 135)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{0,20^{4,87}}$$

$$J_{2FR.}^* = 1.860,09 Q^{1,85} \quad (321)$$

$$\text{- Tramo 3: } J_{3FR.}^* = \frac{I_3}{\left(0,278 C_{H-W_3}\right)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D_3^{4,87}}$$

De la *Tabla 6*: para PRFV $\rightarrow C_{H-W_3} = 145$

$$J_{3FR.}^* = \frac{500}{(0,278 \cdot 145)^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{0,15^{4,87}}$$

$$J_{3FR.}^* = 5.513,05 Q^{1,85} \quad (322)$$

• Pérdidas secundarias:

- 1 - Embocadura recta con bordes vivos.

$$J_{1LOC.}^* = K_1 \frac{U_1^2}{2g}$$

Donde: $K_1 = 0,50$

$$J_{1LOC.}^* = 0,50 \frac{Q^2}{2g \Omega_1^2} = \frac{0,50}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 (0,008 \text{ m}^2)^2} Q^2$$

$$J_{1LOC.}^* = 398,60 Q^2 \quad (323)$$

- 2 - Ensanchamiento brusco.

$$J_{2LOC.}^* = K_2 \frac{U_1^2}{2g} = J_{ens.}^* =$$

$$J_{2LOC.}^* = J_{ens.}^* = 1,1 \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \frac{U_1^2}{2g}$$

↓
Fórmula de Borda con
corrección de Boussinesq

$$J_{2\text{LOC.}}^* = J_{\text{ens.}}^* = \underbrace{1,1 \left[1 - \left(\frac{100\text{ mm}}{200\text{ mm}} \right)^2 \right]^2}_{0,275} \frac{U_1^2}{2g}$$

$$J_{2\text{LOC.}}^* = 0,275 \frac{Q^2}{2g \Omega_1^2} = \frac{0,275}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 (0,008 \text{ m}^2)^2} Q^2$$

$$J_{2\text{LOC.}}^* = 219,23 Q^2 \quad (324)$$

- **3 - Estrechamiento brusco.**

$$J_{3\text{LOC.}}^* = K_3 \frac{U_3^2}{2g} = J_{\text{est.}}^* = K_{\text{est.}} \frac{U_3^2}{2g}$$

$$J_{3\text{LOC.}}^* = J_{\text{est.}}^* = \left(\frac{1}{\varphi_c} - 1 \right)^2 \frac{U_3^2}{2g}$$

Relación: $\frac{\Omega_3}{\Omega_2} = \frac{0,018 \text{ m}^2}{0,031 \text{ m}^2} = 0,58 \cong 0,60$

De la *Tabla 10*:

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Coeficiente de contracción: } \varphi_c = 0,712 \\ \text{Coeficiente de resistencia: } K_{\text{est.}} = 0,164 \end{cases}$$

$$J_{3\text{LOC.}}^* = 0,164 \frac{Q^2}{2g \Omega_3^2} = \frac{0,164}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 (0,018 \text{ m}^2)^2} Q^2$$

$$J_{3\text{LOC.}}^* = 25,83 Q^2 \quad (325)$$

- **4 - Desembocadura.**

$$J_{4\text{LOC.}}^* = K_4 \frac{U_3^2}{2g}$$

Donde: $K_4 = 1,00$

$$J_{4\text{LOC.}}^* = 1,00 \frac{Q^2}{2g \Omega_3^2} = \frac{1,00}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 (0,018 \text{ m}^2)^2} Q^2$$

$$J_{4\text{LOC.}}^* = 157,47 Q^2 \quad (326)$$

Solución.

En general se debe cumplir:

$$h_T = J_{FR.}^* + J_{LOC.}^* \quad (327)$$

- Adoptando la hipótesis I.

1°) Se consideran las pérdidas localizadas.

a- Empleo de la ecuación de Darcy-Weisbach.

En particular, tomando como referencia la *Figura 190* y los condicionamientos planteados en la hipótesis, se tiene:

$$h_T = 25m = J_{1FR.}^* + J_{2FR.}^* + J_{3FR.}^* + J_{1LOC.}^* + J_{2LOC.}^* + J_{3LOC.}^* + J_{4LOC.}^* \quad (328)$$

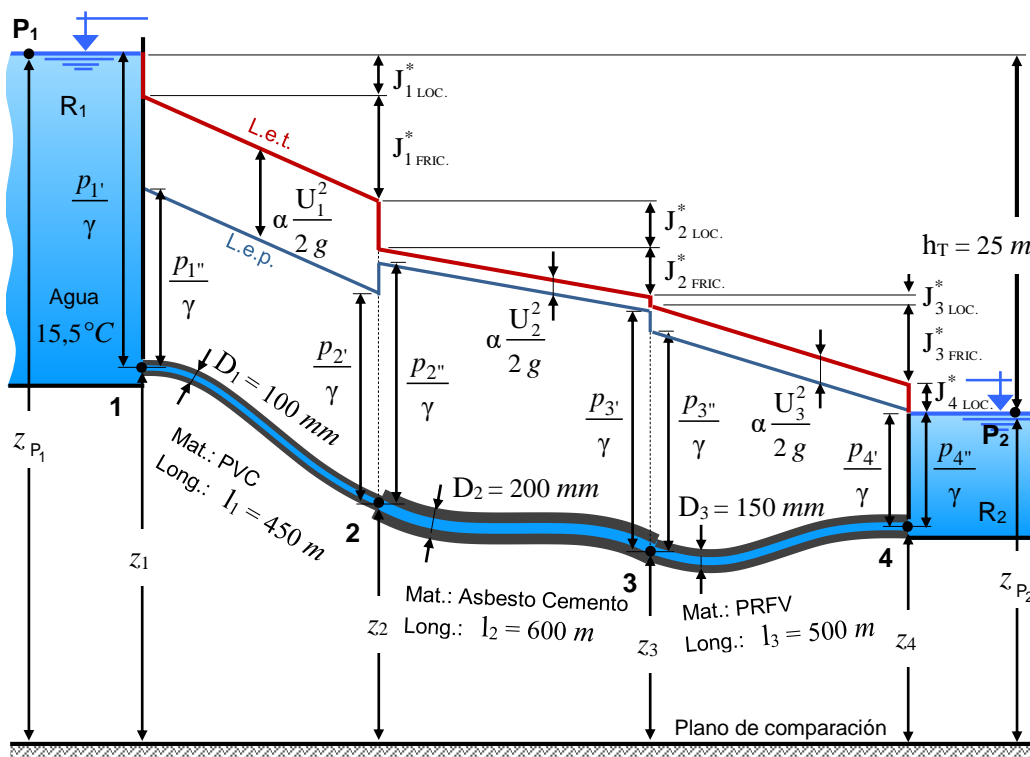


Figura 190 – Problema resuelto de tuberías en serie considerando las pérdidas secundarias.

Reemplazando (317), (318), (319), (323), (324), (325) y (326) en (328):

$$h_T = f_1 3.587.372,45 Q^2 + f_2 195.272,87 Q^2 + f_3 524.901,32 Q^2 + 398,60 Q^2 + 219,23 Q^2 + 25,83 Q^2 + 154,47 Q^2 = 25m \quad (329)$$

A los efectos del cálculo del caudal que escurre por la instalación, se procede mediante la ejecución de tanteos de la siguiente forma:

1° aproximación -

Se inicia un proceso iterativo adoptando primeramente valores tentativos del coeficiente de fricción f . Por ejemplo, en este caso y de manera arbitraria se parte con magnitudes correspondientes a turbulencia plena de tuberías rugosas.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(1)} = 0,010 \\ f_2^{(1)} = 0,013 \\ f_3^{(1)} = 0,017 \end{array} \right.$$

Sustituyendo esos coeficientes de fricción en la ecuación (329) se tendrá una expresión modificada con un caudal $Q^{(1)}$ aproximado:

$$h_T = 0,010 \cdot 3.587.372,45 Q^{(1)2} + 0,013 \cdot 195.272,87 Q^{(1)2} + 0,017 \cdot 524.901,32 Q^{(1)2} + 398,60 Q^{(1)2} + 219,23 Q^{(1)2} + 25,83 Q^{(1)2} + 154,47 Q^{(1)2} = 25 m$$

$$h_T = 48.136,72 Q^{(1)2} = 25 m \Rightarrow$$

$$Q^{(1)} = \sqrt{\frac{25}{48.127,42}} \frac{m^3}{s} = 0,02279 \frac{m^3}{s}$$

$$Q^{(1)} \cong 0,023 \frac{m^3}{s}$$

$$* Re_1^{(1)} = \frac{U_1^{(1)} D_1}{\nu} = \frac{Q^{(1)} D_1}{\Omega_1 \nu} = \frac{0,023 \cdot 0,10}{0,008 \cdot 1,139 \cdot 10^{-6}} = 252.414,40$$

$$\text{Con } \left\{ \begin{array}{l} Re_1^{(1)} = 252.414,40 \\ \frac{D_1}{k_1} = 14.285,71 \end{array} \right. \Rightarrow \text{del diagrama de H. Rouse: } f_1^{(2)} \cong 0,016 \quad (330)$$

$$* Re_2^{(1)} = \frac{U_2^{(1)} D_2}{\nu} = \frac{Q^{(1)} D_2}{\Omega_2 \nu} = \frac{0,023 \cdot 0,20}{0,031 \cdot 1,139 \cdot 10^{-6}} = 130.278,40$$

$$\text{Con } \left\{ \begin{array}{l} Re_2^{(1)} = 130.278,40 \\ \frac{D_2}{k_2} = 6.666,67 \end{array} \right. \Rightarrow \text{del diagrama de H Rouse: } f_2^{(2)} \cong 0,018 \quad (331)$$

$$* Re_3^{(1)} = \frac{U_3^{(1)} D_3}{\nu} = \frac{Q^{(1)} D_3}{\Omega_3 \nu} = \frac{0,023 \cdot 0,15}{0,018 \cdot 1,139 \cdot 10^{-6}} = 168.276,26$$

$$\text{Con } \begin{cases} Re_3^{(1)} = 168.276,26 \\ \frac{D_3}{k_3} = 2.000,00 \end{cases} \Rightarrow \text{del diagrama de H. Rouse:} \quad f_3^{(2)} \cong 0,019 \quad (332)$$

$$\text{Como resulta ser } \begin{cases} f_1^{(1)} \neq f_1^{(2)} \\ f_2^{(1)} \neq f_2^{(2)} \\ f_3^{(1)} \neq f_3^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \text{Se procede a realizar un nuevo tanteo.}$$

2° aproximación -

Asumiendo que los coeficientes de fricción determinados en el paso anterior son más cercanos a la realidad, se vuelve a ejecutar una segunda aproximación. Reemplazando los valores indicados en (330), (331) y (332) dentro de la ecuación (329) se tendrá una expresión en correspondencia con otro caudal más cercano a la realidad:

$$h_T = 0,016 \cdot 3.587.372,45 Q^{(2)2} + 0,018 \cdot 195.272,87 Q^{(2)2} + 0,019 \cdot 524.901,32 Q^{(2)2} + 398,60 Q^{(2)2} + 219,23 Q^{(2)2} + 25,83 Q^{(2)2} + 154,47 Q^{(2)2} = 25m$$

$$h_T = 71.687,24 Q^{(2)2} = 25m \Rightarrow$$

$$Q^{(2)} = \sqrt{\frac{25}{71.687,24}} \frac{m^3}{s} = 0,01867 \frac{m^3}{s}$$

$$Q^{(2)} \cong 0,019 \frac{m^3}{s}$$

$$* Re_1^{(2)} = \frac{U_1^{(2)} D_1}{\nu} = \frac{Q^{(2)} D_1}{\Omega_1 \nu} = \frac{0,019 \cdot 0,10}{0,008 \cdot 1,139 \cdot 10^{-6}} = 208.516,24$$

$$\text{Con } \begin{cases} Re_1^{(2)} = 208.516,24 \\ \frac{D_1}{k_1} = 14.285,71 \end{cases} \Rightarrow \text{del diagrama de H. Rouse:} \quad f_1^{(3)} \cong 0,016$$

$$* Re_2^{(2)} = \frac{U_2^{(2)} D_2}{\nu} = \frac{Q^{(2)} D_2}{\Omega_2 \nu} = \frac{0,019 \cdot 0,20}{0,031 \cdot 1,139 \cdot 10^{-6}} = 107.621,29$$

$$\text{Con } \begin{cases} Re_2^{(2)} = 107.621,29 \\ \frac{D_2}{k_2} = 6.666,67 \end{cases} \Rightarrow \text{del diagrama de H. Rouse:} \quad f_2^{(3)} \cong 0,018$$

$$* Re_3^{(2)} = \frac{U_3^{(2)} D_3}{\nu} = \frac{Q^{(2)} D_3}{\Omega_3 \nu} = \frac{0,019 \cdot 0,15}{0,018 \cdot 1,139 \cdot 10^{-6}} = 139.010,83$$

$$\text{Con } \begin{cases} Re_3^{(2)} = 139.010,83 \\ \frac{D_3}{k_3} = 2.000,00 \end{cases} \Rightarrow \text{del diagrama de H. Rouse: } f_3^{(3)} \cong 0,019$$

$$\text{Se verifica que } \begin{cases} f_1^{(2)} \cong f_1^{(3)} \\ f_2^{(2)} \neq f_2^{(3)} \\ f_3^{(2)} \neq f_3^{(3)} \end{cases} \Rightarrow \text{El gasto de cálculo definitivo se fija en: } Q = Q^{(2)} = 0,01867 \frac{m^3}{s}$$

Por lo tanto, con las condiciones impuestas en la hipótesis I, se estima que el caudal circulante es:

$$Q = 18,67 \frac{l}{s} \tag{333}$$

- Adoptando la hipótesis II.

1º) Se consideran las pérdidas localizadas.

b- Utilización de la fórmula de Hazen-Williams.

Continúa siendo válida la ecuación (328) para esta hipótesis, que tiene en cuenta simultáneamente las pérdidas de energía por fricción y las locales. Reemplazando en este caso las expresiones (320), (321), (322), (323), (324), (325) y (326) en (328):

$$h_T = 33.570,73 Q^{1,85} + 1.860,09 Q^{1,85} + 5.513,05 Q^{1,85} + 398,60 Q^2 + 219,23 Q^2 + 25,83 Q^2 + 154,47 Q^2 = 25m$$

Entonces:

$$40.943,87 Q^{1,85} + 801,13 Q^2 = 25m \tag{334}$$

Así se conforma una ecuación con una sola incógnita, cuyo resultado se determina mediante algún método de aproximaciones sucesivas como por ejemplo el correspondiente a Newton - Raphson - Fourier.

Del cálculo respectivo se obtiene el gasto que escurre mediante la aplicación de la hipótesis II:

$$Q = 18,20 \frac{l}{s} \tag{335}$$

- Adoptando la hipótesis III.

2°) Se desprecian las pérdidas localizadas.

a- Aplica la expresión de Darcy-Weisbach.

Para este caso, en el cual no se consideran las pérdidas de energía secundarias (ver *Figura 191*), la ecuación general (327) se reduce a:

$$h_T = J_{FR.}^* \quad (336)$$

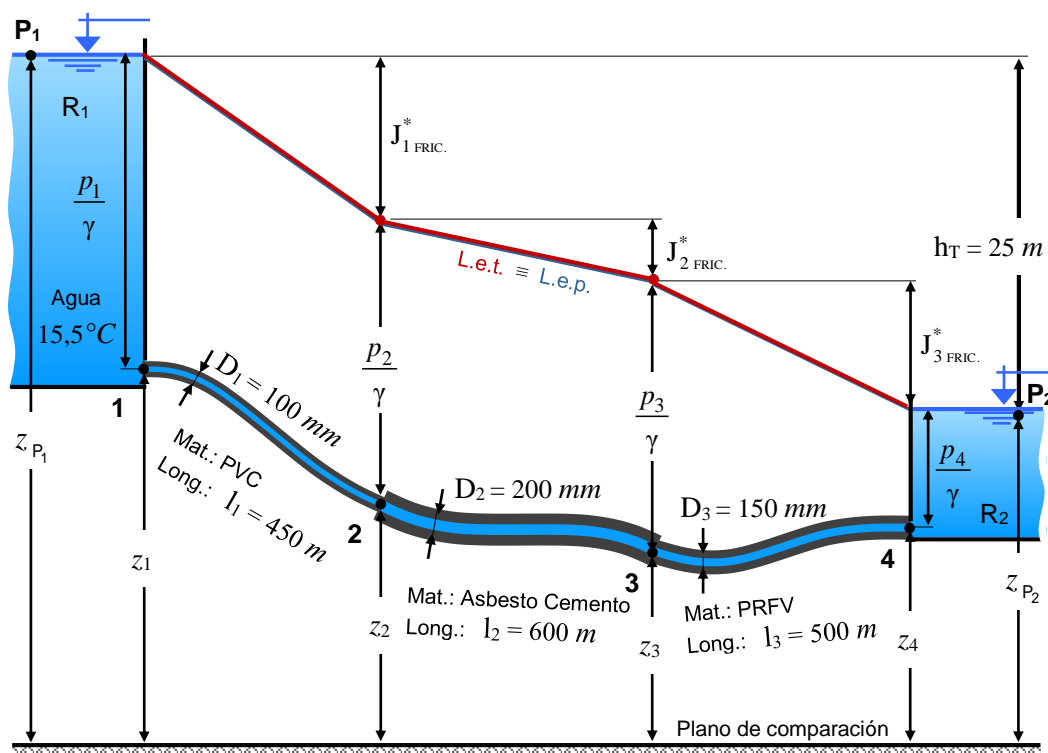


Figura 191 – Problema resuelto de tuberías en serie despreciando las pérdidas secundarias.

Y particularmente las expresiones (328) y (329) se contraen de la siguiente manera:

$$h_T = 25m = J_{1FR.}^* + J_{2FR.}^* + J_{3FR.}^* \quad (337)$$

$$f_1 \cdot 3.587.372,45 Q^2 + f_2 \cdot 195.272,87 Q^2 + f_3 \cdot 524.901,32 Q^2 = 25m \quad (338)$$

El caudal Q circulante se calcula de forma similar al caso de la hipótesis I, es decir mediante un procedimiento basado en tanteos de aproximación.

1° aproximación -

Se adoptan los coeficientes de fricción f para cada tramo de tubería con el mismo criterio anterior. Así se selecciona arbitraria y racionalmente:

$$\begin{cases} f_1^{(1)} = 0,010 \\ f_2^{(1)} = 0,013 \\ f_3^{(1)} = 0,017 \end{cases}$$

Reemplazando esos valores en la ecuación (338), se obtiene una expresión con una primera versión aproximada del caudal que se denomina $Q^{(1)}$.

$$h_T = 0,010 \cdot 3.587.372,45 Q^{(1)2} + 0,013 \cdot 195.272,87 Q^{(1)2} + 0,017 \cdot 524.901,32 Q^{(1)2} = 25m$$

$$h_T = 47.335,59 Q^{(1)2} = 25m \Rightarrow$$

$$Q^{(1)} = \sqrt{\frac{25}{47.335,59}} \frac{m^3}{s} = 0,02298 \frac{m^3}{s}$$

$$Q^{(1)} \cong 0,023 \frac{m^3}{s}$$

Se puede constatar que esta aproximación inicial del gasto $Q^{(1)} \approx 0,023 \text{ m}^3/\text{s}$ resulta ser de similar magnitud, hasta el tercer decimal, a la obtenida en el estudio analítico con la hipótesis I, es decir sin considerar las pérdidas de energía locales.

El procedimiento de cálculo se continúa de igual forma y con los mismos valores que en esa situación general anterior, es decir que el caudal alcanzado mediante la aplicación de la hipótesis I va a resultar prácticamente igual al que se obtenga empleando la hipótesis III. O sea:

$$Q = 18,67 \frac{l}{s} \quad (339)$$

- Adoptando la hipótesis IV.

2°) Se desprecian las pérdidas localizadas.

b- Uso de la fórmula de Hazen-Williams.

En las presentes condiciones consideradas se ajusta la fórmula (334) a esta nueva hipótesis, para ello se elimina el término $801,13 Q^2$ que representa a las pérdidas de energía locales.

De esta forma la ecuación en cuestión se simplifica de la siguiente manera:

$$40.943,87 Q^{1,85} = 25m \quad (340)$$

Despejando el gasto Q y resolviendo:

$$Q = \left(\frac{25}{40.943,87} \right)^{1/1,85} \frac{m^3}{s} = 0,01830 \frac{m^3}{s}$$

Finalmente:

$$Q = 18,30 \frac{l}{s} \tag{341}$$

- **Conclusión**

En el siguiente cuadro se indican los resultados de los gastos obtenidos según cada una de las cuatro hipótesis consideradas.

⋮
Cuadro resumen de los resultados

HIPÓTESIS	CAUDAL Q [l/s]
I	18,67
II	18,20
III	18,67
IV	18,30

Comparando los resultados se observa una significativa paridad de magnitud entre los mismos, lo cual deriva en que la desviación estándar sea muy pequeña. Como consecuencia de ello se extraen las siguientes conclusiones destinadas al cálculo del caudal en una instalación de las características como la planteada en el problema:

- Cualquiera de las cuatro hipótesis propuestas converge a un resultado similar y además coincidente con la realidad.
- En esas condiciones el calculista hidráulico queda libre de optar por la hipótesis que le resulte más sencilla para la determinación del gasto.
- Debe tenerse en cuenta que, particularmente en este problema, se presenta esta posibilidad de semejanza de resultados con diversas hipótesis, debido a las magnitudes geométricas (longitud, diámetro y rugosidad) e hidráulicas (viscosidad) que se han planteado.
- En otras condiciones de la instalación, con longitudes de conductos menores por ejemplo, se arribaría a resultados divergentes según la hipótesis utilizada, por lo que inevitablemente deberá calcularse considerando las pérdidas locales que es la forma de encaminar el cálculo a un resultado certero.
- Si el fluido circulante no es precisamente agua, no se puede hacer uso de las hipótesis que consideran la solución mediante el uso de la fórmula de Hazen - Williams.

17.4. Tuberías en paralelo.

Un sistema de tuberías está conectado en paralelo si el escurrimiento original se ramifica en dos o más conductos y posteriormente vuelven a unirse nuevamente aguas abajo, tal como se indica en el gráfico de la *Figura 192*.

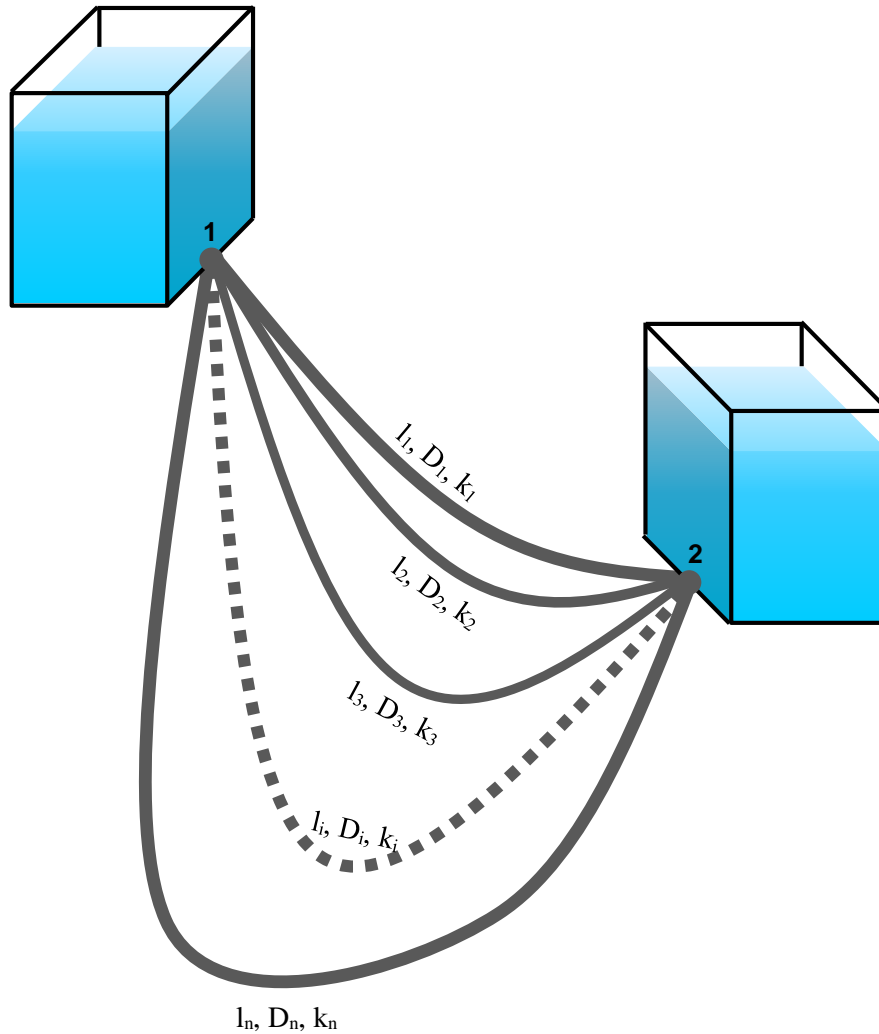


Figura 192 – Instalación con tuberías dispuestas en paralelo.

17.4.1. Definición del problema.

En función de la ecuación de continuidad, en el nudo **2** el caudal suma resulta igual al original en el nudo **1** de partida, al no existir derivaciones en ruta. Por lo tanto el caudal suma de cada uno de los derivados por las ramas es igual al caudal total Q .

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i + \dots + Q_n \quad (342)$$

Por otra parte, de la ecuación de Bernoulli aplicada entre los nudos **1** y **2** (ver *Figura 193*), se tiene:

$$\Delta J^* = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right) \quad (343)$$

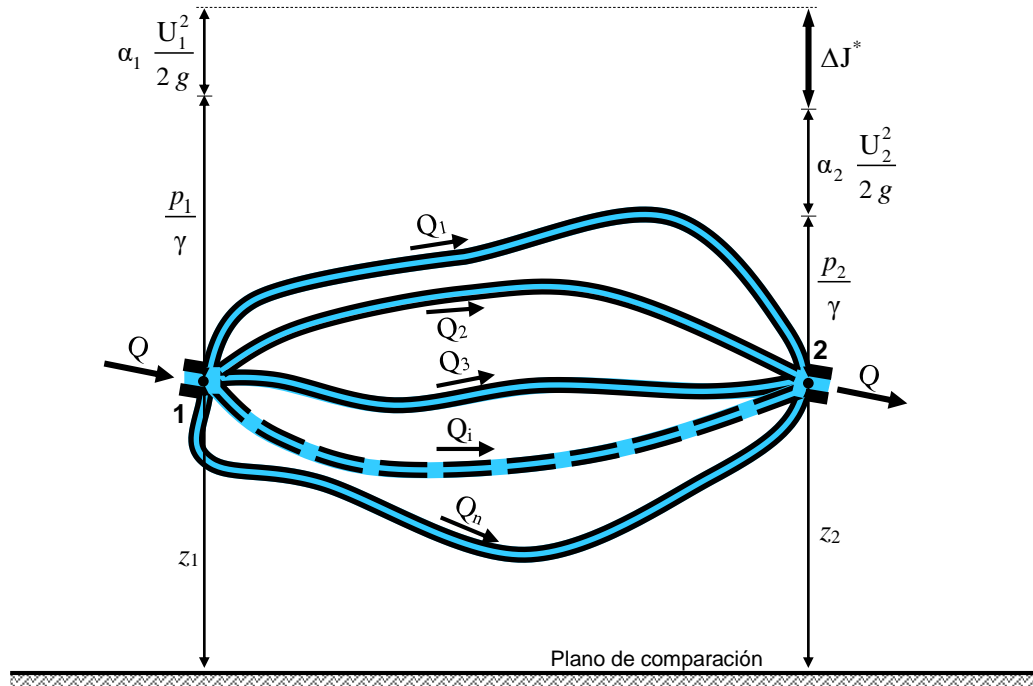


Figura 193 – Detalle de la pérdida de energía en una instalación con tuberías en paralelo.

La pérdida de energía ΔJ^* entre los nudos 1 y 2 considerados es la misma, sea cual sea el ramal que se considere para desplazarse de una posición a otra.

$$\Delta J^* = \Delta J_1^* = \Delta J_2^* = \Delta J_3^* = \dots = \Delta J_i^* = \dots = \Delta J_n^* \quad (344)$$

En el presente análisis se van a considerar siempre como datos del problema a las siguientes magnitudes:

- Características geométricas de los ramales.
 - Longitudes: $l_1, l_2, l_3, \dots, l_i, \dots, l_n$.
 - Diámetros: $D_1, D_2, D_3, \dots, D_i, \dots, D_n$.
 - Rugosidades: $k_1, k_2, k_3, \dots, k_i, \dots, k_n$.
- Viscosidad cinemática del fluido ν .

17.4.2. Solución con criterio racional.

Teniendo en cuenta las pérdidas localizadas (representadas en principio por la longitud equivalente l_e de las singularidades presentes en cada tramo), se expresa la pérdida de energía o pérdida de carga en función de la ecuación de Darcy - Weisbach:

$$\begin{aligned} \Delta J^* = \Delta J &= f_1 \frac{l_1 + l_{e1}}{D_1} \frac{U_1^2}{2g} = f_2 \frac{l_2 + l_{e2}}{D_2} \frac{U_2^2}{2g} = f_3 \frac{l_3 + l_{e3}}{D_3} \frac{U_3^2}{2g} = \dots = \\ &= \dots = f_i \frac{l_i + l_{ei}}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} = \dots = f_n \frac{l_n + l_{en}}{D_n} \frac{U_n^2}{2g} \end{aligned} \quad (345)$$

Analizando particularmente el ramal genérico individualizado con el subíndice i , se tiene:

$$\Delta J_i^* = \Delta J_i = f_i \frac{l_i + l_{ei}}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} = f_i \frac{l_i + l_{ei}}{D_i} \frac{Q_i^2}{2g \left(\frac{\pi D_i^2}{4} \right)^2} = \frac{8}{g \pi^2} \frac{l_i + l_{ei}}{D_i^5} f_i Q_i^2$$

$cte. i$

Representa una magnitud numérica constante, propia de cada tramo de la instalación en paralelo.

$$\Delta J_i^* = \Delta J_i = cte.i f_i Q_i^2 \tag{346}$$

Teniendo en cuenta (346), la expresión original (345) se simplifica de la siguiente manera:

$$\Delta J^* = \Delta J = cte.1 f_1 Q_1^2 = cte.2 f_2 Q_2^2 = cte.3 f_3 Q_3^2 = \dots = cte.i f_i Q_i^2 = \dots = cte.n f_n Q_n^2 \tag{347}$$

En el cálculo se van a tener en cuenta dos situaciones, ambas aplicables solo a escurrimientos en régimen turbulento.

l) Determinación del caudal Q_i de cada ramal, conocida la pérdida de energía ΔJ^* .

La solución se realiza de forma sencilla y directa, analizando de manera individual cada tubería del sistema en paralelo.

Así, para cualquiera de los ramales i se va a tener un mismo valor de la pérdida de energía, ya que es válida la ecuación (344), donde:

$$\Delta J^* = \Delta J = \Delta J_i^*$$

Por lo tanto, se puede realizar el siguiente planteo a partir de la ecuación de Darcy - Weisbach:

$$\Delta J_i^* = \Delta J^* = \Delta J = f_i \frac{l_i + l_{ei}}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} \Rightarrow U_i = \sqrt{\frac{2g D_i \Delta J}{f_i (l_i + l_{ei})}} \tag{348}$$

Entonces el número de Reynolds se puede expresar como:

$$Re_i = \frac{U_i D_i}{\nu} = \sqrt{\frac{2g D_i \Delta J}{f_i (l_i + l_{ei})}} \frac{D_i}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{f_i}} \sqrt{\frac{2g D_i^3 \Delta J}{(l_i + l_{ei}) \nu^2}}$$

$$A_i = \sqrt{\frac{2g D_i^3 \Delta J}{l_i \nu^2}} \tag{349}$$

$$Re_i = \frac{A_i}{\sqrt{f_i}} \quad (350)$$

A continuación se aplica la ecuación (173) de Colebrook - White a los efectos de calcular las magnitudes de los coeficientes de fricción f intervinientes:

$$\frac{1}{\sqrt{f_i}} = 1,14 - 2 \log \left(\frac{k_i}{D_i} + \frac{9,35}{Re \sqrt{f_i}} \right) \quad (351)$$

Introduciendo (350) en (351):

$$\frac{1}{\sqrt{f_i}} = 1,14 - 2 \log \left(\frac{k_i}{D_i} + \frac{9,35}{A_i} \right) \quad (352)$$

Reemplazando (349) en (352):

$$\frac{1}{\sqrt{f_i}} = 1,14 - 2 \log \left(\frac{k_i}{D_i} + 9,35 \sqrt{\frac{(l_i + l_{ei}) v^2}{2 g D_i^3 \Delta J}} \right)$$

$$\therefore f_i = \frac{1}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{k_i}{D_i} + 9,35 \sqrt{\frac{(l_i + l_{ei}) v^2}{2 g D_i^3 \Delta J}} \right) \right]^2} \quad (353)$$

A partir de la expresión (353) se obtienen los coeficientes de fricción de todos los ramales ($f_1, f_2, f_3, \dots, f_i, \dots, f_n$) y luego se calculan las velocidades medias U_i correspondientes con el auxilio de la ecuación (348).

Finalmente se procede a determinar cada uno de los caudales Q_i que circulan por las distintas tuberías dispuestas en paralelo.

$$Q_i = U_i \Omega_i = \sqrt{\frac{2 g D_i \Delta J}{f_i (l_i + l_{ei})}} \frac{\pi D_i^2}{4}$$

$$Q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5 \Delta J}{8 f_i (l_i + l_{ei})}} \quad (354)$$

El caudal total original resulta de aplicar la expresión (342), la que se puede resumir en:

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5 \Delta J}{8 f_i (l_i + l_{ei})}}$$

II) Determinación de la pérdida de energía ΔJ^* y la distribución de los caudales Q_i en los ramales, conocido el gasto original Q .

De (354) se tiene:

$$Q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5}{8 (l_i + l_{ei})}} \frac{\sqrt{\Delta J_i^*}}{\sqrt{f_i}}$$

↓
 B_i

Teniendo en cuenta que la pérdida de energía ΔJ_i^* de cada tramo es prácticamente igual a la pérdida de carga ΔJ , entonces se puede plantear individualmente para cada tubería:

$$Q_1 = \frac{B_1}{\sqrt{f_1}} \sqrt{\Delta J_1^*} = \frac{B_1}{\sqrt{f_1}} \sqrt{\Delta J}$$

$$Q_2 = \frac{B_2}{\sqrt{f_2}} \sqrt{\Delta J_2^*} = \frac{B_2}{\sqrt{f_2}} \sqrt{\Delta J}$$

$$Q_3 = \frac{B_3}{\sqrt{f_3}} \sqrt{\Delta J_3^*} = \frac{B_3}{\sqrt{f_3}} \sqrt{\Delta J}$$

⋮

$$Q_i = \frac{B_i}{\sqrt{f_i}} \sqrt{\Delta J_i^*} = \frac{B_i}{\sqrt{f_i}} \sqrt{\Delta J}$$

⋮

$$Q_n = \frac{B_n}{\sqrt{f_n}} \sqrt{\Delta J_n^*} = \frac{B_n}{\sqrt{f_n}} \sqrt{\Delta J}$$

Sumando m. a m.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i + \dots + Q_n = \left(\frac{B_1}{\sqrt{f_1}} + \frac{B_2}{\sqrt{f_2}} + \frac{B_3}{\sqrt{f_3}} + \dots + \frac{B_i}{\sqrt{f_i}} + \dots + \frac{B_n}{\sqrt{f_n}} \right) \sqrt{\Delta J}$$

$$Q = \left[\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\sqrt{f_i}} \right] \Delta J$$

$$\Rightarrow \Delta J = \Delta J^* = \frac{Q^2}{\left[\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\sqrt{f_i}} \right]^2} \quad (355)$$

Desarrollando la anterior:

$$\Delta J = \frac{Q^2}{\left[\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5}{8 f_i (l_i + l_{ei})}} \right]^2} = \frac{8}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{\left[\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{D_i^5}{f_i (l_i + l_{ei})}} \right]^2} \quad (356)$$

Si se evalúan las pérdidas locales a través de los coeficientes de resistencia K, la ecuación (356) toma la siguiente forma:

$$\Delta J = \frac{8}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{\left[\sum_{i=1}^n \frac{D_i^2}{\sqrt{\frac{f_i l_i}{D_i} + \sum_{j=1}^m K_j}} \right]^2} \quad (357)$$

La dificultad para resolver la ecuación (356), o la (357) según corresponda la forma de considerar las pérdidas secundarias, se encuentra en que el coeficiente de fricción f_i es una variable dependiente del caudal Q_i que escurre por cada tubería, como así también del diámetro D_i y la rugosidad absoluta k_i del material.

Necesariamente los métodos de cálculo resultan ser del tipo iterativos y son sumamente engorrosos, para lo cual se aconseja la aplicación de un algoritmo práctico como el que se detalla a continuación, consistente en la ejecución de los siguientes pasos:

- Se determina la relación D_i/k_i (inversa de la rugosidad relativa) de cada tramo.
- Se toma un primer valor tentativo del coeficiente de fricción $f_i^{(1)}$ para cada tubería. Como aproximación inicial se sugiere aceptar desde el diagrama de Rouse el valor de $f_i^{(1)}$ correspondiente al escurrimiento turbulento con rugosidad plena.
- Se calcula como primera tentativa la pérdida de carga $\Delta J^{(1)}$ con la ecuación (356) o (357), según la forma en que se evalúen las pérdidas secundarias.
- Se determinan las velocidades medias aproximadas $U_i^{(1)}$ de cada tramo con la ecuación (348), la que también se puede adaptar de la siguiente manera si las pérdidas localizadas se consideran a partir del coeficiente de resistencia K en lugar de la longitud equivalente:

$$U_i^{(1)} = \sqrt{\frac{2g \Delta J}{\frac{f_i l_i}{D_i} + \sum_{j=1}^m K_j}} \quad (358)$$

e) Se calculan los números de Reynolds correspondientes a cada tubería.

$$Re_i^{(1)} = \frac{U_i^{(1)} D_i}{\nu}$$

f) Con $\left. \begin{matrix} Re_i^{(1)} \\ \frac{D_i}{k_i} \end{matrix} \right\}$ Se extrae del diagrama de H. Rouse $\rightarrow f_i^{(2)}$
 Coeficiente de fricción de cada tubería, más próxima que el primer intento.

g) Se vuelve al paso c) y se determina en un segundo intento el valor de una nueva pérdida de carga $\Delta J^{(2)}$.

El procedimiento finaliza cuando dos coeficientes de fricción correspondientes a iteraciones sucesivas arrojan similar valor.

$$f_i^{(n-1)} \cong f_i^{(n)}$$

En ese caso se acepta como pérdida de carga real a:

$$\Delta J \cong \Delta J^{(n)}$$

Una vez conocida la pérdida de carga, por efecto de la expresión (344), se sabe que las pérdidas para cada una de las tuberías es la misma.

Así, teniendo calculado f_i y ΔJ_i , el cálculo de los caudales que escurren por cada rama resulta inmediato, aplicando la ecuación (359) o (360).

$$Q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5}{8 f_i (l_i + l_{ei})} \Delta J} \tag{359}$$

$$Q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5}{8 f_i \left(l_i + D_i \sum_{j=1}^m K_j \right)} \Delta J} \tag{360}$$

Si no se consideran las pérdidas localizadas, situación bastante común en las instalaciones con tuberías de longitudes importantes, la ecuación se simplifica reduciéndose a:

$$Q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5}{8 f_i l_i} \Delta J} \tag{361}$$

17.4.3. Solución con la fórmula empírica de Hazen - Williams.

El procedimiento a utilizar es también válido para cualquier otra expresión empírica. En este caso se usa la correspondiente a Hazen - Williams, la cual está lo suficientemente probada, con la sola limitación que es válida únicamente para agua a temperatura normal en régimen turbulento.

l) Determinación del gasto Q_i de cada ramal, conocida la pérdida de energía ΔJ^* .

Sabiendo que el dato ΔJ^* es el mismo según la tubería que se considere:

$$\Delta J^* = \Delta J = \Delta J_1 = \Delta J_2 = \Delta J_3 = \dots = \Delta J_i = \dots = \Delta J_n$$

Así, se puede plantear individualmente para cada ramal la ecuación (200) de Hazen - Williams:

$$\Delta J_i = \Delta J^* = \frac{l_i}{\left(0,278 C_{H-w_i}\right)^{1,85}} \frac{Q_i^{1,85}}{D_i^{4,87}}$$

$$\Rightarrow Q_i = 0,278 C_{H-w_i} D_i^{\frac{4,87}{1,85}} \left(\frac{\Delta J^*}{l_i}\right)^{\frac{1}{1,85}}$$

↖ 2,63
↖ 0,54

$$Q_i = 0,278 C_{H-w_i} D_i^{2,63} \left(\frac{\Delta J}{l_i}\right)^{0,54}$$

(362)

Para cada una de las tuberías se establece específicamente:

$$Q_1 = 0,278 C_{H-w_1} D_1^{2,63} \left(\frac{\Delta J}{l_1}\right)^{0,54}$$

$$Q_2 = 0,278 C_{H-w_2} D_2^{2,63} \left(\frac{\Delta J}{l_2}\right)^{0,54}$$

$$Q_3 = 0,278 C_{H-w_3} D_3^{2,63} \left(\frac{\Delta J}{l_3}\right)^{0,54}$$

⋮

$$Q_i = 0,278 C_{H-w_i} D_i^{2,63} \left(\frac{\Delta J}{l_i}\right)^{0,54}$$

⋮

$$Q_n = 0,278 C_{H-w_n} D_n^{2,63} \left(\frac{\Delta J}{l_n}\right)^{0,54}$$

Finalmente, el caudal total original Q se calcula aplicando la expresión (342).

II) Cálculo de la pérdida de energía ΔJ^* y la distribución de los caudales Q_i en los ramales, conocido el gasto original Q .

Sabiendo que la pérdida de energía ΔJ_i^* en cada tramo de una combinación en paralelo es igual a la pérdida de carga ΔJ , se tiene entonces que a los efectos de la determinación del gasto en las tuberías aplica la ecuación (362).

El gasto Q total será:

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \left[0,278 C_{H-w_i} D_i^{2,63} \left(\frac{\Delta J}{l_i} \right)^{0,54} \right]$$

$$Q = \Delta J^{0,54} \sum_{i=1}^n \left[0,278 C_{H-w_i} \frac{D_i^{2,63}}{l_i^{0,54}} \right]$$

Entonces:

$$\Delta J = \Delta J^* = \left\{ \frac{Q}{\sum_{i=1}^n \left[0,278 C_{H-w_i} \frac{D_i^{2,63}}{l_i^{0,54}} \right]} \right\}^{1,85}$$

Conocida la pérdida de energía se calculan los caudales circulantes en los ramales mediante el uso de la expresión (362).

17.4.4. Ejemplos numéricos.

Problema resuelto N° 1.

En la instalación de la *Figura 194* con tres tuberías en paralelo circula agua a 20 °C. Despreciando las pérdidas locales, determinar el caudal total Q en [l / s] y la distribución de gastos Q_i , si los datos del problema son:

- Presión

- $p_1 = 2,5 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = 25 \text{ m}$

- $p_2 = 1,0 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \frac{p_2}{\gamma} = 10 \text{ m}$

- Tubería 1

- Material: A° G° - acero galvanizado

De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_1 = 0,00015 \text{ m}$

De la *Tabla 6* → Coeficiente $C_{H-w1} = 110$

- Longitud $l_1 = 1.500 \text{ m}$

- Diámetro $D_1 = 75 \text{ mm}$

- Tubería 2
 - Material: PVC - policloruro de vinilo
De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_2 = 0,000007 \text{ m}$
De la *Tabla 6* → Coeficiente $C_{H-W_2} = 150$
 - Longitud $l_2 = 800 \text{ m}$
 - Diámetro $D_2 = 100 \text{ mm}$
- Tubería 3
 - Material: A° C° - asbesto cemento
De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_3 = 0,000030 \text{ m}$
De la *Tabla 6* → Coeficiente $C_{H-W_3} = 135$
 - Longitud $l_3 = 1.700 \text{ m}$
 - Diámetro $D_3 = 50 \text{ mm}$
- Fluido: Agua a 20 °C → Viscosidad cinemática $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

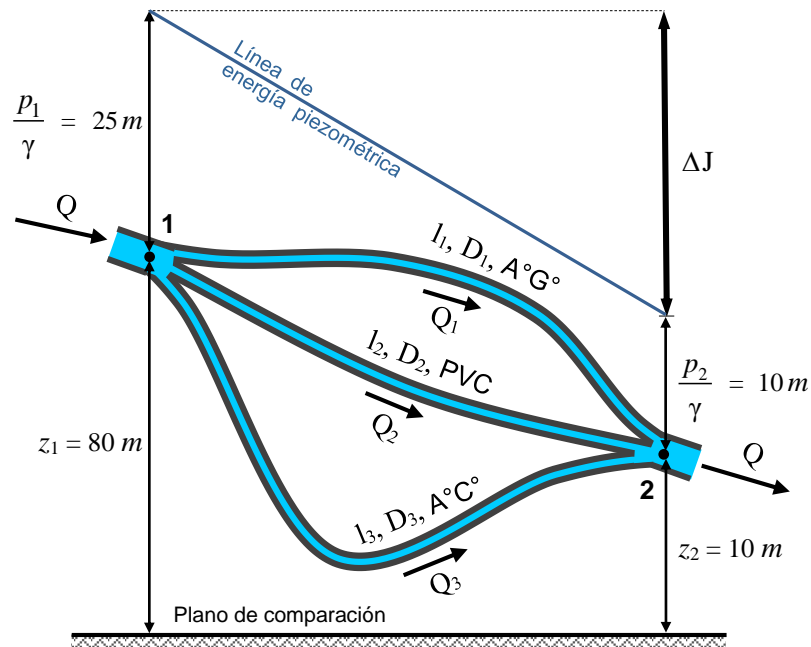


Figura 194- Instalación con tres tuberías en paralelo.

Primeramente se determina la pérdida de carga en función de los datos existentes.

$$\Delta J = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = (80 \text{ m} + 25 \text{ m}) - (10 \text{ m} + 10 \text{ m}) =$$

$$\Delta J = 85 \text{ m}$$

a) Resolución mediante el uso del criterio racional.

Con la ecuación (353) se fijan los coeficientes de fricción f_i de cada una de las tuberías que componen el arreglo en paralelo del presente caso.

$$f_1 = \frac{1}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{k_1}{D_1} + 9,35 \sqrt{\frac{l_1 v^2}{2 g D_1^3 \Delta J}} \right) \right]^2}$$

$$f_1 = \frac{1}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{0,00015m}{0,075m} + 9,35 \sqrt{\frac{1.500m (10^{-6}m^2 / s)^2}{2 \cdot 9,81m / s^2 (0,075m)^3 85m}} \right) \right]^2}$$

$$f_1 = 0,025$$

$$f_2 = \frac{1}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{k_2}{D_2} + 9,35 \sqrt{\frac{l_2 v^2}{2 g D_2^3 \Delta J}} \right) \right]^2}$$

$$f_2 = \frac{1}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{0,000007m}{0,10m} + 9,35 \sqrt{\frac{800m (10^{-6}m^2 / s)^2}{2 \cdot 9,81m / s^2 (0,10m)^3 85m}} \right) \right]^2}$$

$$f_2 = 0,014$$

$$f_3 = \frac{1}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{k_3}{D_3} + 9,35 \sqrt{\frac{l_3 v^2}{2 g D_3^3 \Delta J}} \right) \right]^2}$$

$$f_3 = \frac{1}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{0,000030m}{0,05m} + 9,35 \sqrt{\frac{1.700m (10^{-6}m^2 / s)^2}{2 \cdot 9,81m / s^2 (0,05m)^3 85m}} \right) \right]^2}$$

$$f_3 = 0,021$$

Los gastos Q_i que escurren por cada ramal se calculan aplicando la expresión (354) adaptada a la hipótesis que no tiene en cuenta las pérdidas localizadas.

$$Q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_i^5 \Delta J}{8 f_i l_i}} \tag{364}$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,075 \text{ m})^5 \cdot 85 \text{ m}}{8 \cdot 0,025 \cdot 1.500 \text{ m}}}$$

$$Q_1 = 0,00807 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 8,07 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,10 \text{ m})^5 \cdot 85 \text{ m}}{8 \cdot 0,014 \cdot 800 \text{ m}}}$$

$$Q_2 = 0,03031 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 30,31 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,05 \text{ m})^5 \cdot 85 \text{ m}}{8 \cdot 0,025 \cdot 1.700 \text{ m}}}$$

$$Q_3 = 0,00300 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 3,00 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

El gasto total Q que circula por el sistema es:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = 0,00807 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} + 0,03031 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} + 0,00300 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} =$$

$$Q = 0,04138 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 41,38 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

b) Resolución mediante la aplicación de la fórmula de Hazen - Williams.

Utilizando la expresión (362) se obtienen directamente los caudales Q_i circulantes en cada rama.

$$Q_1 = 0,278 \cdot 110 \cdot 0,075^{2,63} \left(\frac{85m}{1.500m} \right)^{0,54}$$

$$Q_1 = 0,00714 \frac{m^3}{s} = 7,14 \frac{l}{s}$$

$$Q_2 = 0,278 \cdot 150 \cdot 0,10^{2,63} \left(\frac{85m}{800m} \right)^{0,54}$$

$$Q_2 = 0,02913 \frac{m^3}{s} = 29,13 \frac{l}{s}$$

$$Q_3 = 0,278 \cdot 135 \cdot 0,05^{2,63} \left(\frac{85m}{1.700m} \right)^{0,54}$$

$$Q_3 = 0,00282 \frac{m^3}{s} = 2,82 \frac{l}{s}$$

El caudal total Q que escurre por la instalación es:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = 0,00714 \frac{m^3}{s} + 0,02913 \frac{m^3}{s} + 0,00282 \frac{m^3}{s} =$$

$$Q = 0,03909 \frac{m^3}{s} = 39,09 \frac{l}{s}$$

De los valores obtenidos en cada una de las resoluciones se concluye que utilizando cualquiera de las metodologías desarrolladas se arriba a resultados similares, con una diferencia porcentual por demás tolerable.

Problema resuelto N° 2.

Calcular la pérdida de carga ΔJ entre las secciones 1 y 2, y también los gastos que circulan por cada una de las ramas si se conoce el caudal original Q de agua a temperatura normal, según el arreglo de la *Figura 195*.

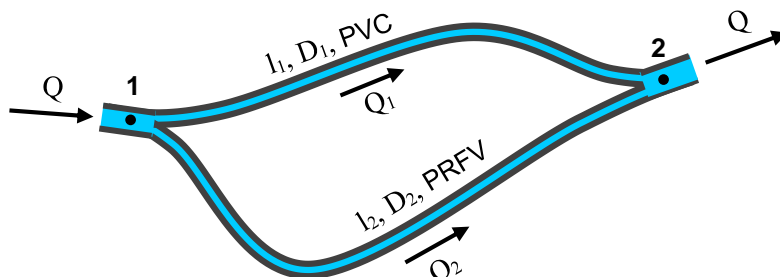


Figura 195– Instalación con dos tuberías en paralelo.

Datos:

- Caudal original $Q = 0,030 \text{ m}^3/\text{s}$
- Tubería 1
 - Material: PVC - policloruro de vinilo
De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_1 = 0,000007 \text{ m}$
De la *Tabla 6* → Coeficiente $C_{H-W1} = 150$
 - Longitud $l_1 = 3.500 \text{ m}$
 - Diámetro $D_1 = 100 \text{ mm}$
- Tubería 2
 - Material: PRFV - poliéster-plástico reforzado c/ fibra de vidrio
De la *Tabla 2* → Rugosidad $k_2 = 0,000050 \text{ m}$
De la *Tabla 6* → Coeficiente $C_{H-W2} = 145$
 - Longitud $l_2 = 4.200 \text{ m}$
 - Diámetro $D_2 = 150 \text{ mm}$
- Fluido: Agua a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ → Viscosidad cinemática $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

a) Solución empleando el criterio racional.

Se utiliza básicamente la ecuación (356), la cual despreciando las pérdidas locales se reduce a la siguiente expresión:

$$\Delta J = \frac{8}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{\left[\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{D_i^5}{f_i l_i}} \right]^2} \quad (365)$$

Los coeficientes de fricción f_i se determinan mediante el sistema de aproximaciones sucesivas.

1° aproximación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D_1}{k_1} = \frac{0,10 \text{ m}}{0,000007 \text{ m}} = 14.286 \quad \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \text{para régimen turbulento con} \\ \text{comportamiento hidráulico} \\ \text{plenamente rugoso.} \end{array} \rightarrow f_1^{(1)} = 0,011 \\ \\ \frac{D_2}{k_2} = \frac{0,15 \text{ m}}{0,00005 \text{ m}} = 3.000 \quad \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \text{para régimen turbulento con} \\ \text{comportamiento hidráulico} \\ \text{plenamente rugoso.} \end{array} \rightarrow f_2^{(1)} = 0,016 \end{array} \right.$$

De la ecuación (365) se obtiene la pérdida de carga en 1° aproximación:

$$\Delta J^{(1)} = \frac{8}{\pi^2 9,81 \text{ m/s}^2} \frac{(0,03 \text{ m}^3/\text{s})^2}{\left[\sqrt{\frac{(0,10 \text{ m})^5}{0,011 3.500 \text{ m}}} + \sqrt{\frac{(0,15 \text{ m})^5}{0,016 4.200 \text{ m}}} \right]^2} =$$

$$\Delta J^{(1)} = 30,12 \text{ m}$$

Las velocidades medias en 1° aproximación se determinan mediante la aplicación de la ecuación (348):

$$U_1^{(1)} = \sqrt{\frac{2 9,81 \text{ m/s}^2 0,10 \text{ m} 30,12 \text{ m}}{0,011 3.500 \text{ m}}} =$$

$$U_1^{(1)} = 1,24 \text{ m/s}$$

$$U_2^{(1)} = \sqrt{\frac{2 9,81 \text{ m/s}^2 0,15 \text{ m} 30,12 \text{ m}}{0,016 4.200 \text{ m}}} =$$

$$U_2^{(1)} = 1,15 \text{ m/s}$$

Cálculo del número de Reynolds en 1° aproximación:

$$\left\{ \begin{array}{l} Re_1^{(1)} = \frac{U_1^{(1)} D_1}{\nu} = \frac{1,24 \text{ m/s} 0,10 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 124.000 \\ \\ Re_2^{(1)} = \frac{U_2^{(1)} D_2}{\nu} = \frac{1,15 \text{ m/s} 0,15 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 172.500 \end{array} \right.$$

Del diagrama de H. Rouse se obtienen los coeficientes de fricción f_i en una segunda opción más próxima:

$$\left\{ \begin{array}{l} Re_1^{(1)} = 124.000 \\ \frac{D_1}{k_1} = 14.286 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} f_1^{(2)} = 0,018$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Re_2^{(1)} = 172.500 \\ \frac{D_2}{k_2} = 3.000 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} f_2^{(2)} = 0,019$$

Haciendo la comparación de los coeficientes de fricción f_i entre la primera y la segunda opción, se pueden observar las siguientes desigualdades:

$$f_1^{(1)} = 0,011 \neq f_1^{(2)} = 0,018$$

$$f_2^{(1)} = 0,016 \neq f_2^{(2)} = 0,019$$

Se concluye por consiguiente en la necesidad de realizar otra aproximación, tomando ahora como punto de partida los siguientes coeficientes de fricción:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{array} \right.$$

2° aproximación:

De la expresión (364) se obtiene una pérdida de carga más próxima a la real.

$$\Delta J^{(2)} = \frac{8}{\pi^2 9,81m/s^2} \frac{(0,03m^3/s)^2}{\left[\sqrt{\frac{(0,10m)^5}{0,018 3.500m}} + \sqrt{\frac{(0,15m)^5}{0,019 4.200m}} \right]^2} =$$

$$\Delta J^{(2)} = 39,45m$$

La velocidad media aproximada se determina a partir de la ecuación (348):

$$U_1^{(2)} = \sqrt{\frac{2 9,81m/s^2 0,10m 39,45m}{0,018 3.500m}}$$

$$U_1^{(2)} = 1,11m/s$$

$$U_2^{(2)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81m/s^2 \cdot 0,15m \cdot 39,45m}{0,019 \cdot 4.200m}}$$

$$U_2^{(2)} = 1,21m/s$$

Se calcula nuevamente el número de Reynolds en una 2º instancia:

$$\left\{ \begin{array}{l} Re_1^{(2)} = \frac{U_1^{(2)} D_1}{\nu} = \frac{1,11m/s \cdot 0,10m}{10^{-6} m^2/s} = 111.000 \\ Re_2^{(2)} = \frac{U_2^{(2)} D_2}{\nu} = \frac{1,21m/s \cdot 0,15m}{10^{-6} m^2/s} = 181.500 \end{array} \right.$$

Con el auxilio del diagrama de H. Rouse se determinan los coeficientes de fricción f_i en 3º aproximación:

$$\left\{ \begin{array}{l} Re_1^{(2)} = 111.000 \\ \frac{D_1}{k_1} = 14.286 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} f_1^{(3)} = 0,018$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Re_2^{(2)} = 181.500 \\ \frac{D_2}{k_2} = 3.000 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} f_2^{(3)} = 0,019$$

Comparando los coeficientes de fricción f_i entre la 2º y 3º instancia, se observa que los valores sucesivos han arribado a una igualdad:

$$f_1^{(2)} = f_1^{(3)}$$

$$f_2^{(2)} = f_2^{(3)}$$

Por consiguiente, se fijan como valores de cálculo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1^{(2)} = f_1^{(3)} = 0,018 \\ f_2 = f_2^{(2)} = f_2^{(3)} = 0,019 \end{array} \right.$$

En estas circunstancias, la pérdida de carga entre las secciones 1 y 2 se da por resuelta y queda definida como:

$$\Delta J = \Delta J^{(2)} = 39,45 m$$

Así, los gastos que escurren por cada tubería son:

$$Q_1 = U_1^{(2)} \frac{\pi D_1^2}{4} = 1,11 \frac{m}{s} \frac{\pi (0,10 m)^2}{4} =$$

$$Q_1 = 0,009 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_2 = U_2^{(2)} \frac{\pi D_2^2}{4} = 1,21 \frac{m}{s} \frac{\pi (0,15 m)^2}{4} =$$

$$Q_2 = 0,021 \frac{m^3}{s}$$

Finalmente se observa que se verifica satisfactoriamente la ecuación de continuidad.

$$Q_1 + Q_2 = 0,009 \frac{m^3}{s} + 0,021 \frac{m^3}{s} = \underbrace{0,030 \frac{m^3}{s}}_{\text{Dato del problema}} = Q$$

Dato del problema

b) Solución utilizando la ecuación empírica de Hazen - Williams.

Aplica la expresión (363) a los efectos del cálculo de la pérdida de carga.

$$\Delta J = \left\{ \frac{0,03 \frac{m^3}{s}}{\left[0,278 \ 150 \frac{(0,10 m)^{2,63}}{(3.500 m)^{0,54}} + 0,278 \ 145 \frac{(0,15 m)^{2,63}}{(4.200 m)^{0,54}} \right]} \right\}^{1,85}$$

$$\Delta J = 37,61m$$

Mediante el uso de la ecuación (362) se calcula la distribución de los caudales circulantes en cada rama de la instalación en paralelo:

$$Q_1 = 0,278\ 150\ (0,10m)^{2,63} \left(\frac{37,61m}{3.500m} \right)^{0,54} =$$

$$Q_1 = 0,008 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_2 = 0,278\ 145\ (0,15m)^{2,63} \left(\frac{37,61m}{4.200m} \right)^{0,54} =$$

$$Q_2 = 0,022 \frac{m^3}{s}$$

Se constata también el cumplimiento de la ecuación de continuidad:

$$Q_1 + Q_2 = 0,008 \frac{m^3}{s} + 0,022 \frac{m^3}{s} = 0,030 \frac{m^3}{s} = Q$$

17.5. Tuberías mixtas – Combinación serie y paralelo.

17.5.1. Consideraciones generales.

A fin de dar solución a los requerimientos exigidos, muchas veces las instalaciones de tuberías hidráulicas se diseñan de manera tal que la disposición de la misma resulta una combinación entre conductos en serie y en paralelo. En la figura se puede apreciar una de las muchas alternativas en que se puede disponer este tipo de mixtura.

El criterio de cálculo no difiere de lo señalado particularmente para cada caso según se trate de una distribución en serie o paralelo, utilizando las hipótesis correspondientes ya señaladas.

17.5.2. Ejemplo numérico.

Hallar las pérdidas de carga de cada uno de los tramos despreciando las pérdidas localizadas para efectuar el cálculo de los caudales que circulan por cada una de las tuberías del sistema mostrado en la *Figura 196*.

El material con que está construida la totalidad de las tuberías de la instalación es PVC.

Considerar la resolución mediante la aplicación del método racional por un lado y el uso de la fórmula de Hazen - Williams

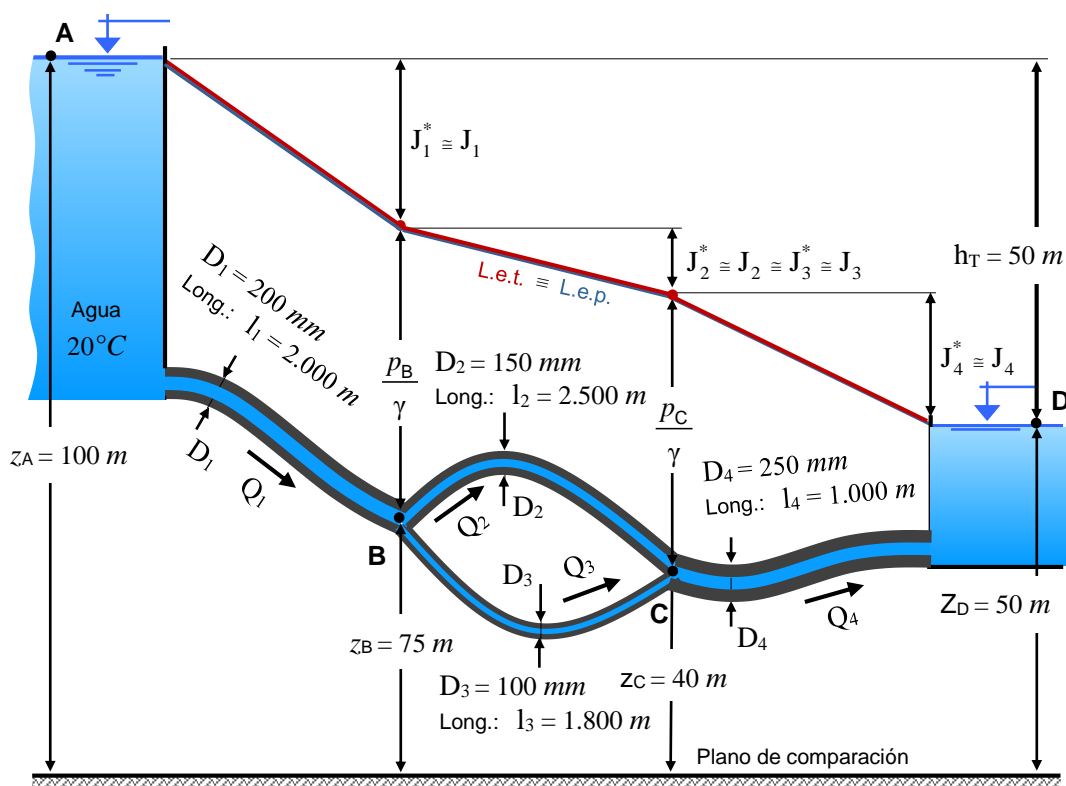


Figura 196 – Problema resuelto de tuberías mixtas despreciando las pérdidas locales.

Datos:

- Tubería 1
 - Longitud $l_1 = 2.000 \text{ m}$
 - Diámetro $D_1 = 200 \text{ mm}$
- Tubería 2
 - Longitud $l_2 = 2.500 \text{ m}$
 - Diámetro $D_2 = 150 \text{ mm}$
- Tubería 3
 - Longitud $l_3 = 1.800 \text{ m}$
 - Diámetro $D_3 = 100 \text{ mm}$
- Tubería 4
 - Longitud $l_4 = 1.000 \text{ m}$
 - Diámetro $D_4 = 250 \text{ mm}$
- Material: PVC
 - De la *Tabla 6-2* → Rugosidad $k = 0,000007 \text{ m}$
 - De la *Tabla 6-6* → Coeficiente $C_{H-W} = 150$
- Fluido: Agua a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ → Viscosidad cinemática $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- Cotas referenciales:
 - $z_A = 100 \text{ m}$
 - $z_B = 75 \text{ m}$
 - $z_C = 40 \text{ m}$
 - $z_D = 50 \text{ m}$

Incógnitas:

$$Q_1 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$Q_2 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$Q_3 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$Q_4 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$\frac{p_B}{\gamma} \left[\text{m} \right]$$

$$\frac{p_C}{\gamma} \left[\text{m} \right]$$

Se sabe que: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow$ la cantidad de incógnitas se reduce a 5 (cinco).

Además, se tiene a partir de la ecuación de continuidad, que:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow$$

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \quad (366)$$

Las pérdidas de carga unitarias se obtienen planteando las siguientes expresiones:

$$j_1 = \frac{z_A - \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right)}{l_1} \quad (367)$$

$$j_2 = \frac{\left(z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) - \left(z_C + \frac{p_C}{\gamma} \right)}{l_2} \quad (368)$$

$$j_3 = \frac{\left(z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) - \left(z_C + \frac{p_C}{\gamma} \right)}{l_3} \quad (369)$$

$$j_4 = \frac{\left(z_C + \frac{p_C}{\gamma} \right) - z_D}{l_4} \quad (370)$$

El problema se resuelve mediante el procedimiento de aproximaciones sucesivas, por lo que se adopta primeramente un valor de la energía piezométrica por unidad de peso en **B**, cuya magnitud debe estar comprendida entre los límites z_A y z_D .

$$z_A < \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) < z_D \quad (371)$$

a) Solución aplicando el método racional.

1° aproximación

Se supone: $\frac{p_B^{(1)}}{\gamma} = 5,00 m$

Entonces la energía piezométrica considerada en **B** es:

$$z_B + \frac{p_B^{(1)}}{\gamma} = 80,00 m$$

Expresión que cumple con la condición (371), o sea:

$$100,00 m < \underline{80,00 m} < 50,00 m$$

Por consiguiente:

$$J_1 = 100,00 m - 80,00 m = 20,00 m$$

De (367):

$$j_1 = \frac{100,00 \text{ m} - 80,00 \text{ m}}{2000,00 \text{ m}} = 0,010$$

$$\frac{D_1}{k_1} = \frac{0,20 \text{ m}}{0,000007 \text{ m}} = 28.571$$

$$Re_1 \sqrt{f_1} = \frac{D_1^{3/2}}{\nu} \sqrt{2g j_1} = \frac{(0,20 \text{ m})^{3/2}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} \sqrt{2 \cdot 9,80 \text{ m/s}^2 \cdot 0,010} = 39.597$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{D_1}{k_1} = 28.571 \\ Re_1 \sqrt{f_1} = 39.597 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \longrightarrow f_1 = 0,015 \end{array}$$

Despejando de la ecuación de Darcy - Weisbach, se obtiene el gasto Q_1 :

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_1^5 j_1}{8 f_1}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 9,80 \text{ m/s}^2 \cdot (0,20 \text{ m})^5 \cdot 0,010}{8 \cdot 0,015}} = 0,050 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Además, se sabe que:

$$Q_1 = Q_4 = 0,050 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Por consiguiente:

$$\frac{D_4}{k_4} = \frac{0,25 \text{ m}}{0,000007 \text{ m}} = 35.714$$

$$Re_4 = \frac{U_4 D_4}{\nu} = \frac{4 Q_4}{\pi D_4 \nu} = \frac{4 \cdot 0,05 \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 254.777$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{D_4}{k_4} = 35.714 \\ Re_4 = 254.777 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \longrightarrow f_4 = 0,0155 \end{array}$$

$$\Rightarrow j_4 = \frac{8 f_4}{\pi^2 g} \frac{Q_4^2}{D_4^5} = \frac{8 \cdot 0,0155}{3,14^2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \frac{(0,05 \text{ m}^3/\text{s})^2}{(0,25 \text{ m})^5} = 0,003$$

$$J_4 = j_4 l_4 = 0,003 \ 1000 \ m = 3,00 \ m$$

Energía piezométrica por unidad de peso en **C** para esta primera aproximación:

$$z_C + \frac{p_C^{(1)}}{\gamma} = z_D + J_4 = 50,00 \ m + 3,00 \ m = 53,00 \ m$$

$$\Rightarrow \frac{p_C^{(1)}}{\gamma} = 53,00 \ m - z_C = 53,00 \ m - 40,00 \ m = 13,00 \ m$$

En el tramo dispuesto entre los **B** y **C**, donde se encuentran las tuberías dispuestas en paralelo, se tiene que las pérdidas de energía son iguales, indistintamente de la conducción considerada. Su valor es:

$$J_2 = J_3 = \left(z_B + \frac{p_B^{(1)}}{\gamma} \right) - \left(z_C + \frac{p_C^{(1)}}{\gamma} \right) = 80,00 \ m - 53,00 \ m$$

$$J_2 = J_3 = 27,00 \ m$$

Por lo tanto, en la tubería del tramo 2:

$$j_2 = \frac{J_2}{l_2} = \frac{27,00 \ m}{2.500 \ m} = 0,011$$

A continuación, se calcula:

$$\frac{D_2}{k_2} = \frac{0,15 \ m}{0,000007 \ m} = 21.429$$

$$Re_2 \sqrt{f_2} = \frac{D_2^{3/2}}{\nu} \sqrt{2 \ g \ j_2} = \frac{(0,15 \ m)^{3/2}}{10^{-6} \ m^2/s} \sqrt{2 \ 9,80 \ m/s^2 \ 0,011} = 26.973$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{D_2}{k_2} = 21.429 \\ Re_2 \sqrt{f_2} = 26.973 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} f_2 = 0,016$$

De la expresión de Darcy - Weisbach, se estima la magnitud del caudal Q_2 :

$$Q_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 \ g \ D_2^5 \ j_2}{8 \ f_2}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \ 9,80 \ m/s^2 \ (0,15 \ m)^5 \ 0,011}{8 \ 0,016}} = 0,025 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_2 = 0,025 \frac{m^3}{s}$$

Efectuando el mismo análisis anterior pero aplicado al conducto del tramo 3:

$$j_3 = \frac{J_3}{l_3} = \frac{27,00 \text{ m}}{1.800 \text{ m}} = 0,015$$

A continuación, se calcula:

$$\frac{D_3}{k_3} = \frac{0,10 \text{ m}}{0,000007 \text{ m}} = 14.286$$

$$Re_3 \sqrt{f_3} = \frac{D_3^{3/2}}{\nu} \sqrt{2 g j_3} = \frac{(0,10 \text{ m})^{3/2}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} \sqrt{2 \cdot 9,80 \text{ m/s}^2 \cdot 0,015} = 17.146$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{D_3}{k_3} = 14.286 \\ Re_3 \sqrt{f_3} = 17.146 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} f_3 = 0,0175$$

De la fórmula de Darcy - Weisbach, se deduce el valor del gasto Q_3 :

$$Q_3 = \sqrt{\frac{\pi^2 g D_3^5 j_3}{8 f_3}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 9,80 \text{ m/s}^2 \cdot (0,10 \text{ m})^5 \cdot 0,015}{8 \cdot 0,0175}} = 0,010 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_3 = 0,010 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,050 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - 0,025 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - 0,010 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \underline{\underline{0,015 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} > 0}}$$

Conclusión \rightarrow *No cumple.*

2° aproximación.

Se propone:
$$\frac{p_B^{(2)}}{\gamma} = 8,00 \text{ m}$$

Consecuentemente la energía piezométrica considerada en **B** es:

$$z_B + \frac{p_B^{(2)}}{\gamma} = 83,00 \text{ m}$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, se determina:

$$J_1 = 17,00m$$

$$j_1 = 0,0085$$

$$f_1 = 0,0145$$

$$Q_1 = 0,05 \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{p_C^{(2)}}{\gamma} = 13,00m$$

$$J_2 = 30,00m$$

$$j_2 = 0,012$$

$$f_2 = 0,016$$

$$Q_2 = 0,026 \frac{m^3}{s}$$

$$J_3 = 30,00m$$

$$j_3 = 0,017$$

$$f_3 = 0,017$$

$$Q_3 = 0,011 \frac{m^3}{s}$$

$$J_4 = 3,00m$$

$$j_4 = 0,003$$

$$f_4 = 0,0155$$

$$Q_4 = 0,050 \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,050 \frac{m^3}{s} - 0,026 \frac{m^3}{s} - 0,011 \frac{m^3}{s} = \underline{0,013 \frac{m^3}{s}} > 0$$

Conclusión \rightarrow *No cumple.*

3° aproximación.

Se supone:
$$\frac{p_B^{(3)}}{\gamma} = 10,00m$$

Entonces la energía piezométrica en **B** es:

$$z_B + \frac{p_B^{(3)}}{\gamma} = 85,00m$$

Continuando los mismos pasos anteriores, se calcula:

$$J_1 = 15,00 m$$

$$j_1 = 0,0075$$

$$f_1 = 0,015$$

$$Q_1 = 0,04 \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{P_C^{(3)}}{\gamma} = 12,00 m$$

$$J_2 = 33,00 m$$

$$j_2 = 0,013$$

$$f_2 = 0,0155$$

$$Q_2 = 0,028 \frac{m^3}{s}$$

$$J_3 = 33,00 m$$

$$j_3 = 0,018$$

$$f_3 = 0,0167$$

$$Q_3 = 0,011 \frac{m^3}{s}$$

$$J_4 = 2,00 m$$

$$j_4 = 0,002$$

$$f_4 = 0,016$$

$$Q_4 = 0,040 \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,040 \frac{m^3}{s} - 0,028 \frac{m^3}{s} - 0,011 \frac{m^3}{s} = \underline{0,001 \frac{m^3}{s}} > 0$$

Conclusión → *No cumple.*

4° aproximación.

Se adopta:
$$\frac{P_B^{(4)}}{\gamma} = 12,00 m$$

Así, la energía piezométrica en **B** resulta:

$$z_B + \frac{P_B^{(4)}}{\gamma} = 87,00 m$$

Prosiguiendo con los razonamientos precedentes, se obtiene:

$$J_1 = 13,00 m$$

$$j_1 = 0,0065$$

$$f_1 = 0,0153$$

$$Q_1 = 0,041 \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{P_C^{(4)}}{\gamma} = 12,00 m$$

$$J_2 = 35,00 m$$

$$j_2 = 0,014$$

$$f_2 = 0,0154$$

$$Q_2 = 0,029 \frac{m^3}{s}$$

$$J_3 = 35,00 m$$

$$j_3 = 0,019$$

$$f_3 = 0,0169$$

$$Q_3 = 0,012 \frac{m^3}{s}$$

$$J_4 = 2,00 m$$

$$j_4 = 0,002$$

$$f_4 = 0,0158$$

$$Q_4 = 0,041 \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,041 \frac{m^3}{s} - 0,029 \frac{m^3}{s} - 0,012 \frac{m^3}{s} = 0,000 \frac{m^3}{s}$$

Conclusión → *Sí cumple con la ecuación de continuidad.*

Por consiguiente, se puede afirmar que los valores que corresponden a la solución del problema planteado son los que resultan del ajuste calculado con la denominada 4° aproximación.

b) Solución aplicando la ecuación de Hazen - Williams.

1° aproximación

$$\text{Se adopta en un primer intento: } \frac{P_B^{(1)}}{\gamma} = 1,00 m$$

Entonces la energía piezométrica estimada en **B** es:

$$z_B + \frac{p_B^{(1)}}{\gamma} = 76,00 m$$

Se toma un valor distinto al propuesto en el inicio de la solución por el método racional, a los efectos de dar mayor generalidad a la resolución.

Expresión que cumple con la condición (371), o sea:

$$100,00 m < \underline{76,00 m} < 50,00 m$$

De (367):

$$j_1 = \frac{100,00 m - 76,00 m}{2000,00 m} = 0,012$$

Aplicando la ecuación (362):

$$Q_1 = 0,278 C_{H-W} D_1^{2,63} j_1^{0,54}$$

$$Q_1 = 0,278 \cdot 150 (0,20 m)^{2,63} 0,012^{0,54}$$

$$Q_1 = 0,056 \frac{m^3}{s}$$

Además, se tiene que:

$$Q_1 = Q_4 = 0,056 \frac{m^3}{s}$$

Por lo tanto:

$$j_4 = \frac{1}{(0,278 C_{H-W})^{1,85}} \frac{Q_4^{1,85}}{D_4^{4,87}}$$

$$j_4 = \frac{1}{(0,278 \cdot 150)^{1,85}} \frac{(0,056 m^3/s)^{1,85}}{(0,25 m)^{4,87}}$$

$$j_4 = 0,004$$

$$\Rightarrow J_4 = j_4 l_4$$

$$J_4 = 0,004 \cdot 1000 m$$

$$J_4 = 4,00 m$$

La energía piezométrica por unidad de peso en **C** en esta aproximación inicial:

$$z_C + \frac{p_C^{(1)}}{\gamma} = z_D + J_4 = 50,00\text{ m} + 4,00\text{ m} = 54,00\text{ m}$$

$$\Rightarrow \frac{p_C^{(1)}}{\gamma} = 54,00\text{ m} - z_C = 54,00\text{ m} - 40,00\text{ m} = 14,00\text{ m}$$

En el tramo de las dos tuberías instaladas en paralelo, se tiene:

$$J_2 = J_3 = \left(z_B + \frac{p_B^{(1)}}{\gamma} \right) - \left(z_C + \frac{p_C^{(1)}}{\gamma} \right) = 76,00\text{ m} - 54,00\text{ m}$$

$$J_2 = J_3 = 22,00\text{ m}$$

Por consiguiente, en la tubería del tramo 2 la pérdida de carga unitaria es:

$$j_2 = \frac{J_2}{l_2} = \frac{22,00\text{ m}}{2.500\text{ m}} = 0,009$$

$$\Rightarrow Q_2 = 0,278 C_{H-W} D_2^{2,63} j_2^{0,54}$$

$$Q_2 = 0,278 \cdot 150 (0,15\text{ m})^{2,63} 0,009^{0,54}$$

$$Q_2 = 0,022 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$j_3 = \frac{J_3}{l_3} = \frac{22,00\text{ m}}{1.800\text{ m}} = 0,012$$

$$\Rightarrow Q_3 = 0,278 C_{H-W} D_3^{2,63} j_3^{0,54}$$

$$Q_3 = 0,278 \cdot 150 (0,10\text{ m})^{2,63} 0,012^{0,54}$$

$$Q_3 = 0,009 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,056 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - 0,022 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - 0,009 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \underline{\underline{0,025 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}} > 0$$

Conclusión \rightarrow *No cumple.*

Continuando con la misma metodología resolutiva se procederá con otras tentativas hasta lograr que se verifique la ecuación de continuidad.

2° aproximación

$$\text{Se adopta en un segundo intento: } \frac{p_B^{(2)}}{\gamma} = 5,00 m$$

Entonces la energía piezométrica estimada en **B** es:

$$z_B + \frac{p_B^{(2)}}{\gamma} = 80,00 m$$

Operando se obtiene:

$$J_1 = 20,00 m$$

$$j_1 = 0,010$$

$$Q_1 = 0,050 \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{p_C^{(2)}}{\gamma} = 15,40 m$$

$$J_2 = 24,60 m$$

$$j_2 = 0,010$$

$$Q_2 = 0,024 \frac{m^3}{s}$$

$$J_3 = 24,60 m$$

$$j_3 = 0,014$$

$$Q_3 = 0,010 \frac{m^3}{s}$$

$$J_4 = 5,40 m$$

$$j_4 = 0,003$$

$$Q_4 = 0,050 \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,050 \frac{m^3}{s} - 0,024 \frac{m^3}{s} - 0,010 \frac{m^3}{s} = \underline{\underline{0,016 \frac{m^3}{s} > 0}}$$

Conclusión → *No cumple.*

3° aproximación

$$\text{Se adopta en un tercer intento: } \frac{p_B^{(3)}}{\gamma} = 10,00 m$$

Entonces la energía piezométrica estimada en **B** es:

$$z_B + \frac{p_B^{(3)}}{\gamma} = 85,00 m$$

Resolviendo se tiene:

$$J_1 = 15,00 m$$

$$j_1 = 0,0075$$

$$Q_1 = 0,043 \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{p_C^{(3)}}{\gamma} = 12,50 m$$

$$J_2 = 32,50 m$$

$$j_2 = 0,013$$

$$Q_2 = 0,027 \frac{m^3}{s}$$

$$J_3 = 32,50 m$$

$$j_3 = 0,018$$

$$Q_3 = 0,011 \frac{m^3}{s}$$

$$J_4 = 2,50 m$$

$$j_4 = 0,0025$$

$$Q_4 = 0,043 \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,043 \frac{m^3}{s} - 0,027 \frac{m^3}{s} - 0,011 \frac{m^3}{s} = \underline{\underline{0,005 \frac{m^3}{s} > 0}}$$

Conclusión \rightarrow *No cumple.*

4° aproximación

Se adopta en un cuarto intento: $\frac{p_B^{(4)}}{\gamma} = 12,00 m$

Entonces la energía piezométrica estimada en **B** es:

$$z_B + \frac{p_B^{(4)}}{\gamma} = 87,00 m$$

Calculando se obtiene:

$$J_1 = 13,00 m$$

$$j_1 = 0,0065$$

$$Q_1 = 0,039 \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{p_C^{(4)}}{\gamma} = 12,20 m$$

$$J_2 = 34,50 m$$

$$j_2 = 0,014$$

$$Q_2 = 0,028 \frac{m^3}{s}$$

$$J_3 = 34,50 m$$

$$j_3 = 0,019$$

$$Q_3 = 0,011 \frac{m^3}{s}$$

$$J_4 = 2,20 m$$

$$j_4 = 0,0022$$

$$Q_4 = 0,039 \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (366):

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0,039 \frac{m^3}{s} - 0,028 \frac{m^3}{s} - 0,011 \frac{m^3}{s} = 0,000 \frac{m^3}{s}$$

Conclusión → *Sí cumple con la ecuación de continuidad.*

Los valores que corresponden a la solución del problema planteado, aplicando la fórmula de Hazen - Williams, son los que resultan del ajuste cálculo realizado en la 4° aproximación.

A continuación se muestra un cuadro resumen señalando, solo a los efectos comparativos, las magnitudes de los caudales calculados que escurren por cada una de las tuberías según la metodología empleada.

Cuadro resumen de los resultados

REFERENCIA	CAUDAL	METODOLOGÍA DE CÁLCULO		DIFERENCIA PORCENTUAL
		Racional (m ³ /s)	Hazen - Williams (m ³ /s)	
Tubería 1	Q ₁	0.041	0.039	4,88 %
Tubería 2	Q ₂	0,029	0.028	3,45 %
Tubería 3	Q ₃	0,012	0.011	8,33 %
Tubería 4	Q ₄	0,041	0.039	4,88 %

17.6. Tuberías dispuestas tipo ramal.

17.6.1. Definición del problema.

Un sistema de tuberías se denomina básicamente del tipo ramificada cuando se trata de una red abierta de conductos, cuya condición principal es la inexistencia de cualquier circuito cerrado en su configuración.

En síntesis, se identifica en estar constituida por un conjunto de tuberías que se ramifican en un punto determinado y no vuelven a unirse en su recorrido subsiguiente.

En la *Figura 6-198* se muestra la disposición más simple característica de este tipo de sistema, en la que se puede visualizar la unión de tres depósitos.

Como principio básico de cálculo se plantea que en cada una de las uniones (también denominadas nodos) se debe cumplir la ecuación de continuidad y los depósitos o reservorios deben proveer constantemente el caudal requerido.

Los problemas que se plantean en general consisten en verificar los caudales circulantes en una instalación ya definida, o bien dimensionar las secciones para provocar el escurrimiento de los gastos necesarios.

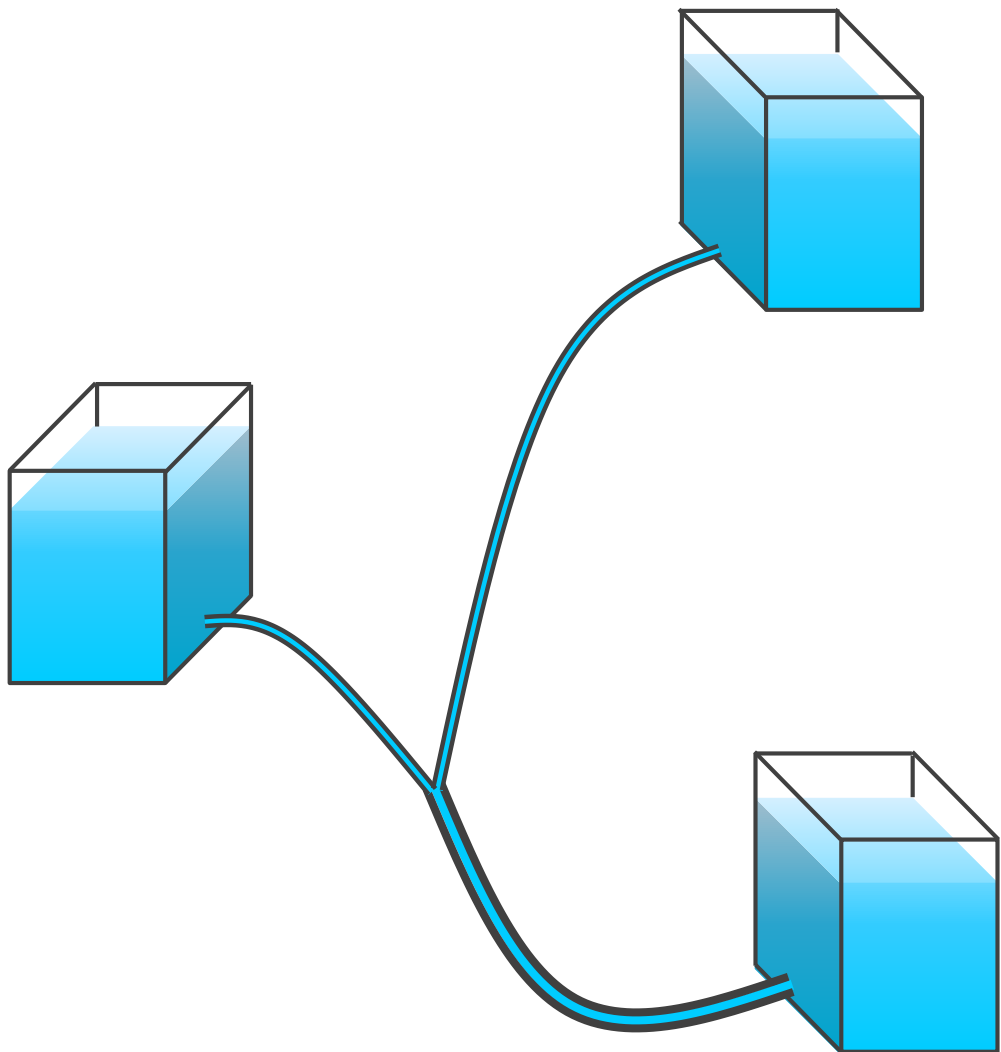


Figura 6-198 – Tuberías dispuestas en tipo ramal.

17.6.2. Ejemplo numérico.

Tres depósitos con agua a nivel constante se encuentran conectados de la manera indicada en la *Figura 6-197*. Determinar los caudales que escurren por cada una de las tuberías, suponiendo prácticamente coincidentes las líneas de energía total con las de energía piezométricas y despreciando las pérdidas de energía locales.

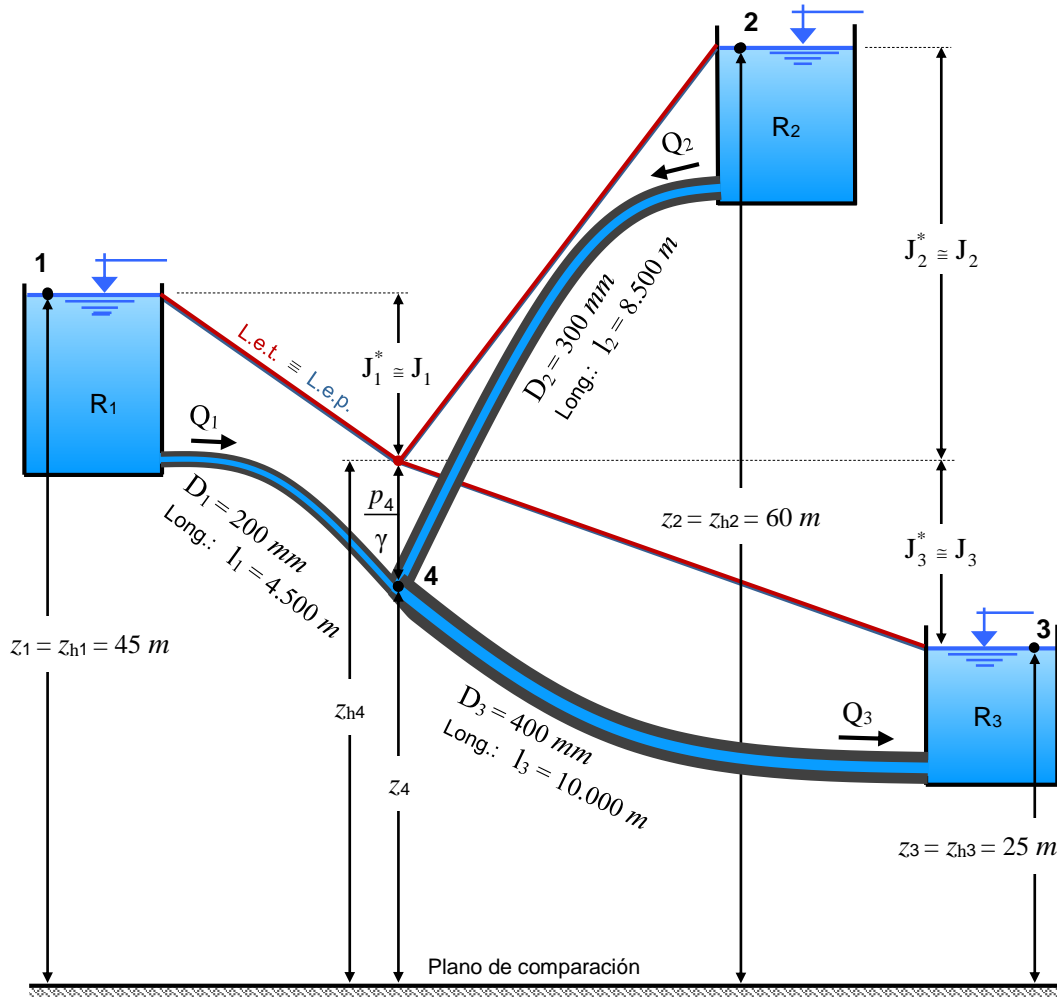


Figura 6-197 – Problema resuelto de tuberías dispuestas tipo ramal.

Datos:

- Energía de posición \equiv energía piezométrica.
 - $z_1 = z_{h1} = 45 \text{ m}$
 - $z_2 = z_{h2} = 60 \text{ m}$
 - $z_3 = z_{h3} = 25 \text{ m}$

- Tubería 1
 - Material: F° G° - Hierro galvanizado
 De la *Tabla 6-2* \rightarrow Rugosidad $k_1 = 0,00015 \text{ m}$
 De la *Tabla 6-6* \rightarrow Coeficiente $C_{H-W1} = 120$
 - Longitud $l_1 = 4.500 \text{ m}$
 - Diámetro $D_1 = 200 \text{ mm}$

- Tubería 2
 - Material: PRFV - polietileno reforzado con fibra de vidrio
De la *Tabla 6-2* → Rugosidad $k_2 = 0,000075\ m$
De la *Tabla 6-6* → Coeficiente $C_{H-W2} = 145$
 - Longitud $l_2 = 8.500\ m$
 - Diámetro $D_2 = 300\ mm$

- Tubería 3
 - Material: A° C° - asbesto cemento
De la *Tabla 6-2* → Rugosidad $k_3 = 0,000030\ m$
De la *Tabla 6-6* → Coeficiente $C_{H-W3} = 135$
 - Longitud $l_3 = 10.000\ m$
 - Diámetro $D_3 = 400\ mm$

- Fluido: Agua a $20\ ^\circ C$ → Viscosidad cinemática $\nu = 10^{-6}\ m^2/s$

Al igual que en los casos anteriores se conocen las cotas de los niveles de la superficie libre de cada reservorio resultando las siguientes incógnitas a resolver:

- Pérdidas de energía generales en cada tramo.
- Energía piezométrica en el nudo **4**.
- Gastos individuales por tubería.

a) Solución utilizando el método racional.

En la mayoría de los casos se trata de tuberías de diámetro importante razón por la cual la influencia de la viscosidad en la resistencia al escurrimiento no es significativa. El coeficiente de fricción f puede obtenerse con singular precisión, y aun desconociendo el número de Reynolds a partir del diagrama de Rouse suponiendo un flujo plenamente turbulento de comportamiento hidráulico tipo rugoso.

$$\frac{D_1}{k_1} = \frac{0,20\ m}{0,00015\ m} = 1.333 \quad \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} \quad f_1^{(1)} = 0,018$$

$$\frac{D_2}{k_2} = \frac{0,30\ m}{0,000075\ m} = 4.000 \quad \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} \quad f_2^{(1)} = 0,014$$

$$\frac{D_3}{k_3} = \frac{0,40\ m}{0,000030\ m} = 13.333 \quad \xrightarrow{\text{Del diagrama de H. Rouse}} \quad f_3^{(1)} = 0,012$$

Se plantean a continuación las pérdidas de carga en cada uno de los tramos que conforman la instalación, expresadas en función de la ecuación de Darcy - Weisbach a los efectos de determinar los gastos circulantes en una primera aproximación:

1° aproximación

- Tubería 1:

$$J_1^{*(1)} \cong J_1^{(1)} = z_1 - z_{h4}^{(1)} = f_1^{(1)} \frac{l_1}{D_1} \frac{Q_1^{(1)2}}{2\ g\ \Omega_1^2} = f_1^{(1)} \frac{8\ l_1}{g\ \pi^2\ D_1^5} Q_1^{(1)2} =$$

$$= 45 m - z_{h4}^{(1)} = 0,018 \frac{8 \cdot 4.500 m}{9,80 m/s^2 \cdot 3,14^2 (0,20 m)^5} Q_1^{(1)2} = 20.957,51 Q_1^{(1)2}$$

$$\Rightarrow Q_1^{(1)} = \sqrt{\frac{45 m - z_{h4}^{(1)}}{20.957,51} \frac{m^3}{s}} \quad (6-372)$$

- Tubería 2:

$$J_2^{*(1)} \cong J_2^{(1)} = z_2 - z_{h4}^{(1)} = f_2^{(1)} \frac{l_2}{D_2} \frac{Q_2^{(1)2}}{2 g \Omega_2^2} = f_2^{(1)} \frac{8 l_2}{g \pi^2 D_2^5} Q_2^{(1)2} =$$

$$= 60 m - z_{h4}^{(1)} = 0,014 \frac{8 \cdot 8.500 m}{9,80 m/s^2 \cdot 3,14^2 (0,30 m)^5} Q_2^{(1)2} = 4.054,57 Q_2^{(1)2}$$

$$\Rightarrow Q_2^{(1)} = \sqrt{\frac{60 m - z_{h4}^{(1)}}{4.054,57} \frac{m^3}{s}} \quad (6-373)$$

- Tubería 3:

$$J_3^{*(1)} \cong J_3^{(1)} = z_{h4}^{(1)} - z_3 = f_3^{(1)} \frac{l_3}{D_3} \frac{Q_3^{(1)2}}{2 g \Omega_3^2} = f_3^{(1)} \frac{8 l_3}{g \pi^2 D_3^5} Q_3^{(1)2} =$$

$$= z_{h4}^{(1)} - 25 m = 0,012 \frac{8 \cdot 10.000 m}{9,80 m/s^2 \cdot 3,14^2 (0,40 m)^5} Q_3^{(1)2} = 970,25 Q_3^{(1)2}$$

$$\Rightarrow Q_3^{(1)} = \sqrt{\frac{z_{h4}^{(1)} - 25 m}{970,25} \frac{m^3}{s}} \quad (6-374)$$

A los efectos de resolver esta red abierta se adopta un proceso resolutivo de aproximaciones sucesivas tipo explícito.

El procedimiento empieza con una hipótesis inicial que luego se confirmará si es correcta o no. En este problema particular se parte de un valor que se supondrá que corresponde a la energía piezométrica z_{h4} en el nudo 4.

La estimación de dicha magnitud estará limitada por los siguientes valores:

- Menor de 60 m.

Si no fuera así, se tendría un valor que sería superior a z_1 , z_2 y z_3 , lo cual implica que el escurrimiento se produce desde el nudo 4 hacia los reservorios. En estas condiciones los tres tanques serían receptores, situación que es imposible en el problema planteado.

- Mayor de 25 m.

Continuando con un razonamiento similar al anterior, se puede afirmar que z_{h4} debe ser mayor a 25 m ya que de no ser así estarían los tres conductos derivando el fluido hacia el nudo 4. Obviamente es una condición que no se corresponde con la realidad física de la instalación propuesta.

Ecuación de continuidad aplicable a la 1° aproximación:

$$Q_1^{(1)} + Q_2^{(1)} = Q_3^{(1)}$$

$$\Rightarrow Q_1^{(1)} + Q_2^{(1)} - Q_3^{(1)} = 0 \quad (6-375)$$

$$\sqrt{\frac{45 m - z_{h4}^{(1)}}{20.957,51} \frac{m^3}{s}} + \sqrt{\frac{60 m - z_{h4}^{(1)}}{4.054,57} \frac{m^3}{s}} - \sqrt{\frac{z_{h4}^{(1)} - 25 m}{970,25} \frac{m^3}{s}} = 0$$

$$z_{h4}^{(1)} = 34,85 m$$

$$Q_1^{(1)} = \sqrt{\frac{45 m - z_{h4}^{(1)}}{20.957,51} \frac{m^3}{s}} = \sqrt{\frac{45 m - 34,85 m}{20.957,51} \frac{m^3}{s}} =$$

$$Q_1^{(1)} = 0,022 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_2^{(1)} = \sqrt{\frac{60 m - z_{h4}^{(1)}}{4.054,57} \frac{m^3}{s}} = \sqrt{\frac{60 m - 34,85 m}{4.054,57} \frac{m^3}{s}} =$$

$$Q_2^{(1)} = 0,079 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_3^{(1)} = \sqrt{\frac{z_{h4}^{(1)} - 25 m}{970,25} \frac{m^3}{s}} = \sqrt{\frac{34,85 m - 25 m}{970,25} \frac{m^3}{s}} =$$

$$Q_3^{(1)} = 0,101 \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la ecuación de continuidad (6-375):

$$Q_1^{(1)} + Q_2^{(1)} - Q_3^{(1)} = 0,022 \frac{m^3}{s} - 0,079 \frac{m^3}{s} - 0,101 \frac{m^3}{s} = 0,000 \frac{m^3}{s}$$

2° aproximación

- Tubería 1:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_1}{k_1} &= 1.333 \\ Re_1^{(1)} &= \frac{4 Q_1^{(1)}}{\pi v D_1} = \frac{4 \cdot 0,022 \text{ m}^3/s}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/s \cdot 0,20 \text{ m}} = \\ Re_1^{(1)} &= 140.127 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_1^{(2)} = 0,021 \end{array}$$

$$J_1^{(2)} = 45 \text{ m} - z_{h4}^{(2)} = 0,021 \frac{8 \cdot 4.500 \text{ m}}{9,80 \text{ m/s}^2 \cdot 3,14^2 (0,20 \text{ m})^5} Q_1^{(2)2} = 24.450,43 Q_1^{(2)2}$$

$$\Rightarrow Q_1^{(2)} = \sqrt{\frac{45 \text{ m} - z_{h4}^{(2)}}{24.450,43} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}$$

- Tubería 2:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_2}{k_2} &= 4.000 \\ Re_2^{(1)} &= \frac{4 Q_2^{(1)}}{\pi v D_2} = \frac{4 \cdot 0,079 \text{ m}^3/s}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/s \cdot 0,30 \text{ m}} = \\ Re_2^{(1)} &= 335.456 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_2^{(2)} = 0,016 \end{array}$$

$$J_2^{(2)} = 60 \text{ m} - z_{h4}^{(2)} = 0,016 \frac{8 \cdot 8.500 \text{ m}}{9,80 \text{ m/s}^2 \cdot 3,14^2 (0,30 \text{ m})^5} Q_2^{(2)2} = 4.633,80 Q_2^{(2)2}$$

$$\Rightarrow Q_2^{(2)} = \sqrt{\frac{60 \text{ m} - z_{h4}^{(2)}}{4.633,80} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}$$

- Tubería 3:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_3}{k_3} &= 13.333 \\ Re_3^{(1)} &= \frac{4 Q_3^{(1)}}{\pi v D_3} = \frac{4 \cdot 0,101 \text{ m}^3/s}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/s \cdot 0,40 \text{ m}} = \\ Re_3^{(1)} &= 321.656 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_3^{(2)} = 0,015 \end{array}$$

$$J_3^{(2)} = z_{h4}^{(2)} - 25 m = 0,015 \frac{8 \cdot 10.000 m}{9,80 m/s^2 \cdot 3,14^2 (0,40 m)^5} Q_3^{(2)2} = 1.212,82 Q_3^{(2)2}$$

$$\Rightarrow Q_3^{(2)} = \sqrt{\frac{z_{h4}^{(2)} - 25 m}{1.212,82} \frac{m^3}{s}}$$

Ecuación de continuidad aplicable a la 2° aproximación:

$$\Rightarrow Q_1^{(2)} + Q_2^{(2)} - Q_3^{(2)} = 0 \quad (6-376)$$

$$\sqrt{\frac{45 m - z_{h4}^{(2)}}{24.450,43} \frac{m^3}{s}} + \sqrt{\frac{60 m - z_{h4}^{(2)}}{4.633,80} \frac{m^3}{s}} - \sqrt{\frac{z_{h4}^{(2)} - 25 m}{1.212,82} \frac{m^3}{s}} = 0$$

$$z_{h4}^{(2)} = 35,41 m$$

$$\therefore Q_1^{(2)} = 0,020 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_2^{(2)} = 0,073 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_3^{(2)} = 0,093 \frac{m^3}{s}$$

3° aproximación

- Tubería 1:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_1}{k_1} &= 1.333 \\ Re_1^{(2)} &= \frac{4 Q_1^{(2)}}{\pi \nu D_1} = \frac{4 \cdot 0,020 m^3/s}{3,14 \cdot 10^{-6} m^2/s \cdot 0,20 m} \\ Re_1^{(2)} &= 127.389 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_1^{(3)} = 0,021 \end{array}$$

$$J_1^{(3)} = 45 m - z_{h4}^{(3)} = 0,021 \frac{8 \cdot 4.500 m}{9,80 m/s^2 \cdot 3,14^2 (0,20 m)^5} Q_1^{(3)2} = 24.450,43 Q_1^{(3)2}$$

$$\Rightarrow Q_1^{(3)} = \sqrt{\frac{45 m - z_{h4}^{(3)}}{24.450,43} \frac{m^3}{s}}$$

- Tubería 2:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_2}{k_2} &= 4.000 \\ Re_2^{(2)} &= \frac{4 Q_2^{(2)}}{\pi v D_2} = \frac{4 \cdot 0,073 \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 0,30 \text{ m}} \\ Re_2^{(2)} &= 309.979 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_2^{(3)} = 0,017 \end{array}$$

$$J_2^{(3)} = 60 \text{ m} - z_{h4}^{(3)} = 0,017 \frac{8 \cdot 8.500 \text{ m}}{9,80 \text{ m/s}^2 \cdot 3,14^2 (0,30 \text{ m})^5} Q_2^{(3)2} = 4.923,41 Q_2^{(3)2}$$

$$\Rightarrow Q_2^{(3)} = \sqrt{\frac{60 \text{ m} - z_{h4}^{(3)}}{4.923,41}} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

- Tubería 3

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_3}{k_3} &= 13.333 \\ Re_3^{(2)} &= \frac{4 Q_3^{(2)}}{\pi v D_3} = \frac{4 \cdot 0,093 \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 0,40 \text{ m}} \\ Re_3^{(2)} &= 296.178 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_3^{(3)} = 0,015 \end{array}$$

$$J_3^{(3)} = z_{h4}^{(3)} - 25 \text{ m} = 0,015 \frac{8 \cdot 10.000 \text{ m}}{9,80 \text{ m/s}^2 \cdot 3,14^2 (0,40 \text{ m})^5} Q_3^{(3)2} = 1.212,82 Q_3^{(3)2}$$

$$\Rightarrow Q_3^{(3)} = \sqrt{\frac{z_{h4}^{(3)} - 25 \text{ m}}{1.212,82}} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Ecuación de continuidad aplicable a la 3ª aproximación:

$$\Rightarrow Q_1^{(3)} + Q_2^{(3)} - Q_3^{(3)} = 0 \quad (6-377)$$

$$\sqrt{\frac{45 \text{ m} - z_{h4}^{(3)}}{24.450,43}} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} + \sqrt{\frac{60 \text{ m} - z_{h4}^{(3)}}{4.923,41}} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - \sqrt{\frac{z_{h4}^{(3)} - 25 \text{ m}}{1.212,82}} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0$$

$$z_{h4}^{(3)} = 35,10 \text{ m}$$

$$\therefore Q_1^{(3)} = 0,020 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_2^{(3)} = 0,071 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_3^{(3)} = 0,091 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

4° aproximación

- Tubería 1:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_1}{k_1} &= 1.333 \\ Re_1^{(3)} &= \frac{4 Q_1^{(3)}}{\pi v D_1} = \frac{4 \cdot 0,020 \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 0,20 \text{ m}} \\ Re_1^{(3)} &= 127.389 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_1^{(4)} = 0,021 \end{array}$$

Resulta definitivamente: $f_1^{(4)} = f_1^{(3)} = f_1 = 0,021$

- Tubería 2:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_2}{k_2} &= 4.000 \\ Re_2^{(3)} &= \frac{4 Q_2^{(3)}}{\pi v D_2} = \frac{4 \cdot 0,071 \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 0,30 \text{ m}} \\ Re_2^{(3)} &= 301.486 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_2^{(4)} = 0,017 \end{array}$$

Resulta definitivamente: $f_2^{(4)} = f_2^{(3)} = f_2 = 0,017$

- Tubería 3:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_3}{k_3} &= 13.333 \\ Re_3^{(3)} &= \frac{4 Q_3^{(3)}}{\pi v D_3} = \frac{4 \cdot 0,091 \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 0,40 \text{ m}} \\ Re_3^{(3)} &= 289.809 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Del diagrama de H. Rouse} \\ \rightarrow f_3^{(4)} = 0,015 \end{array}$$

Resulta definitivamente: $f_3^{(4)} = f_3^{(3)} = f_3 = 0,015$

Los caudales finales de cálculo corresponden a los determinados en la 3ª aproximación. O sea:

$$\therefore \begin{cases} Q_1 = 0,020 \frac{m^3}{s} \\ Q_2 = 0,071 \frac{m^3}{s} \\ Q_3 = 0,091 \frac{m^3}{s} \end{cases}$$

b) Solución aplicando la ecuación de Hazen - Williams.

- Tubería 1:

$$\begin{aligned} J_1^* &\cong J_1 = z_1 - z_{h4} = \frac{l_1}{\left(0,278 C_{H-W1}\right)^{1,85}} \frac{Q_1^{1,85}}{D_1^{4,87}} = \\ &= 45 m - z_{h4} = \frac{4.500 m}{\left(0,278 120\right)^{1,85}} \frac{Q_1^{1,85}}{\left(0,20 m\right)^{4,87}} = 20.376,85 Q_1^{1,85} \\ \Rightarrow Q_1 &= \left[\frac{45 m - z_{h4}}{20.376,85} \right]^{\frac{1}{1,85}} m^3/s \end{aligned} \quad (6-378)$$

- Tubería 2:

$$\begin{aligned} J_2^* &\cong J_2 = z_2 - z_{h4} = \frac{l_2}{\left(0,278 C_{H-W2}\right)^{1,85}} \frac{Q_2^{1,85}}{D_2^{4,87}} = \\ &= 60 m - z_{h4} = \frac{8.500 m}{\left(0,278 145\right)^{1,85}} \frac{Q_2^{1,85}}{\left(0,30 m\right)^{4,87}} = 3.204,97 Q_2^{1,85} \\ \Rightarrow Q_2 &= \left[\frac{60 m - z_{h4}}{3.204,97} \right]^{\frac{1}{1,85}} m^3/s \end{aligned} \quad (6-379)$$

- Tubería 3:

$$J_3^* \cong J_3 = z_{h4} - z_3 = \frac{l_3}{\left(0,278 C_{H-W3}\right)^{1,85}} \frac{Q_3^{1,85}}{D_3^{4,87}}$$

$$= z_{h4} - 25 \text{ m} = \frac{10.000 \text{ m}}{(0,278 \text{ 135})^{1,85}} \frac{Q_3^{1,85}}{(0,40 \text{ m})^{4,87}} = 1.060,15 Q_3^{1,85}$$

$$\Rightarrow Q_3 = \left[\frac{z_{h4} - 25 \text{ m}}{1.060,15} \right]^{\frac{1}{1,85}} \text{ m}^3/\text{s} \quad (6-380)$$

Planteando la ecuación de continuidad del sistema:

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0 \quad (6-381)$$

Luego reemplazando (6-378), (6-379) y (6-380) en (6-381), resulta la siguiente ecuación con una única incógnita z_{h4} .

$$\left[\frac{45 \text{ m} - z_{h4}}{20.376,85} \right]^{\frac{1}{1,85}} \text{ m}^3/\text{s} + \left[\frac{60 \text{ m} - z_{h4}}{3.204,97} \right]^{\frac{1}{1,85}} \text{ m}^3/\text{s} - \left[\frac{z_{h4} - 25 \text{ m}}{1.060,15} \right]^{\frac{1}{1,85}} \text{ m}^3/\text{s} = 0$$

Resolviendo la anterior se obtiene:

$$\Rightarrow z_{h4} = 36,46 \text{ m}$$

Finalmente, los caudales circulantes concluyen en:

$$\therefore \begin{cases} Q_1 = 0,017 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ Q_2 = 0,070 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ Q_3 = 0,087 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{cases}$$

Comparando estos valores con los obtenidos mediante el uso del método racional, se observa que los caudales alcanzan magnitudes muy similares.