



PROGRAMA
INFORMÁTICO
EDUCATIVO

Soporte Teórico

**ESCURRIMIENTOS A
SUPERFICIE LIBRE**



HYDROCÁLCULUS - *Programa Informático Educativo*

Soporte Teórico

Escurrimientos a superficie libre

1^ª Versión

Año 2016

ÍNDICE

ESCURRIMIENTOS A SUPERFICIE LIBRE.	1
1. Consideraciones generales.	1
1.1. Definiciones.	3
1.2. Unidades.	5
1.3. Hipótesis simplificativas.	5
2. Formas de la sección transversal.	11
2.1. Clasificación.	11
2.2. Características geométricas.	14
2.2.1. Secciones de contorno abierto.	14
2.2.2. Secciones de contorno cerrado.	17
3. Ecuaciones generales del movimiento uniforme.	25
3.1. Ecuación de continuidad.	25
3.2. Ecuación de Bernoulli.	26
3.3. Fórmula de Chézy.	28
3.3.1. Coeficiente de Chézy.	31
3.3.2. Fórmula de Chézy - Manning.	35
3.4. Relación tirante - pérdida de energía unitaria.	38
4. Distribución de presiones.	40
5. Distribución de velocidades.	42
5.1. Descripción.	42
5.2. Velocidades límites.	45
6. Cálculo de canales.	47
6.1. Problemas.	47
6.2. Procedimiento de cálculo.	48
6.3. Cálculo de secciones usuales.	49
6.3.1. Cálculo con criterio de mínima resistencia.	67
6.3.2. Cálculo con criterio de máximo caudal.	89
6.4. Secciones convenientes.	109
6.5. Resguardo en el diseño de la sección.	109
7. Energía propia en escurrimientos con movimiento uniforme.	111
7. 1. Energía propia en función del tirante.	112
7. 2. Condición de escurrimiento crítico.	114
7. 3. Cálculo del tirante crítico.	117
7. 4. Velocidad crítica.	119
7. 5. Pendiente crítica.	121

7. 6.	Clasificación de la corriente.	122
7. 7.	Número de Froude.	126
7. 8.	Parábola de Koch.	129
7. 9.	Experiencia de Bakhmeteff.	132
7.10.	Influencia de la viscosidad.	136
7.11.	Criterio de diseño.	137
8.	Escurrimientos con movimiento bruscamente variado.	141
8.1.	Resalto hidráulico.	141
8.2.	Clasificación.	141
8.3.	Resalto vivo.	143
8.3.1.	Tirantes conjugados.	144
8.3.2.	Longitud del resalto.	153
8.3.3.	Localización del resalto.	154
8.3.4.	Pérdida de energía del resalto.	156
8.4.	Criterio del U. S. Bureau of Reclamation.	158
9.	Escurrimientos con movimiento gradualmente variado.	160
9.1.	Curva de remanso.	161
9.2.	Variación de la curva de remanso con respecto a la longitud.	162
9.3.	Clasificación.	165
9.4.	Ecuación diferencial de la curva de remanso.	167
9.4.1.	Variación de la energía propia con respecto al recorrido.	169
9.4.2.	Variación de la energía propia con respecto al tirante.	171
9.4.3.	Análisis y alternativas de la ecuación diferencial.	172
9.4.4.	Signo de la variación del tirante con respecto al recorrido.	176
9.4.5.	Condiciones de la curva de remanso en los límites.	180
9.4.6.	Características de las curvas de remanso tipo D y F	188
9.4.7.	Características de las curvas de remanso tipo C , H y A	192
9.5.	Ejemplos.	198
9.5.1.	Singularidades generadoras de curvas de remanso tipo D . ..	198
9.5.2.	Singularidades generadoras de curvas de remanso tipo F . ..	200
9.6.	Casos prácticos.	202
9.6.1.	Modificación de la pendiente longitudinal.	202
9.6.2.	Interposición de compuerta plana.	215
9.7.	Trazado analítico - Integración de la curva de remanso.	223
9.7.1.	Procedimiento resolutivo - Alternativa I.	227
9.7.2.	Procedimiento resolutivo - Alternativa II.	232

ESCURRIMIENTOS A SUPERFICIE LIBRE.

1. CONSIDERACIONES GENERALES.

Desde un punto de vista amplio y general se define un escurrimiento a superficie libre como a aquel en el cual se produce el movimiento de una masa líquida contenida dentro de un conducto compuesto de un perímetro sólido en la parte inferior y un gas no miscible superiormente, cuya presión se puede ser mayor, menor o igual a la atmosférica (Ver *Figura 1*).

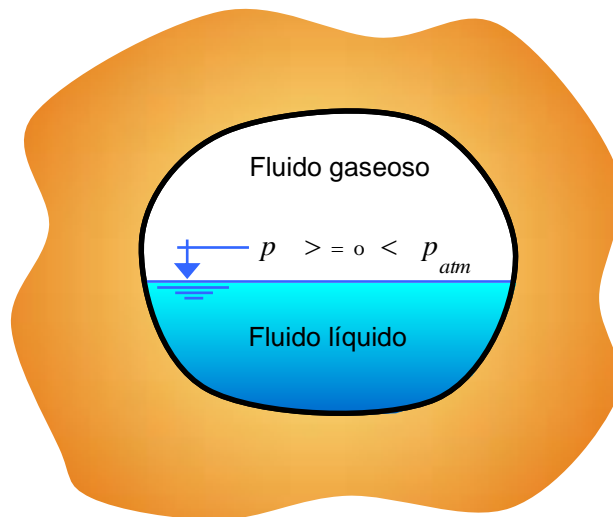


Figura 1 - Escurrimiento general a superficie libre.

En el caso particular que se desarrolla en el presente capítulo se considera que el líquido circulante es exclusivamente agua y el fluido gaseoso circundante en el extremo superior es aire sometido a la presión atmosférica normal. Estas hipótesis básicas dan lugar al estudio de los escurrimientos a superficie libre que se producen en cauces naturales tales como ríos y arroyos o bien en canales artificiales.

En estas condiciones el escurrimiento del líquido se genera en contacto directo con la atmósfera, creando una superficie libre que es la correspondiente a la separación entre la masa líquida y el aire (Ver *Figura 2*).

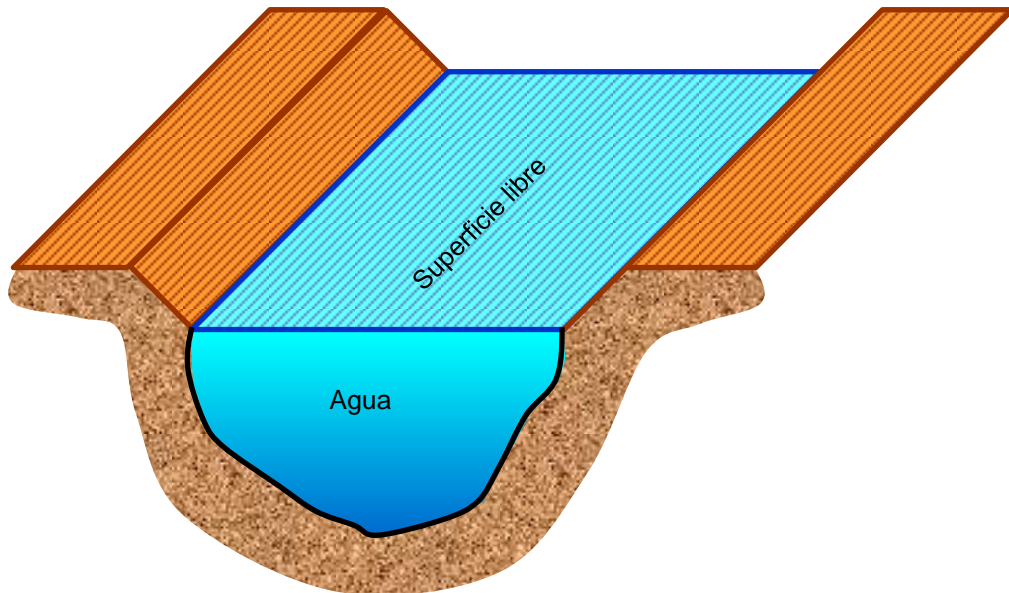


Figura 2 - Escurrimiento particular a superficie libre.

De esta manera se diferencia claramente de los escurrimientos forzados, causados por efecto de la carga de presión, tales como los que tienen lugar en tuberías donde el líquido llena completamente la sección conformada por los bordes sólidos (Ver *Figura 3*).

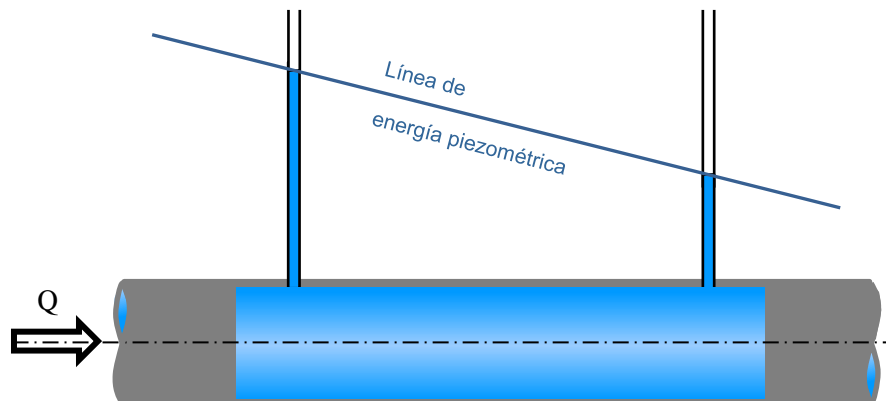


Figura 3 - Escurrimiento a presión.

Se considera que la superficie sólida del canal es de características impermeables, y por lo tanto el caudal a través de toda la sección transversal del mismo resulta ser constante y consecuentemente es válido el concepto de tubo de corriente. Además, en el estudio se asume la simplificación que supone velocidades medias aplicadas a cada una de las secciones, por lo cual el análisis en cuestión deriva en ser del tipo unidimensional.

La superficie libre constituye un límite del tubo de corriente y los restantes son los de la forma del canal que contiene al escurrimiento. Consecuentemente bajo el efecto de las fuerzas puestas en juego, la superficie libre y los contornos sólidos que limitan el escurrimiento, son superficies de corriente, formadas por infinitas líneas de corriente, y en todos los puntos de la misma, los vectores velocidad son tangentes a esas superficies.

Al ser constante la presión de la superficie libre e igual a la presión atmosférica, las fuerzas actuantes son las que resultan de la presión, de la gravedad, y las debidas al rozamiento, originadas por las propiedades viscosas del líquido (agua en este caso). Si la superficie libre presentara curvaturas significativas, sería preciso añadir las fuerzas que energía superficial, pero la realidad de esas fuerzas que originan la misma, es irrelevante en términos tecnológicos comparativamente a las ya nombradas.

1.1. Definiciones.

Ω Sección transversal.

También llamada sección mojada del escurrimiento.

Q Gasto o caudal.

Volumen líquido que atraviesa la sección transversal del canal por unidad de tiempo.

U Velocidad media.

Velocidad ficticia que representa una velocidad constante en todos los puntos de la sección transversal. Resulta del cociente entre el gasto o caudal Q y la sección transversal Ω .

$$U = Q / \Omega$$

h Tirante hidráulico o calado.

Distancia entre la superficie libre y el punto más distante del fondo del canal, medido sobre una recta vertical en la sección transversal.

e Eje de referencia.

En las conducciones en las cuales se produce un escurrimiento a superficie libre se adopta, por convención y conveniencia, como eje de referencia a los fines de aplicar la ecuación de Bernoulli, la línea longitudinal coincidente con el fondo del cauce (Ver *Figura 4*). A diferencia de los escurrimientos a presión, en los cuales dicho eje coincide con el baricentro de la sección transversal.

χ Perímetro mojado.

Longitud del contorno de la sección transversal en estudio que se encuentra en contacto entre el líquido y el sólido que lo contiene (Ver *Figura 7.4*).

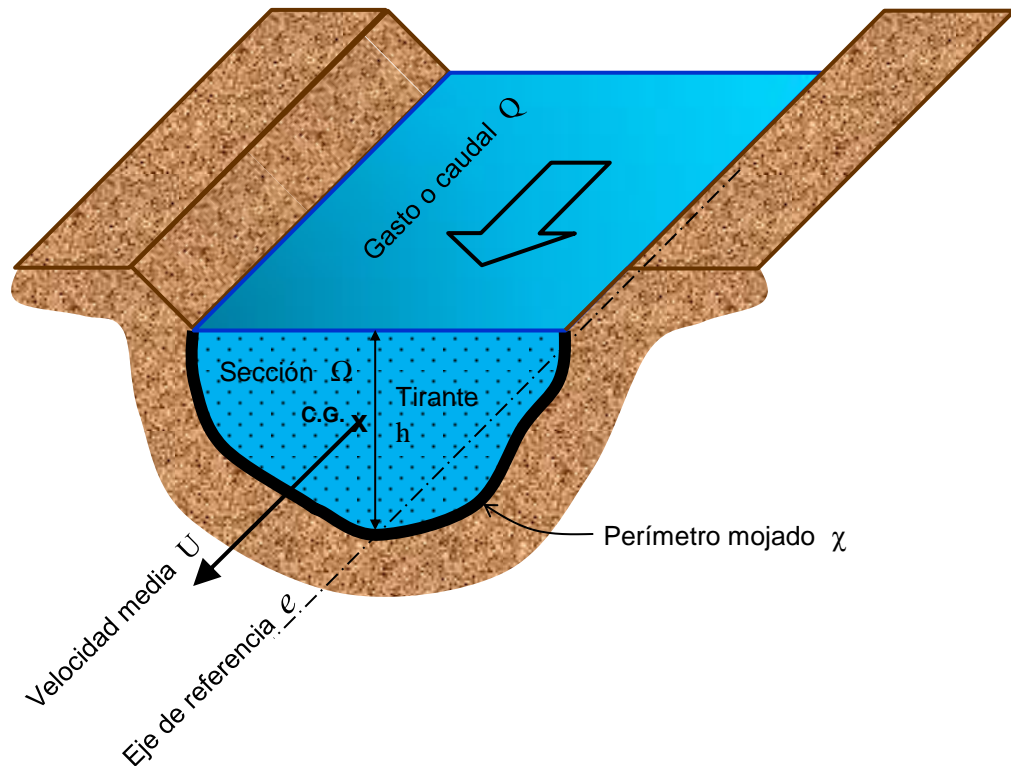


Figura 4 – Definiciones geométricas y cinemáticas.

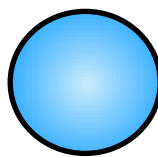
R Radio hidráulico.

Relación entre la sección transversal Ω considerada y su perímetro mojado χ .

$$R = \Omega / \chi$$

Tal su definición y observando que posee unidades de longitud, resulta ser una magnitud no tangible, por consiguiente no se la puede mensurar con la asistencia de ningún instrumento de medición.

En caso de tratarse de un escurrimiento a presión, el radio hidráulico a través de una tubería de sección circular es:



$$R = \frac{\pi D^2}{4 \pi D} = \frac{D}{4} \quad (1)$$

1.2. Unidades.

Tabla 1 Ecuaciones de dimensión.

DESIGNACIÓN	NOTACIÓN	ECUACIÓN DE DIMENSIÓN	UNIDADES		
			C.G.S	M.K.S.	TÉCNICO
Sección transversal	Ω	$[\Omega] = L^2$	cm^2	m^2	m^2
Gasto o caudal	Q	$[Q] = \frac{L}{T} L^2 = \frac{L^3}{T}$	cm^3/s	m^3/s	m^3/s
Velocidad media	U	$[U] = \frac{L}{T}$	cm/s	m/s	m/s
Tirante hidráulico	h	$[h] = L$	cm	m	m
Perímetro mojado	χ	$[\chi] = L$	cm	m	m
Radio hidráulico	R	$[R] = \frac{L^2}{L} = L$	cm	m	m

Las unidades más usuales en las aplicaciones prácticas de los escurrimientos a superficie libre son las que corresponden a los sistemas M.K.S. y Técnico simultáneamente.

1.3. Hipótesis simplificativas.

Analizando con la mayor precisión académica, y siguiendo la tradición en lo que respecta al estudio de las conducciones de fluidos, resulta redundante definir:

- Δl Tramo en estudio de una conducción. Se mide en la dirección del eje de referencia e y coincide con la solera en este caso (Ver Figura 5).
- Ω Sección transversal considerada, la cual contiene al tirante hidráulico h . Se ubica perpendicular al eje de referencia e (Ver Figura 5).

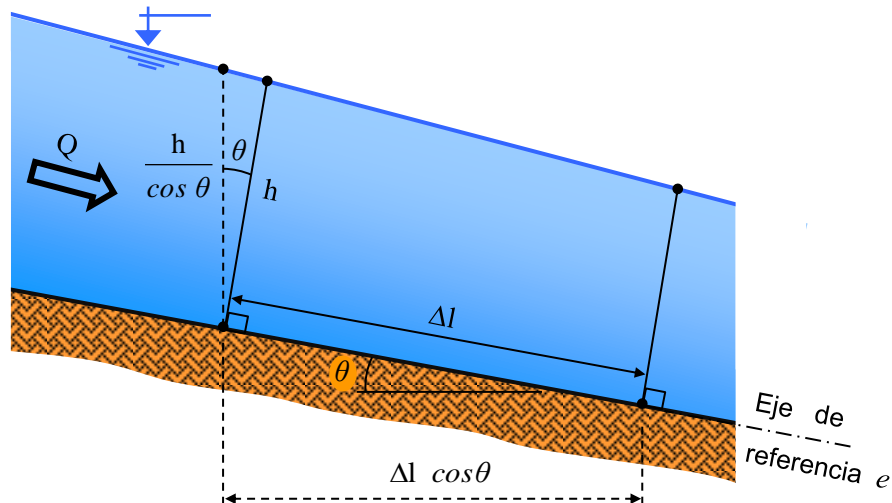


Figura 5 – Aclaraciones geométricas.

La experiencia prueba que en la gran mayoría de los escurrimientos a superficie libre, el movimiento se realiza con pendientes muy pequeñas.

Si por ejemplo, se considera un canal con una pendiente longitudinal del 1% (1 unidad en vertical y 100 en horizontal) en su solera, la misma genera una importante velocidad en el escurrimiento de la masa líquida. De por sí no resultan para nada comparativas las grandes magnitudes cinemáticas que provocan el movimiento, con la pequeña pendiente en cuestión, la que visualmente se manifiesta de una forma muy difícil de interpretar su sentido respecto a la referencia horizontal.

En general los canales se diseñan con pendientes mucho menores al 1%, ya que como se expresó en el párrafo anterior, esa pendiente que geoméricamente es pequeña, resulta ser muy grande a los efectos de los escurrimientos en estudio.

Para el caso indicado, se señalan las magnitudes geométricas y trigonométricas en la *Tabla 2*.

Tabla 2 Magnitudes geométricas y trigonométricas.

PENDIENTE		ÁNGULO θ		$\cos \theta$	$1/\cos \theta$
Porcentaje	$tg \theta$	Radianes	Grados		
1%	0,01	0,009999667	0,572938698	$0,99995 \cong 1$	$1,00005 \cong 1$

De la misma se desprende que, con un mínimo error y atendiendo simultáneamente a la *Figura 5*, se pueden hacer dos consideraciones:

$$\cdot \frac{h}{\cos \theta} = \frac{h}{0,99995} = h \cdot 1,00005 \cong h \quad (2)$$

$$\cdot \Delta l \cos \theta = \Delta l \cdot 0,99995 \cong \Delta l \quad (3)$$

Estas observaciones hacen posible plantear dos hipótesis simplificadoras de singular utilidad en la práctica:

- 1- El tirante hidráulico h , perteneciente a la sección Ω , se mide sobre la dirección vertical.
- 2- La longitud del canal, o tramos parciales Δl del mismo, se calculan sobre la dirección horizontal.

Ver *Figura 6*.

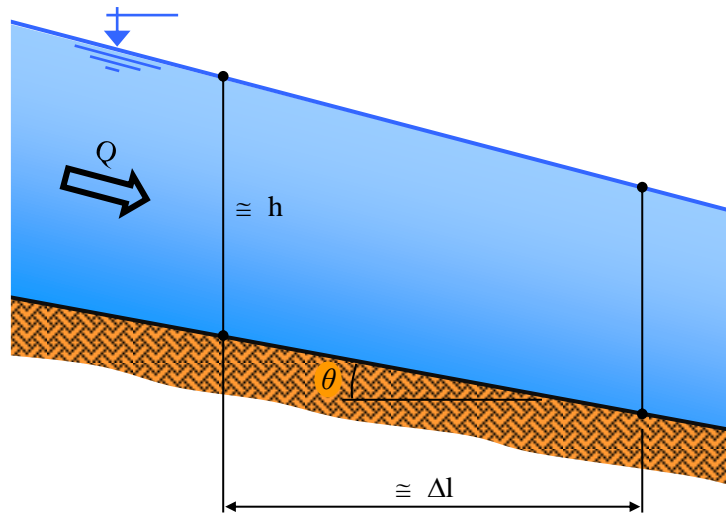


Figura 6 – Simplificaciones geométricas.

Ambas suposiciones dan origen a los siguientes corolarios:

- De la 1° hipótesis:
- Haciendo primeramente un análisis un tanto minucioso y con estricto rigor conceptual (Ver Figura 7), se tienen los siguientes segmentos que indican:

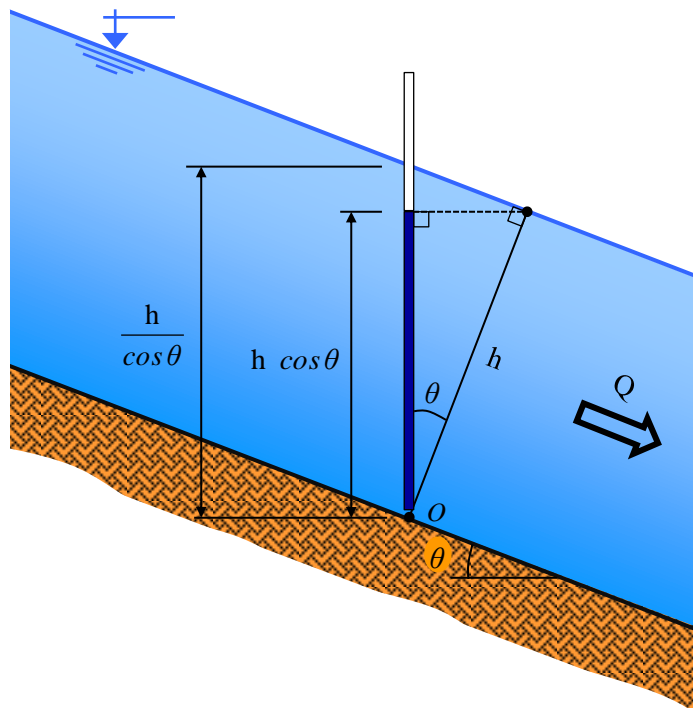


Figura 7 – Energía de presión por unidad de peso.

- h Tirante hidráulico. Se mide a partir de un punto O , sobre la sección normal a la conducción.
- $h \cos \theta$ Altura representativa de la presión en el punto O .
- $h / \cos \theta$ Tirante del canal medido sobre una sección vertical a partir del punto O .

Sí el ángulo θ es lo suficientemente pequeño como se ha señalado, los tres segmentos considerados son prácticamente iguales y se confunden en uno solo.

$$h \cong h \cos \theta \cong \frac{h}{\cos \theta} \quad (4)$$

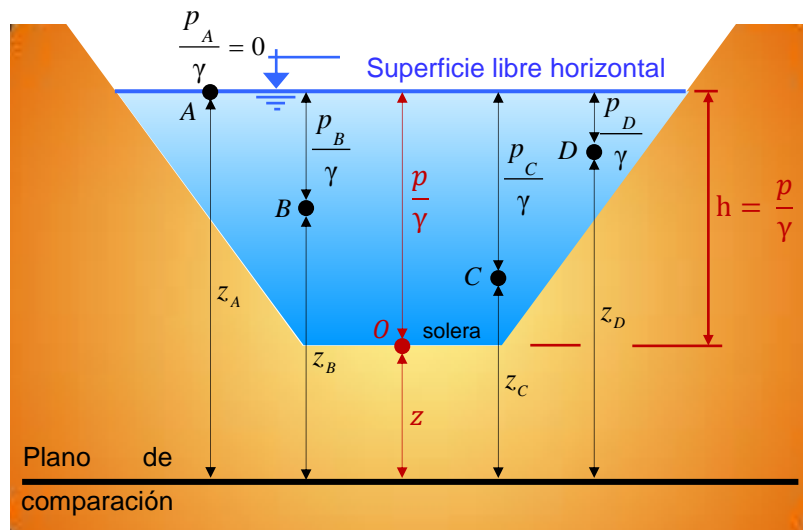


Figura 8 – Distribución de la presión en una sección transversal.

Viendo la Figura 8, es oportuno recordar las consecuencias de las Reglas de Bresse aplicadas a una sección transversal de un canal trapecoidal, por ejemplo, con una superficie libre horizontal en la cual se da cumplimiento al menos con una de las siguientes pautas asociadas al escurrimiento:

- . Movimiento rectilíneo.
- . Radio de curvatura de la traza del canal muy importante.
- . Velocidad media muy pequeña.

En estas condiciones, la teoría prueba que en todos los puntos de una misma sección transversal en cuestión, se cumple la ecuación fundamental de la hidrostática.

$$z + \frac{p}{\gamma} = cte. \quad (5)$$

En consecuencia, si bien se podría adoptar arbitrariamente cualquier punto representativo de la sección para acotar los valores de z y p/γ , en el caso de los canales resulta a toda luz conveniente la adopción del punto más bajo de la sección (solera para este caso) a fin de acotar dichos valores (a diferencia de los conductos a presión, donde se toma el eje de la conducción,

o lo que es equivalente, el baricentro de la sección transversal). Adoptando la solera o el punto más bajo del canal, resultan para dos secciones distintas:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{p_1}{\gamma} \\ h_2 = \frac{p_2}{\gamma} \end{cases} \quad (6)$$

Por lo tanto se conviene en la adopción de eje de referencia e, a la línea longitudinal que atraviesa los puntos más bajos de las secciones del canal.

Finalmente y como corolario de la 1ª hipótesis simplificativa se tiene que el segundo término de la ecuación de Bernoulli, correspondiente a la energía de presión por unidad de peso p/γ , coincide con el tirante hidráulico h , pero medido ahora sobre la dirección vertical (Ver Figura 9).

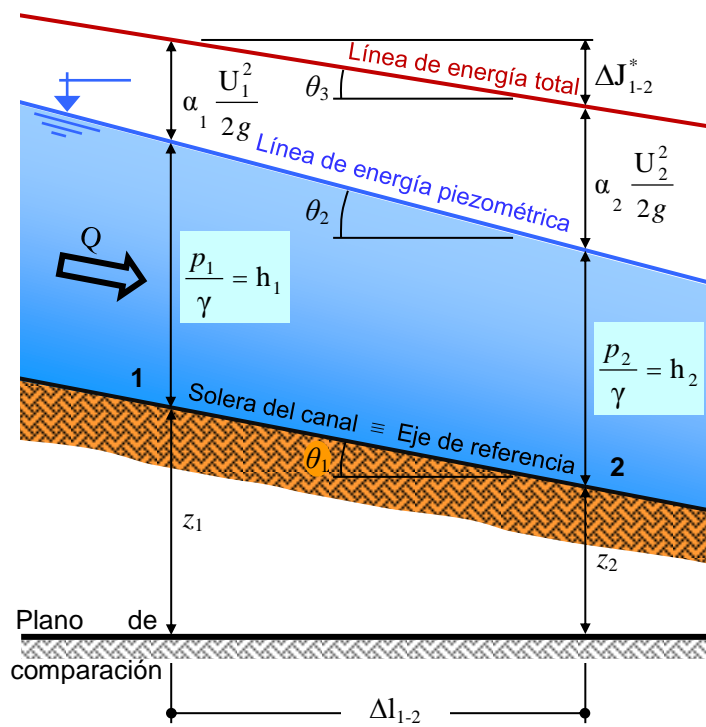


Figura 9 – Gráfico de la ecuación de Bernoulli.

En consecuencia, para los escurrimientos a superficie libre, la ecuación de Bernoulli se expresa más simplemente de la siguiente manera:

$$z_1 + h_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J_{1-2}^* \quad (7)$$

- De la 2ª hipótesis, y con el auxilio de la función trigonométrica tangente, se simplifican los cálculos de las siguientes magnitudes:

- Pendiente longitudinal i .

$$i = \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{z_1 - z_2}{\Delta l_{1-2}} \quad (8)$$

Ver Figura 10.

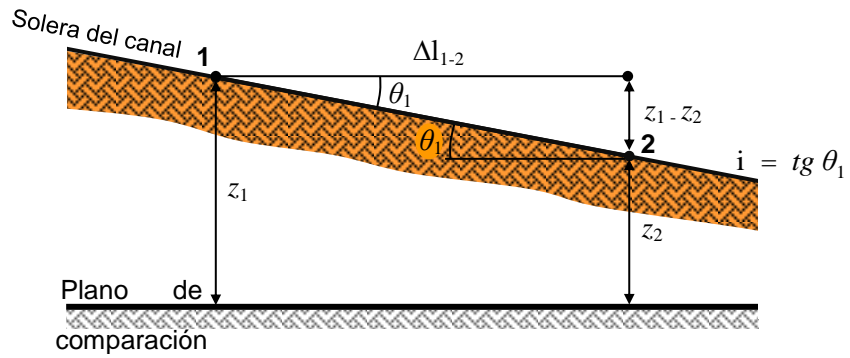


Figura 10 – Pendiente longitudinal.

- Pérdida de carga unitaria j .

$$j = \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} \quad (9)$$

Ver Figura 11.

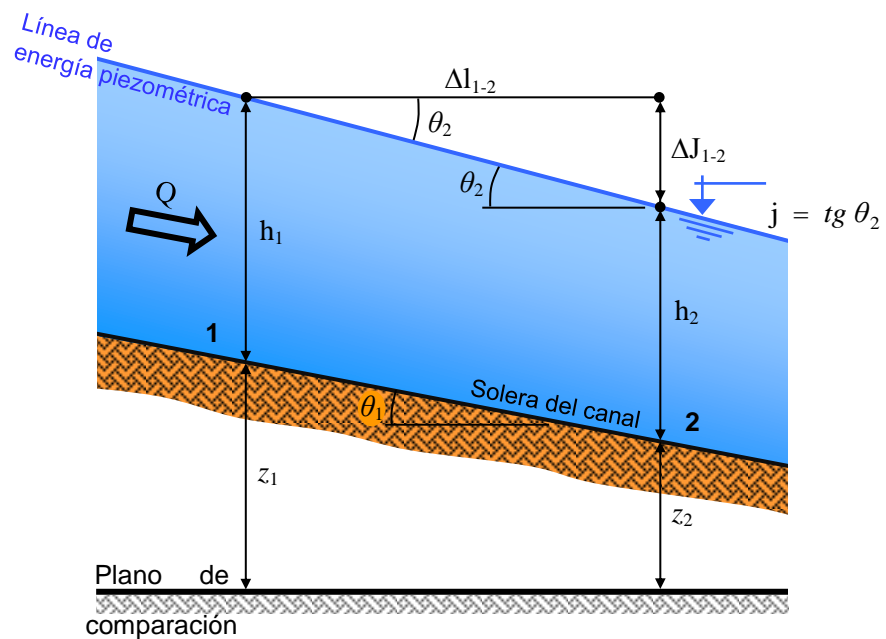


Figura 11 – Pérdida de carga unitaria.

- Pérdida de energía unitaria j^* .

$$j^* = \operatorname{tg} \theta_3 = \frac{\Delta J_{1-2}^*}{\Delta l_{1-2}} \quad (10)$$

Ver Figura 12.

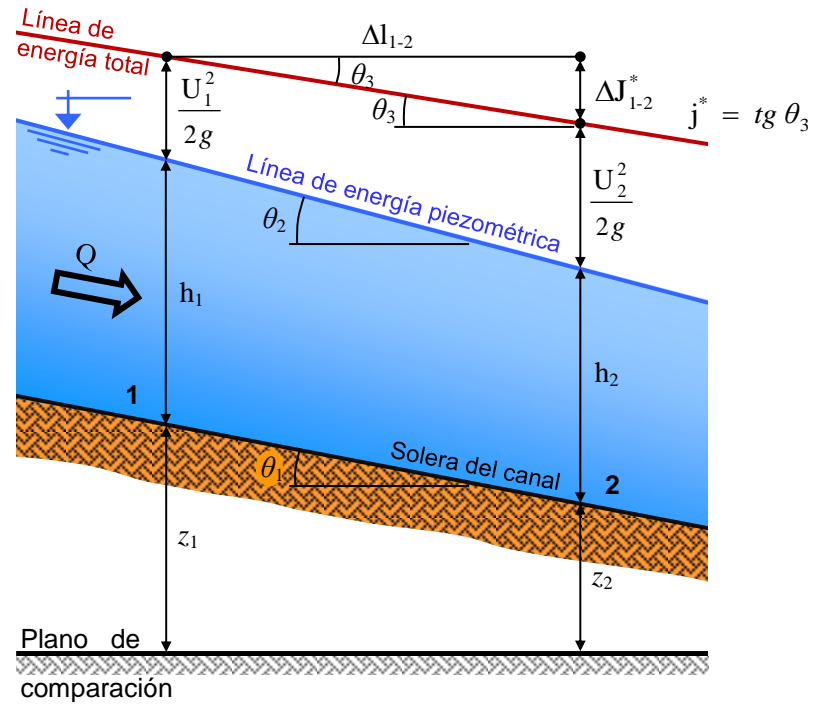


Figura 12 – Pérdida de energía unitaria.

2. FORMAS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL.

2.1. Clasificación.

La forma más común de clasificar las secciones de los escurrimientos a superficie libre es desde el punto de vista del contorno que envuelve las áreas transversales.

Desde esta óptica se tienen secciones de tipo:

- Contorno abierto.
- Contorno cerrado.

a) Contorno abierto (Ver Figura 13).

También conocidos corrientemente como canales a cielo abierto.

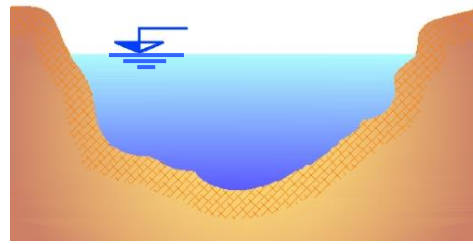


Figura 13 – Sección natural de contorno abierto.

Los escurrimientos en conducciones de contorno abierto pueden presentarse a través de un cauce natural como el indicado en la *Figura 13* o bien en canales artificiales, construidos por la mano de obra del hombre.

Existen un gran número de formas utilizadas en el diseño de las secciones transversales. En la *Figura 14* se señalan algunas de las más usadas en la práctica.

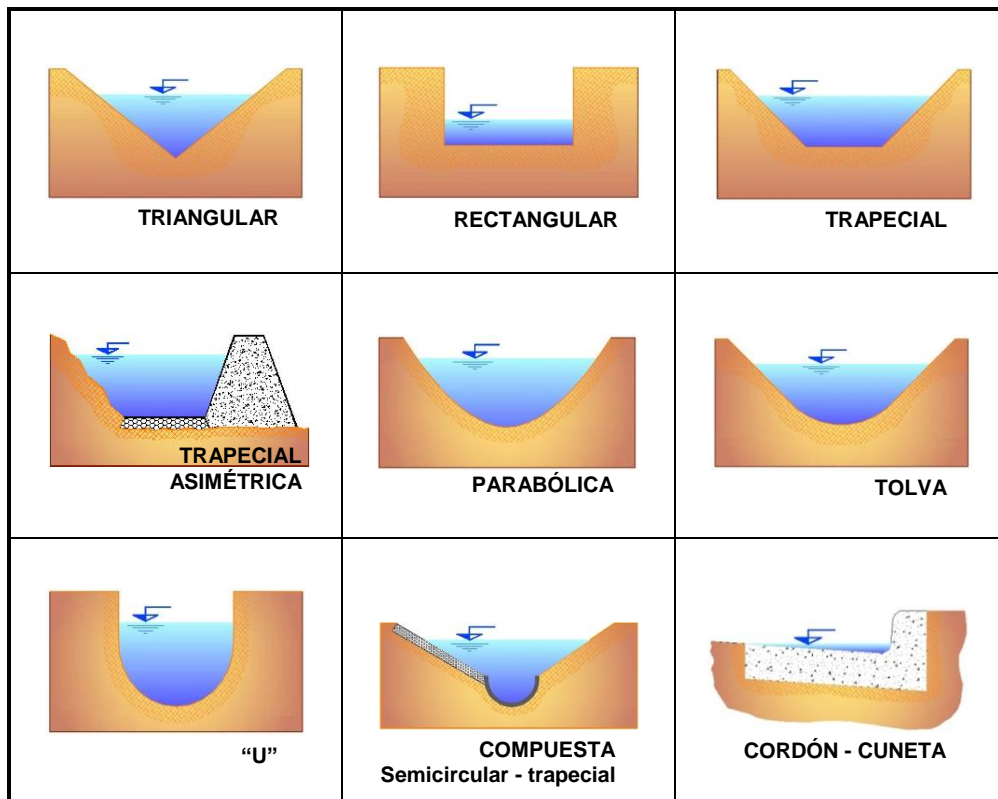


Figura 14 – Secciones artificiales de contorno abierto.

A su vez, los canales artificiales a cielo abierto pueden ser construidos en *desmante* (Ver *Figura 7.15*) o en *terraplén* (Ver *Figura 7.16*), según su ubicación respecto al nivel que ocupa con relación al terreno natural (T.N.) O bien una posición intermedia de las dos anteriores, parte en desmante y parte en terraplén (Ver *Figura 7.17*).

Cualquiera de estas disposiciones dependerá de la diferencia que exista en el proyecto entre la pendiente del terreno natural y la pendiente longitudinal del canal i.

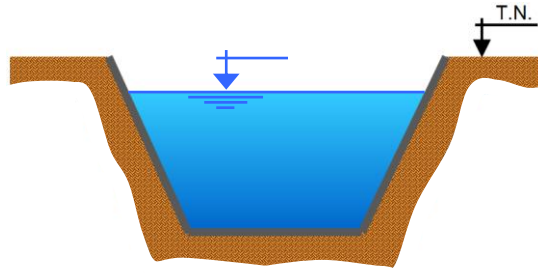


Figura 15 – Sección en desmonte.

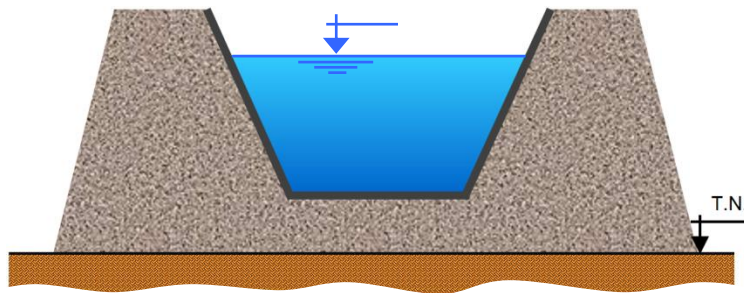


Figura 16 – Sección en terraplén.

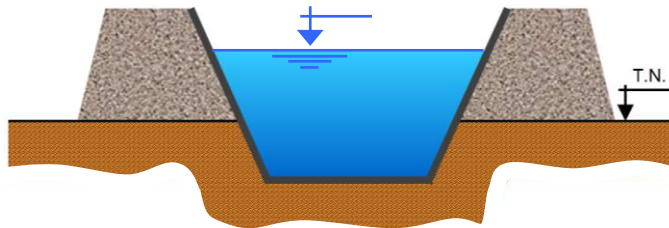


Figura 17 – Sección con parte en desmonte y parte en terraplén.

b) Contorno cerrado.

Es muy poco común encontrar en la naturaleza escurrimientos a superficie libre con contorno cerrado (Ver Figura 18).

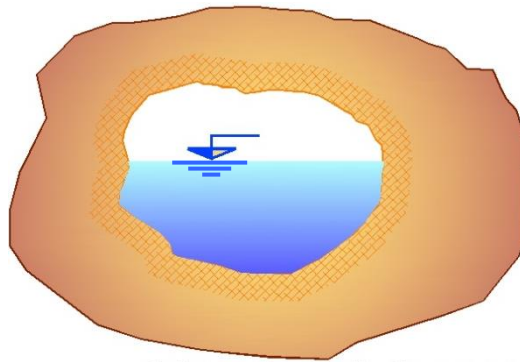


Figura 18 – Sección natural de contorno cerrado.

Al igual que las secciones de contorno abierto se pueden encontrar un número importante de conformaciones de secciones artificiales de marco cerrado, indicándose en la *Figura 19* las más practicadas en los proyectos.

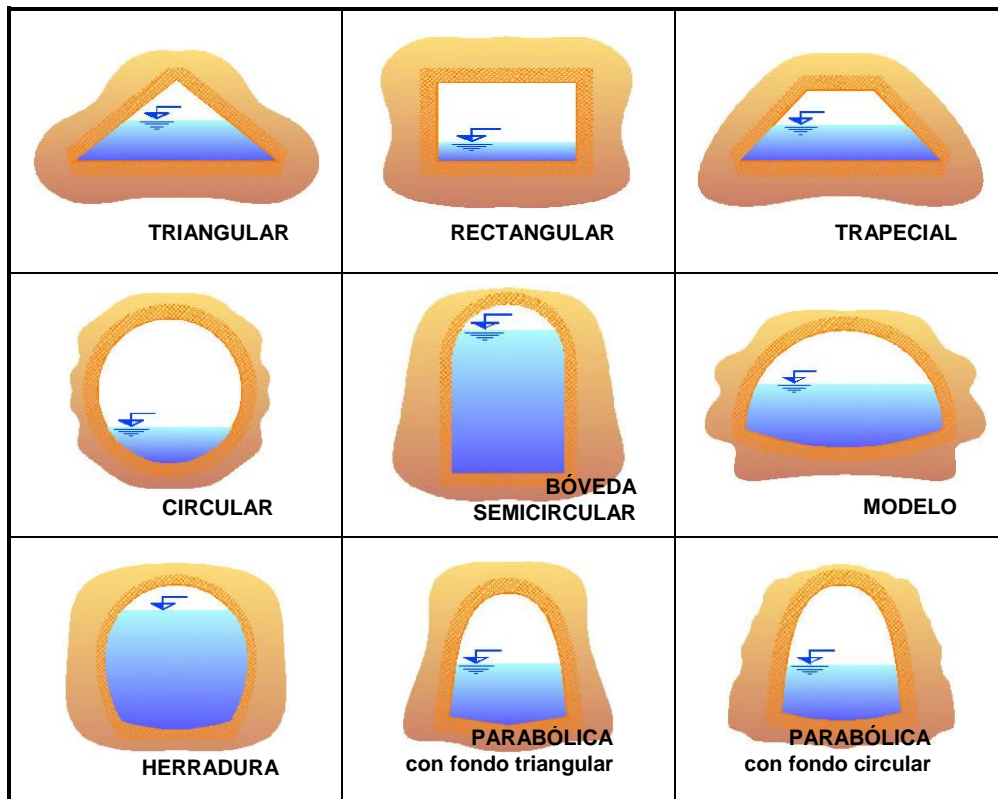


Figura 19 – Secciones artificiales de contorno cerrado.

Su uso es de aplicación más generalizada en zonas pobladas, donde las conducciones conviene ser instaladas de forma soterrada a fin de evitar que las mismas sean un obstáculo urbanístico, siendo su utilidad más directa las destinadas a desagües cloacales y pluviales. También se construyen en lugares donde se requiere atravesar una elevación del terreno en forma de túnel o en casos donde se pretende resguardar el líquido de las inclemencias climáticas o el aporte indiscriminado de sólidos o fluidos no deseados.

2.2. Características geométricas.

Se resumen los parámetros que definen las características geométricas de las formas transversales más usuales, como así también las fórmulas de valoración de sus correspondientes secciones transversales y perímetros mojados.

2.2.1. Secciones de contorno abierto.

a) Triangular.

Son de uso muy restringido y en general ligadas a la ingeniería vial, siendo comúnmente utilizadas como cunetas en caminos o rutas o bien como badenes que forman parte integrante de los pavimentos urbanos.

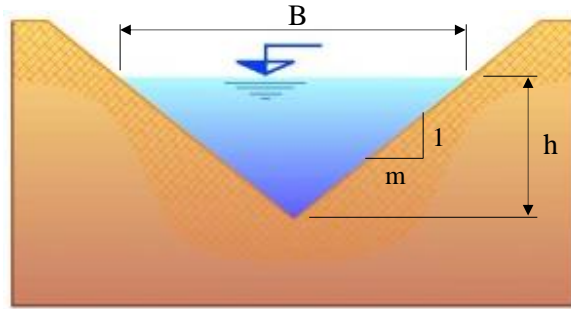


Figura 20 – Sección triangular – contorno abierto.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{B h}{2} = \frac{2 m h h}{2} = m h^2 \quad (11)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = 2 \left(h^2 + m^2 h^2 \right)^{1/2} = 2 h \left(1 + m^2 \right)^{1/2} \quad (12)$$

- b) Rectangular.

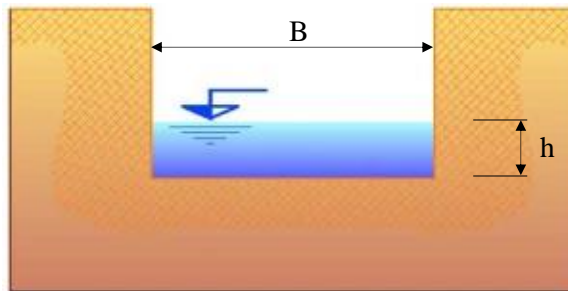


Figura 21 – Sección cuadrangular – contorno abierto.

- Sección transversal:

$$\Omega = B h \quad (13)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = B + 2 h \quad (14)$$

- c) Trapecial.

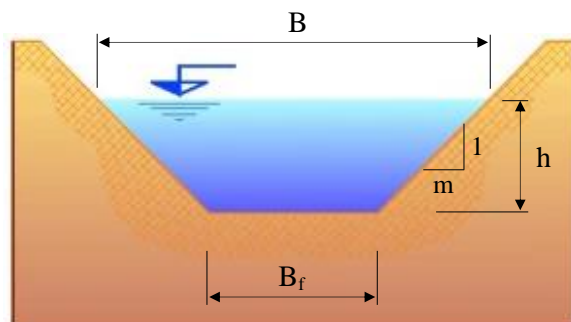


Figura 22 – Sección trapecial – contorno abierto.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{B + B_f}{2} h = \frac{(B_f + 2mh) + B_f}{2} h = (B_f + mh) h \quad (15)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = B_f + 2(h^2 + m^2 h^2)^{1/2} = B_f + 2h(1 + m^2)^{1/2} \quad (16)$$

d) Trapecial asimétrica.

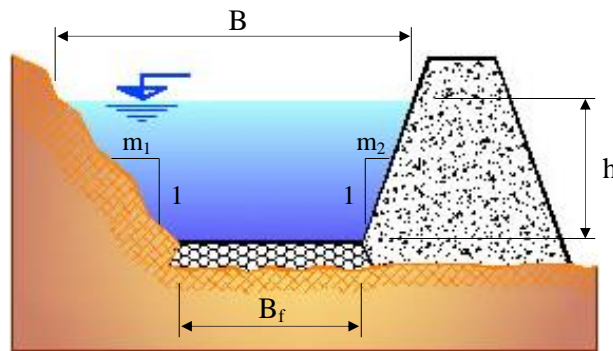


Figura 23 – Sección trapezoidal asimétrica.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{B + B_f}{2} h = \frac{(B_f + m_1 h + m_2 h) + B_f}{2} h = \frac{2B_f + h(m_1 + m_2)}{2} h \quad (17)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = B_f + h \left[(1 + m_1^2)^{1/2} + (1 + m_2^2)^{1/2} \right] \quad (18)$$

e) Parabólica.

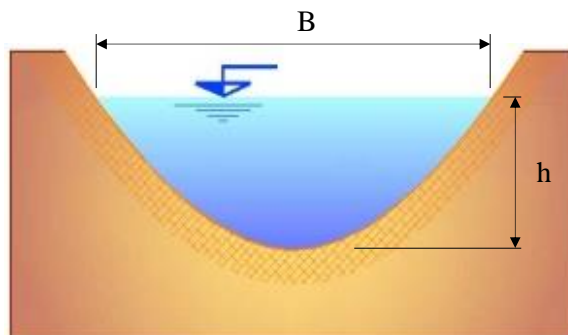


Figura 24 – Sección parabólica - contorno abierto.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{2}{3} B h \quad (19)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = B + \frac{8 h^2}{3 B} \quad (20)$$

f) Tolva.

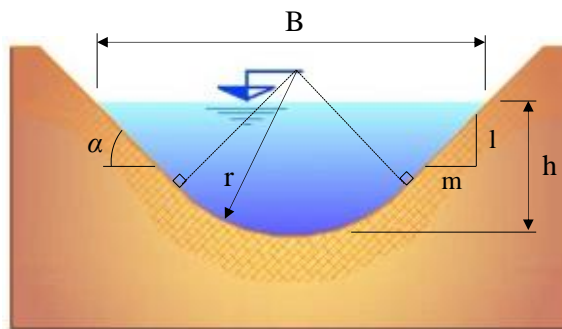


Figura 25 – Sección tolva.

- Sección transversal:

$$\Omega = r^2 \left[(\alpha - \text{sena } \cos \alpha) + 2 \text{sena} \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right) + m \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right)^2 \right] \quad (21)$$

Siendo: $\alpha = \text{arctg} \frac{1}{m}$

- Perímetro mojado:

$$\chi = 2r \left[\alpha + \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right) \left(1 + m^2 \right)^{1/2} \right] \quad (22)$$

g) "U".

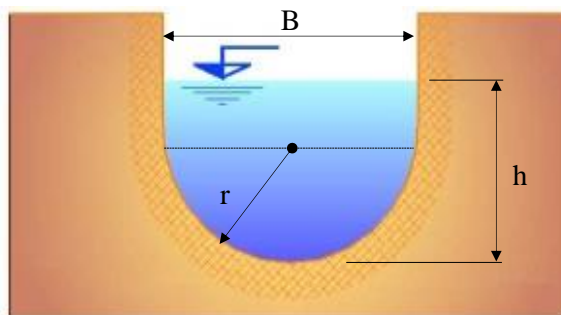


Figura 26 – Sección "U".

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{2} + B (h-r) = \frac{\pi}{2} r^2 + 2r (h-r) = r^2 \left[\frac{\pi}{2} + 2 \left(\frac{h}{r} - 1 \right) \right] \quad (23)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = \pi r + 2 (h-r) = r \left[\pi + 2 \left(\frac{h}{r} - 1 \right) \right] \quad (24)$$

h) Compuesta semicircular – trapecial.

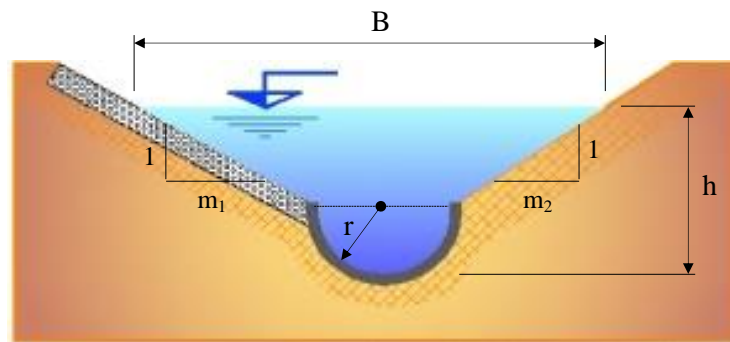


Figura 27 – Sección compuesta semicircular - trapecial.

- Sección transversal:

$$\Omega = \left\{ \frac{1}{2} m_1 \left[1 - \frac{1}{h/r} \right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[1 - \frac{1}{h/r} \right]^2 + \frac{2}{h/r} \left[1 - \frac{1}{h/r} \right] + \frac{1}{2} \frac{\pi}{h/r^2} \right\} h^2 \quad (25)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = \left\{ (1+m_1^2)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{h/r} \right] + (1+m_2^2)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{h/r} \right] + \frac{\pi}{h/r} \right\} h \quad (26)$$

2.2.2. Secciones de contorno cerrado.

Las secciones cerradas se van a identificar teniendo en cuenta la forma total descrita por su contorno y no como correspondería, a la morfología exclusiva de la sección hidráulica.

De esta manera se designará de manera simplificada, por ejemplo, a una sección de forma *circular*, cuando con mayor precisión académica se debería llamar sección *segmento de círculo*.

Asumiendo esta postura, se puede ahora distinguir con mayor rigor a las secciones cerradas triangulares de las trapeziales, cuando en realidad, en ambos casos, las secciones hidráulicas son trapeziales. Comparar la *Figura 28* con la *30*.

a) Triangular.

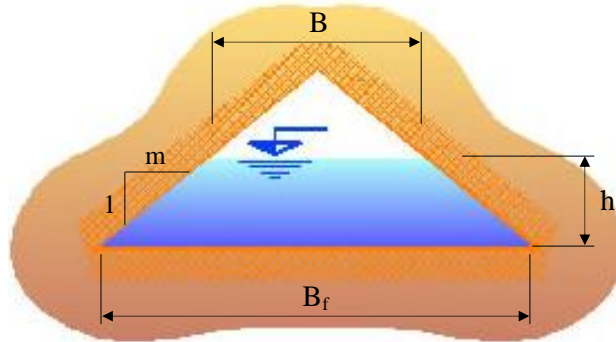


Figura 28 – Sección triangular - contorno cerrado.

• Sección transversal:

$$\Omega = \frac{B_f + B}{2} h = \frac{B_f + (B_f - 2mh)}{2} h = (B_f - mh) h \quad (27)$$

• Perímetro mojado:

$$\chi = B_f + 2 \left(h^2 + m^2 h^2 \right)^{1/2} = B_f + 2h \left(1 + m^2 \right)^{1/2} \quad (28)$$

b) Rectangular.

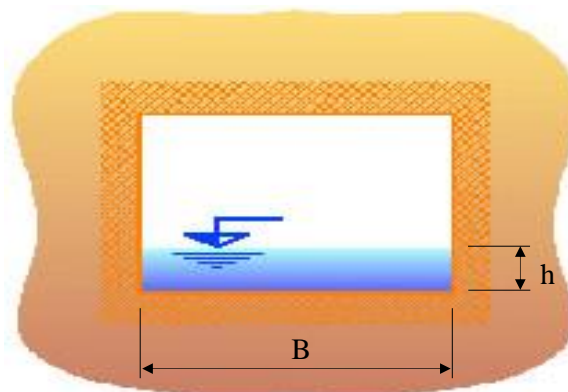


Figura 29 – Sección rectangular - contorno cerrado.

• Sección transversal:

$$\Omega = B h \quad (29)$$

• Perímetro mojado:

$$\chi = B + 2h \quad (30)$$

c) Trapecial.

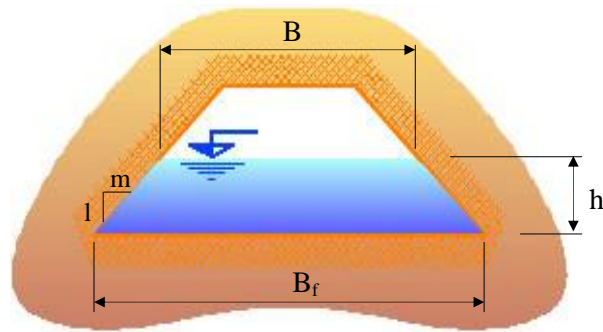


Figura 30 – Sección trapezoidal - contorno cerrado.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{B_f + B}{2} h = \frac{B_f + (B_f - 2mh)}{2} h = (B_f - mh) h \quad (31)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = B_f + 2(h^2 + m^2 h^2)^{1/2} = B_f + 2h(1 + m^2)^{1/2} \quad (32)$$

d) Circular.

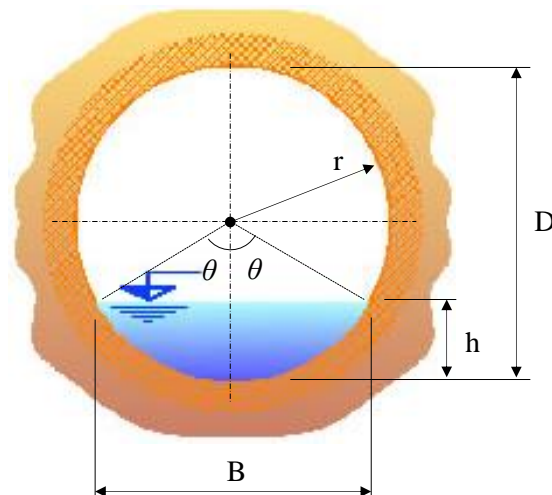


Figura 31 – Sección circular.

- Sección transversal:

$$\Omega = r^2 (\theta - \text{sen} \theta \cos \theta) \quad (33)$$

$$\text{Siendo: } \theta = \arccos \left(1 - 2 \frac{h}{D} \right)$$

- Perímetro mojado:

e) $\chi = 2 r \theta$ (34)
 e) Bóveda semicircular.

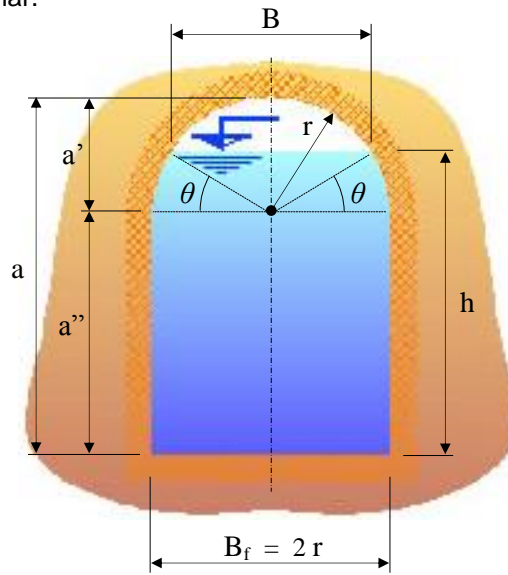


Figura 32 – Sección bóveda semicircular.

- Sección transversal:

$$\Omega = r^2 \left[2 \left(\frac{a}{r} - 1 \right) + \theta + \text{sen} \theta \text{ cos} \theta \right] \quad (35)$$

Siendo: $\theta = \text{arcosen} \left[1 - \frac{a}{r} \left(1 - \frac{h}{a} \right) \right]$

- Perímetro mojado:

$$\chi = 2 r \left(\frac{a}{r} + \theta \right) \quad (36)$$

- f) Modelo.

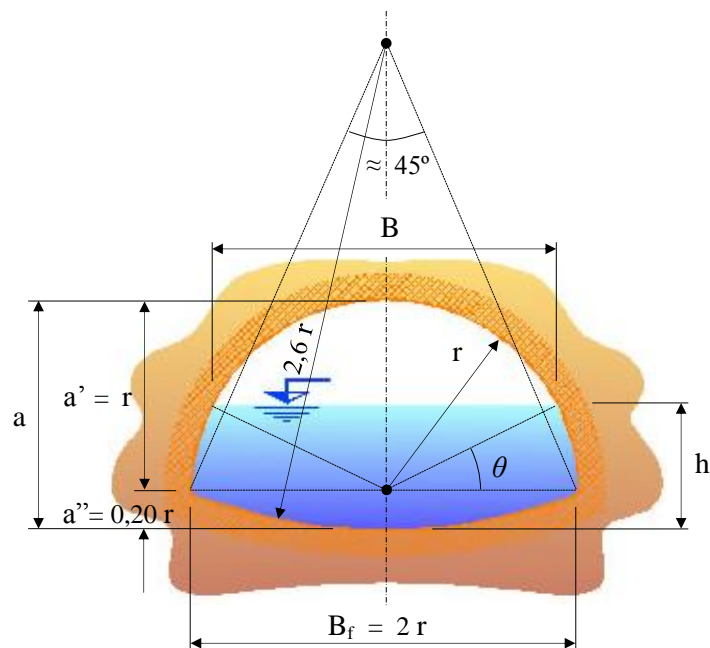


Figura 33 – Sección modelo.

- Sección transversal:

$$\Omega = r^2 (0,2688 + \theta + \text{sen } \theta \cos \theta) \tag{37}$$

Siendo:

$$\theta = \text{arcosen} \left(1,20 \frac{h}{a} - 0,20 \right)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = r (2,0529 + 2\theta) \tag{38}$$

g) Elíptica.

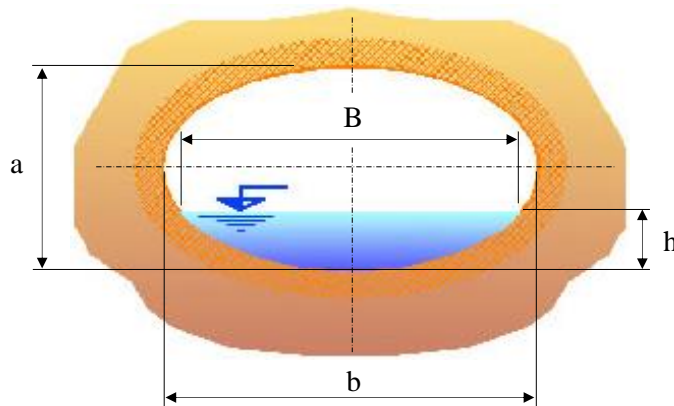


Figura 34 – Sección elíptica.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{2}{a/b} \left[\frac{2 \frac{h}{a} - 1}{4 \frac{h}{a}} \left(\frac{1}{\frac{h}{a}} - 1 \right)^{1/2} + \frac{1}{8 \left(\frac{h}{a} \right)^2} \text{arcocos} \left(1 - 2 \frac{h}{a} \right) \right] h^2 \tag{39}$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = 2 \int_0^h \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} \right)^{-2} \frac{(-2z + a)^2}{-z^2 + az} \right)^{1/2} dz \tag{40}$$

i) Herradura.

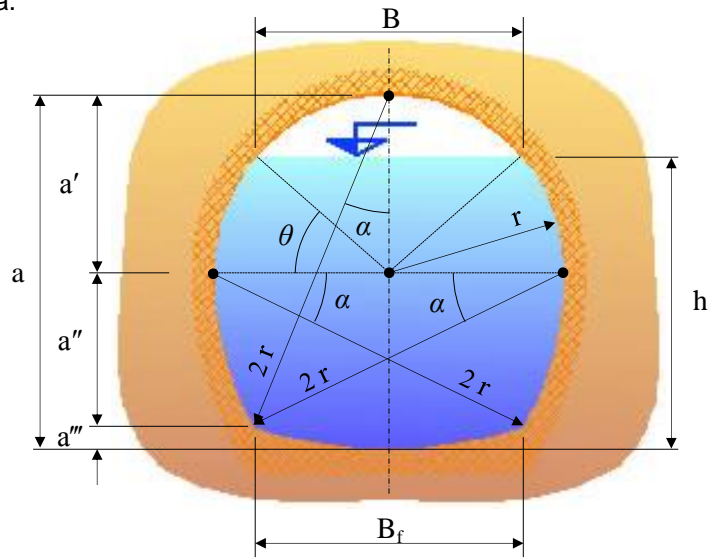


Figura 35 – Sección herradura.

• Sección transversal:

$$\Omega = r^2 \left[\theta + \text{sen}\theta \cos\theta + 8\alpha - 8 \text{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \text{sen}\alpha + 4 \text{sen}^2\alpha - 4 \text{sen}\alpha \cos\alpha \right] \quad (41)$$

Siendo: $\theta = \text{arccosen} \left(\frac{h}{r} - 1 \right)$

$$\alpha = \frac{\pi - \text{arccos} \left(\frac{3}{4} \right)}{2} - \frac{\pi}{4}$$

• Perímetro mojado:

$$\chi = 2r (\theta + 4\alpha) \quad (42)$$

j) Parabólica con fondo triangular.

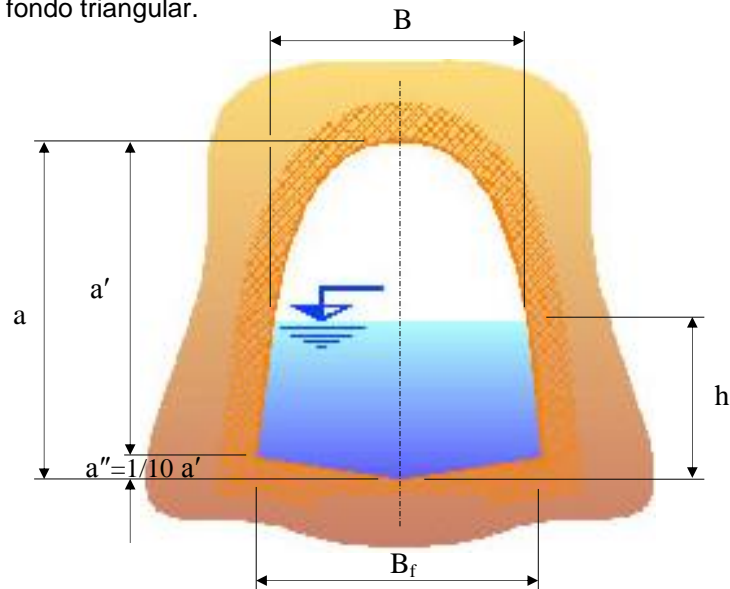


Figura 36 – Sección parabólica con fondo triangular.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{43}{66} B_f a - \left(\frac{44}{90}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f (h - a) \quad (43)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = B_f - \frac{800 a^2}{363 B_f} - \left(\frac{11}{10}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f - \frac{8}{3} \left(\frac{10}{11}\right)^{1/2} \frac{(a - h)^2}{\left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f} + 2 \left(\frac{a^2}{121} + \frac{B_f^2}{4}\right)^{1/2} \quad (44)$$

- k) Parabólica con fondo circular.

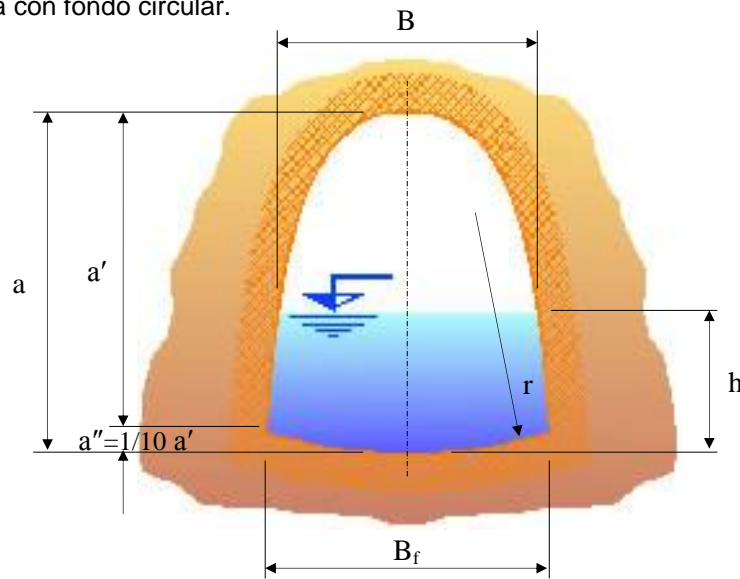


Figura 37 – Sección parabólica con fondo circular.

- Sección transversal:

$$\Omega = \frac{20}{33} B_f a - \left(\frac{44}{90}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f (h - a) + \operatorname{arcosen} \frac{B_f}{\frac{a}{11} + \frac{11 B_f^2}{4 a}} \left(\frac{a}{22} + \frac{11 B_f^2}{8 a}\right)^2 - \left(\frac{11 B_f^3}{16 a} - \frac{B_f a}{44}\right) \quad (45)$$

- Perímetro mojado:

$$\chi = B_f - \frac{800 a^2}{363 B_f} - \left(\frac{11}{10}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f - \frac{8}{3} \left(\frac{10}{11}\right)^{1/2} \frac{(a - h)^2}{\left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f} + 2 \operatorname{arcosen} \frac{B_f}{\frac{a}{11} + \frac{11 B_f^2}{4 a}} \left(\frac{a}{22} + \frac{11 B_f^2}{8 a}\right)^2 \quad (46)$$

3. ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO UNIFORME.

En los problemas hidráulicos aplicados a los escurrimientos a superficie libre con movimiento permanente y uniforme, la resolución de los mismos se trata a partir de la integración de las ecuaciones fundamentales:

- Ecuación de continuidad o de conservación de la masa.
- Ecuación de Bernoulli o de conservación de la energía hidráulica.
- Ecuación de la cantidad de movimiento.

3.1. Ecuación de continuidad.

Suponiendo un líquido incompresible, circulando por un canal que se comporta como un tubo de corriente, la condición de movimiento permanente implica que el gasto o caudal no varía con el tiempo y resulta constante con el recorrido.

$$\text{Movimiento permanente} \rightarrow Q = U_0 \Omega_0 = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = \dots = U_n \Omega_n = cte. \quad (47)$$

Además, por tratarse de un movimiento uniforme, la velocidad media también es invariable con el recorrido $\partial U / \partial l = 0$

$$\text{Movimiento uniforme} \rightarrow U = U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_n = cte. \quad (48)$$

Introduciendo (7-48) en (7-47):

$$\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_n = cte. \quad (49)$$

La concepción teórica que se desprende de la ecuación (49) implica que las secciones deben ser iguales, sin la estricta necesidad que simultáneamente sean también iguales sus formas. (Ver *Figura 38*).

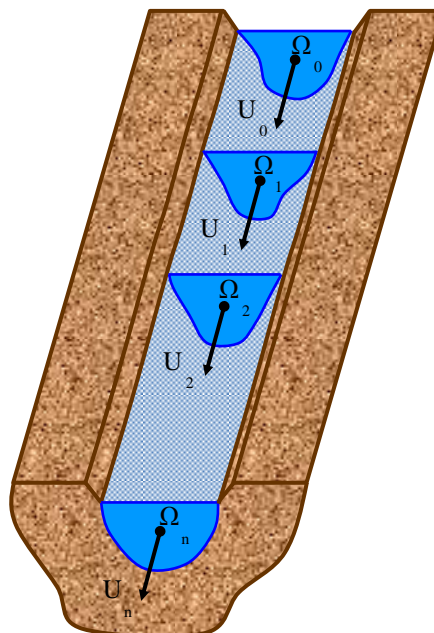


Figura 38 – Canal de sección constante.

En la práctica, el caso planteado de movimiento uniforme, se da en general cuando se trata de secciones prismáticas, donde a la vez se cumple en cada sección transversal la igualdad del área y la forma. (Ver Figura 39).

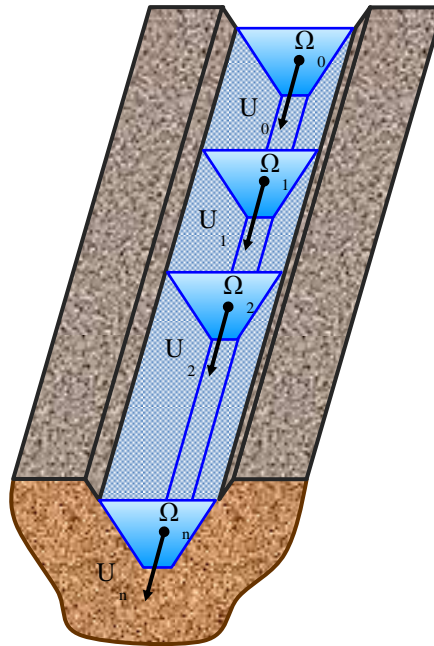


Figura 39 – Canal de sección y forma constante.

3.2. Ecuación de Bernoulli.

La ecuación de Bernoulli que expresa la conservación de la energía hidráulica, con las simplificaciones aportadas a la realidad de los canales, es la indicada en la expresión (7).

También es de destacar que en los escurrimientos a superficie libre, cuando el líquido circulante es precisamente agua, el régimen del movimiento es turbulento. Basta simplemente con calcular el número de Reynolds, para lo cual se reemplaza la longitud característica diámetro D , considerada en los escurrimientos a presión, por 4 veces el radio hidráulico R . Ver la expresión (1).

$$Re = \frac{U D}{\nu} = 4 \frac{U R}{\nu} \gggg 2000$$

En régimen turbulento, los siguientes coeficientes resultan:

- Coeficiente de Coriolis $\alpha \cong 1$
- Coeficiente de Boussinesq $\beta \cong 1$

En consecuencia, la expresión de Bernoulli de aplicación práctica queda reducida a:

$$z_1 + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J_{1-2}^* \tag{50}$$

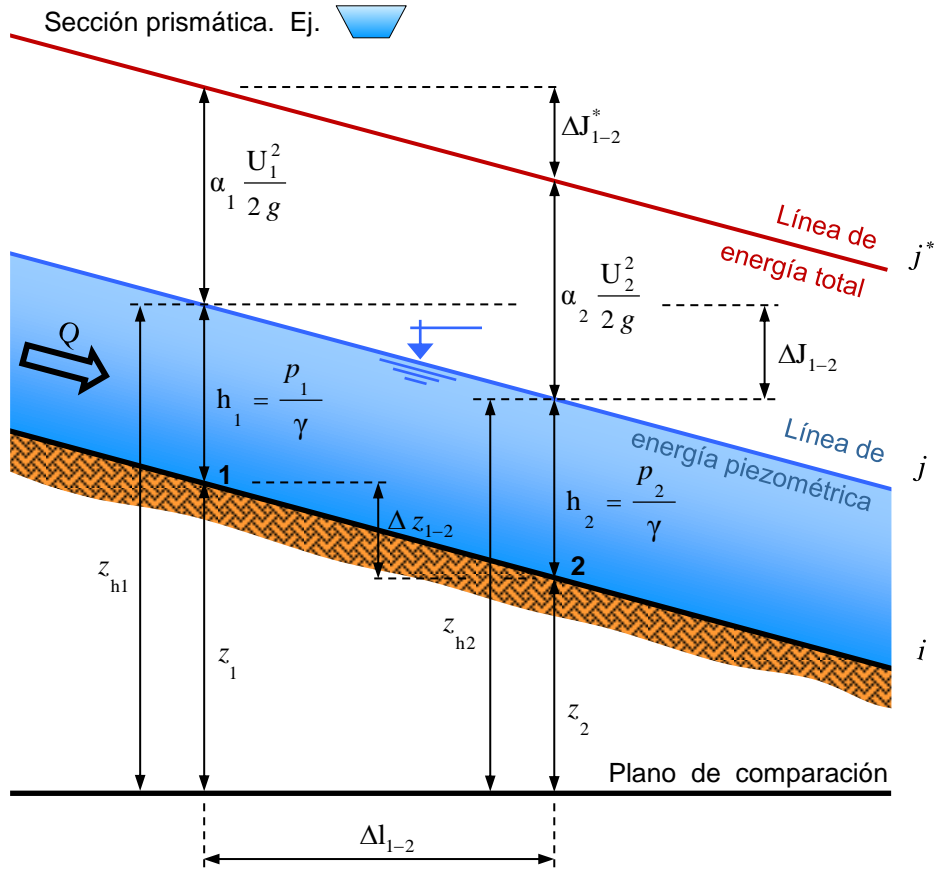


Figura 40 – Ecuación de Bernoulli aplicada a un canal de sección prismática.

Movimiento permanente y sección prismática: $\rightarrow h_1 = h_2$ (51)

Movimiento uniforme: $\rightarrow U_1 = U_2$ (52)

$$\Rightarrow \frac{U_1^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g} \quad (53)$$

De la Figura 40 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta z_{1-2} = (z_1 - z_2) \\ \Delta J_{1-2} = \Delta z_{h1-2} = (z_1 + h_1) - (z_2 + h_2) = (z_1 - z_2) \\ \Delta J_{1-2}^* = \left(z_1 + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \right) = (z_1 - z_2) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \Delta z_{1-2} = \Delta J_{1-2} = \Delta J_{1-2}^* = (z_1 - z_2) \quad (54)$$

Dividiendo por Δl_{1-2}

$$\frac{\Delta z_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} = \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}} = \frac{\Delta J_{1-2}^*}{\Delta l_{1-2}}$$

$$i = j = j^* \tag{55}$$

Conclusión: en los canales prismáticos con movimiento permanente y uniforme, resultan numéricamente iguales la pendiente longitudinal de la solera i , la pérdida de energía piezométrica unitaria j y la pérdida de energía total unitaria j^* . Esa consecuencia se ve reflejada gráficamente en el paralelismo de las tres rectas longitudinales que representan las magnitudes antes mencionadas (Ver *Figura 40*).

3.3. Fórmula de Chézy.

Antoine de Chézy (1718-1798), ingeniero francés, desarrolló una expresión semiempírica que permite evaluar la velocidad media U a partir de la vinculación de las pérdidas de energía con las características geométricas del cauce, las propiedades físicas del fluido y las condiciones del escurrimiento.

Experimentalmente comprobó que la pérdida de energía ΔJ^* es proporcional a:

- $\Delta J^* \propto$ 1º) $\chi \Delta l$ Superficie lateral de rozamiento.
- 2º) $1 / \Omega$ Inversa del área de la sección.
- 3º) U^2 Cuadrado de la velocidad medio.
- 4º) *rugosidad de las paredes.*

Si una magnitud es individualmente proporcional a varias variables, también lo es a su producto:

$$\Delta J^* \propto \chi \Delta l \ (1 / \Omega) \ U^2 \ \textit{rugosidad de las paredes}$$

$$\Delta J^* = \textit{cte.} \ \chi \Delta l \ (1 / \Omega) \ U^2 \ \textit{rugosidad de las paredes}$$

↓
b

$$\Rightarrow \frac{\Delta J^*}{\Delta l} = j^* = b \frac{U^2}{\frac{\Omega}{\chi}} = b \frac{U^2}{R} = j = i \tag{56}$$

$$\therefore U = \sqrt[28]{\frac{1}{b} \sqrt{R i}} \tag{57}$$

Siendo:

$$c = \sqrt{\frac{1}{b}} \quad \text{Coeficiente de Chézy} \quad (58)$$

Remplazando (58) en (57), se obtiene la fórmula de Chézy.

$$U = c \sqrt{R i} \quad (59)$$

La expresión (59) permite efectuar los cálculos para la resolución de problemas relacionados con los escurrimientos a superficie libre con movimiento permanente y uniforme.

Tal como puede observarse, el proceso deductivo es similar al utilizado para la obtención de la ecuación de *Darcy – Weisbach* en escurrimientos a presión, y consecuentemente la fórmula de Chézy resulta ser un caso particular de esta. Las ecuaciones racionales son también de aplicación en canales y de hecho en Alemania es utilizada a esos efectos.

En nuestro medio ha tenido mayor difusión la fórmula semiempírica de Chézy, dada su simplicidad y equivalencia en términos de aplicación tecnológica.

Otra forma deductiva que corrobora la validez de la fórmula de Chézy es desarrollándola a partir de la ecuación de la cantidad de movimiento. En efecto, si se analiza el equilibrio dinámico de las fuerzas actuantes en una porción de masa líquida tal como se puede ver en la *Figura 41*, se tiene:

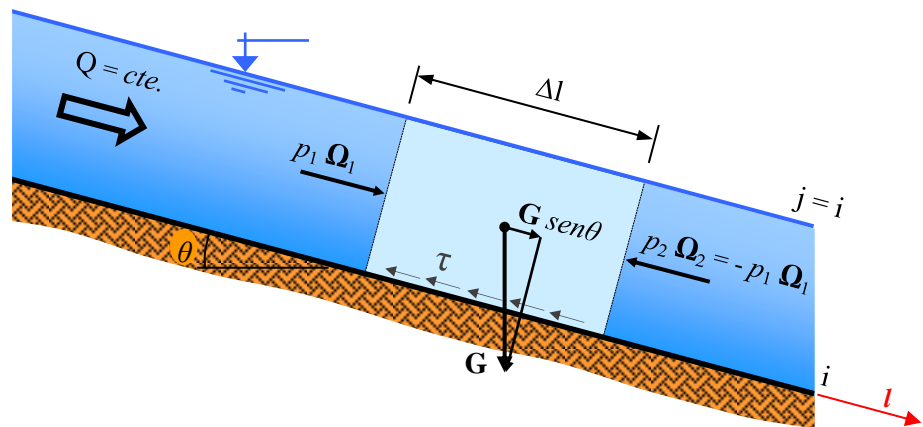


Figura 41 – Fuerzas actuantes en una porción fluida de un canal.

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_\mu = \frac{d}{dt} (m \mathbf{U}) \quad (60)$$

La expresión vectorial (60) corresponde a la ecuación de cantidad de movimiento aplicada a una porción líquida de un canal con movimiento uniforme y permanente, y donde las fuerzas más significativas intervinientes son las generadas por la presión, la masa y las resistentes o viscosas.

Evaluando las fuerzas actuantes sobre el eje longitudinal *l* del canal, se tiene ahora de forma escalar:

- Fuerzas de presión.

$$F_p = p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2 = 0 \quad (61)$$

- Fuerza de masa.

$$F_m = G \operatorname{sen} \theta = \gamma \Omega \Delta l \operatorname{sen} \theta \cong \gamma \Omega \Delta l \operatorname{tg} \theta = \gamma \Omega \Delta l i \quad (62)$$

Al tratarse de canales con ángulo de inclinación longitudinal muy pequeños, es válido considerar $\operatorname{sen} \theta \cong \operatorname{tg} \theta$.

- Fuerza resistente o viscosa.

$$F_\mu = -\tau \chi \Delta l = -f U^2 \chi \Delta l \quad (63)$$

La experiencia indica que la tensión tangencial sobre los bordes sólidos del canal es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad media. O sea, $\tau = f U^2$.

- Variación de la cantidad de movimiento respecto al tiempo.

$$\frac{d}{dt} (m U) = 0 \quad (64)$$

Al ser el movimiento uniforme y permanente, no hay no hay variación de la velocidad media respecto al tiempo ni al recorrido. En consecuencia $U = \text{cte.}$ y $dU = 0$.

Remplazando (61), (62), (63) y (64) en la ecuación (60) proyectada sobre el eje longitudinal:

$$\begin{array}{ccc} p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2 + \gamma \Omega \Delta l i - f U^2 \chi \Delta l = \frac{d}{dt} (m U) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 0 \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f U^2 \chi \Delta l = \gamma \Omega \Delta l i$$

$$\therefore U = \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \sqrt{\frac{\Omega}{\chi} i} = \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \sqrt{R i} \quad (65)$$

Siendo en este caso el coeficiente de Chézy:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \quad (66)$$

Introduciendo (66) en (65) se arriba nuevamente y por otro razonamiento a la fórmula de Chézy, idéntica a la expresada en (59).

3.3.1. Coeficiente de Chézy.

El cálculo de la velocidad media en un escurrimiento a superficie libre con movimiento permanente y uniforme se realiza utilizando la fórmula (59), la cual requiere para su aplicación el conocimiento previo del *coeficiente de Chézy c*.

Ecuación de dimensión:

$$c = \frac{U}{\sqrt{R i}} \tag{67}$$

$$[c] = \frac{\frac{L}{T}}{\frac{1}{L^2}} = \frac{L^2}{T} \tag{68}$$

Tabla 3 Ecuación de dimensiones del coeficiente de Chézy.

DESIGNACIÓN	NOTACIÓN	ECUACIÓN DE DIMENSIÓN	UNIDADES		
			C.G.S	M.K.S.	TÉCNICO
Coeficiente de Chézy	c	$[c] = \frac{L^2}{T}$	cm ^{1/2} /s	m ^{1/2} /s	m ^{1/2} /s

La determinación del mismo se obtiene a partir de estudios experimentales realizados por diversos científicos, los cuales se agrupan en general de acuerdo a dos corrientes de investigación según las variables que gobiernan al coeficiente:

- $c = f(\text{rugosidad}, R)$
- $c = f(\text{rugosidad}, R, i)$

Muchas expresiones prácticas resuelven el valor del coeficiente c, de las cuales se resumen a continuación las más relevantes y representativas:

a - Tadini. Año 1828.

Antonio Tadini (1754-1830), matemático e ingeniero italiano, brinda una primera aproximación de c, la cual prescinde de la influencia de la rugosidad.

En el sistema M.K.S.:

$$c = cte. = 50 \tag{69}$$

Es un valor muy poco confiable como metodología usual de cálculo. Se recomienda utilizar solo en anteproyectos y estimaciones escasamente precisas, para tirantes h superiores a 1,00 m.

b - Ganguillet y Kutter. Año 1869.

Dos ingenieros suizos, Emile-Oscar Ganguillet (1818-1894) y Rudoph Kutter (1818-1894), basándose en estudios previos desarrollados por Darcy y Bazin como así también los de Humphreys y Abbot en el río Mississipi, y además de sus propias experiencias, propusieron una fórmula del coeficiente c en función de la rugosidad del lecho, de la pendiente longitudinal i y del radio hidráulico R , aplicable a canales rectangulares y trapeciales.

En el sistema M.K.S.:

$$c = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{i}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R}} \left(23 + \frac{0,00155}{i} \right)} \quad (70)$$

Siendo n un coeficiente que depende de la rugosidad de las paredes.

c - Kutter. Año 1870.

Es una simplificación de la (7-70) y si bien la expresión no depende de la pendiente longitudinal, es solo válida para pendientes $i > 0,0005$.

En el sistema M.K.S.:

$$c = \frac{100 \sqrt{R}}{(100n - 1) + \sqrt{R}} \quad (71)$$

d - Manning. Año 1890.

Robert Manning (1816-1897), nació en Normandía-Francia, pero recibió educación y desarrolló su vida profesional en Irlanda, sin haber obtenido instrucción formal respecto a la mecánica de los fluidos ni a la ingeniería hidráulica.

Obtuvo una fórmula del coeficiente de Chézy c muy difundida y aún vigente por no tener limitaciones en su uso.

En el sistema M.K.S.:

$$c = \frac{1}{n} \sqrt[4]{R} \quad (72)$$

En la expresión (72) aparece el término n , que se denomina *coeficiente de rugosidad* o bien *índice de rugosidad*, dependiendo su valor de la naturaleza de las paredes de los canales.

El coeficiente de rugosidad n es prácticamente el mismo de las expresiones de Ganguillet-Kutter y Kutter. En la *Tabla 4* se resumen valores de n para las superficies sólidas más utilizadas como paredes de canales.

Tabla 4 Coeficientes de rugosidad n de Manning.

TIPO DE SUPERFICIE	E S T A D O	$n [m^{-1/3} s]$	
		Valor medio	Error
Albañilería	Enlucido de cemento puro.	0,010	± 0,002
	Enlucido de mortero de cemento y arena.	0,012	± 0,002
	Grava bien asentada.	0,020	± 0,003
	Liso, piedra labrada.	0,013	± 0,003
Cauce Natural	Grandes ríos.	0,035	± 0,020
	Limpio y recto.	0,030	± 0,010
Hormigón	Hormigón alisado con llana de acero.	0,012	± 0,002
	Hormigón alisado con llana de madera.	0,013	± 0,002
	Hormigón colado con encofrado metálico.	0,015	± 0,002
	Hormigón gunitado.	0,019	± 0,004
	Hormigón sin terminar.	0,017	± 0,003
Madera	Tablas cepilladas, cuidadosamente colocadas.	0,010	± 0,002
	Tablas cepilladas, colocación deficiente o viejas.	0,012	± 0,003
	Tablas sin cepillar, cuidadosamente colocadas.	0,012	± 0,003
	Tablas sin cepillar, colocación deficiente o viejas.	0,014	± 0,004
Mampostería	Ladrillo en buenas condiciones.	0,013	± 0,002
	Ladrillo en malas condiciones.	0,020	± 0,003
	Piedra.	0,025	± 0,004
Metal	Acero ligeramente noduloso.	0,020	± 0,003
	Acero liso.	0,012	± 0,002
	Acero liso pintado.	0,012	± 0,003
	Acero roblonado.	0,015	± 0,003
	Acero soldado.	0,012	± 0,003
	Hierro fundido.	0,014	± 0,003
	Latón.	0,011	± 0,002
	Metal ondulado.	0,024	± 0,005
Madera	Tablas cepilladas, cuidadosamente colocadas.	0,010	± 0,002
	Tablas cepilladas, colocación deficiente o viejas.	0,012	± 0,003
	Tablas sin cepillar, cuidadosamente colocadas.	0,012	± 0,003
	Tablas sin cepillar, colocación deficiente o viejas.	0,014	± 0,004
Otros	Asbesto-cemento.	0,011	± 0,002
	Carpeta asfáltica.	0,016	± 0,003
	Gaviones.	0,025	± 0,003
	Vidrio.	0,010	± 0,002
Plástico	P.V.C.	0,009	± 0,002
	Polietileno.	0,009	± 0,002
Tierra	Con piedras y malezas.	0,025	± 0,003
	En condiciones normales.	0,023	± 0,003
	En malas condiciones.	0,035	± 0,004
	Parcialmente obstruido con malezas o	0,050	± 0,005
	Pedregoso.	0,035	± 0,010
	Superficie regular en buenas condiciones.	0,020	± 0,004
Zona inundada	Árboles.	0,150	± 0,050
	Mucha maleza.	0,075	± 0,025
	Poca maleza.	0,050	± 0,020
	Terreno de labranza.	0,035	± 0,010

e - Bazin. Año 1897.

Henri-Emile Bazin, luego de una gran cantidad de experiencias realizadas sobre canales artificiales de diferentes secciones y rugosidades, en los "Annales des Ponts et Chaussées" propuso el siguiente valor del coeficiente de Chézy:

En el sistema M.K.S.:

$$c = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad (73)$$

Esta expresión depende del radio hidráulico R y de un coeficiente proporcional a la rugosidad de los bordes sólidos que Bazin denominó γ .

De hecho resulta ser la fórmula de Kutter simplificada, donde se sustituye el valor de 87 en reemplazo de 100.

Bazin proveyó siete valores del coeficiente γ , según la naturaleza de las paredes que se trate, los cuales se indican en la *Tabla 5*.

Tabla 5 Coeficientes de rugosidad de Bazin.

TIPO DE SUPERFICIE	γ
1- Paredes muy lisas.	0,16
2- Paredes lisas.	0,30
3- Paredes de hormigón poco pulido.	0,40
4- Paredes de mampostería de canto rodado.	0,46
5- Paredes de tierra de superficie muy regular.	0,85
6- Paredes de tierra en condiciones ordinarias.	1,30
7- Paredes de tierra en malas condiciones.	1,75

f - Forchheimer. Año 1823.

En el sistema M.K.S.:

$$c = \lambda \sqrt[5]{R} \quad (74)$$

Philipp Forchheimer (Austriaco 1852-1933) proporcionó una tabla con valores de λ variables entre 100 (paredes muy lisas de cemento enlucido o madera cepillada en perfecto estado) y 20 (paredes muy irregulares). Estos valores fueron verificados por el autor en cauces naturales y artificiales, además de grandes canalizaciones cerradas.

Es aplicable utilizar, con un muy pequeño error, el valor de λ como la inversa del coeficiente de rugosidad de Manning ($1/n$). Por consiguiente, dentro de límites aceptables y con radios hidráulicos superiores a $0,50 m$ se acepta que:

$$c = \lambda \sqrt[5]{R} \cong \frac{1}{n} \sqrt[5]{R} \quad (75)$$

La diferencia a que se hace mención se produce como consecuencia que Manning considera al coeficiente de Chézy proporcional a la raíz sexta del radio hidráulico y Forchheimer a la raíz quinta.

Si bien es válido el coeficiente c dado expresado en (74), originalmente Forchheimer presentó su fórmula de manera implícita, incorporada la misma a la de Chézy:

$$U = \lambda R^{0,7} i^{0,5} \quad (76)$$

Donde el exponente de R es el correspondiente a la fracción $2/3$ redondeada al primer decimal.

Se hace notar que la expresión de Forchheimer es bastante coincidente con la de Kutter para radios hidráulicos R menores de $0,75 m$ y con la de Bazin para mayores.

3.3.2. Fórmula de Chézy - Manning.

La fórmula de Robert Manning es actualmente la de mayor aplicación en el cálculo de escurrimientos a superficie libre, fundamentada en los siguientes motivos:

- No tiene limitaciones. Resulta muy apropiada en escurrimientos en régimen turbulento, tal como trabajan la mayoría de los canales.
- Coincide con los datos experimentales.
- Contiene menos variables que las deducidas por otros investigadores, ya que depende solo de la rugosidad del contorno sólido n y el radio hidráulico R , sin intervenir la pendiente longitudinal i .
- Es una expresión monómica, la que introducida en la fórmula de Chézy, resulta también un monomio de sencilla aplicación.

Introduciendo la ecuación (72) en la (59) se obtiene la fórmula de Chézy – Manning:

$$U = c \sqrt{R i} = \frac{1}{n} \sqrt[5]{R} \sqrt{R i}$$

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \quad (77)$$

Ecuación de dimensión del coeficiente de rugosidad n :

$$n = \frac{1}{U} R^{2/3} i^{1/2} \quad (78)$$

$$[n] = \frac{L^{\frac{2}{3}}}{\frac{L}{T}} = \frac{T}{L^{\frac{1}{3}}} = L^{-\frac{1}{3}} T \tag{79}$$

Tabla 6 Ecuación de dimensiones del coeficiente de rugosidad de Manning.

DESIGNACIÓN	NOTACIÓN	ECUACIÓN DE DIMENSIÓN	UNIDADES		
			C.G.S	M.K.S.	TÉCNICO
Coeficiente de rugosidad	n	$[n] = L^{-\frac{1}{3}} T$	$cm^{-1/3}s$	$m^{-1/3}s$	$m^{-1/3}s$

Los coeficientes de rugosidad n de Manning resumidos en la *Tabla 4* son valores básicos que corresponden a un canal estable, idealmente recto, uniforme y regular. Las tablas consideran valores usuales para condiciones que denominan normales, sin embargo lo más común es que un canal tenga una o varias singularidades en su traza que modifican el valor asignado a n.

En general, los canales construidos por la mano del hombre o los cauces naturales no cumplen estrictamente con las hipótesis antes mencionadas, ya que en la práctica se suman otras variables tales como:

- rugosidad heterogénea.
- irregularidades de la sección en dimensiones y forma.
- obstrucciones.
- vegetación.
- sinuosidad.
- sedimentación.
- socavación.
- tirante.

Una correcta adopción de n implica estimar adecuadamente la resistencia al avance en los escurrimientos a superficie libre, teniendo en cuenta que las irregularidades que se presentan en el recorrido aumentan su valor.

Si bien no existe un procedimiento exacto para calcular n, W. L. Cowan, teniendo en cuenta la influencia de muchas de esas variables intervinientes, desarrolló una fórmula de ajuste a fin de obtener valores del coeficiente de rugosidad n más próximos con los reales.

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) m_5 \tag{80}$$

Donde:

n coeficiente de rugosidad de Manning modificado.

n_0 coeficiente de rugosidad básico. *Tabla 7-4*

Los demás factores que se consideran son:

n_1 efecto de las irregularidades de las superficies sólidas de contacto.

n_2 variaciones de tamaño y forma de las secciones.

n_3 obstrucciones de la sección.

n_4 vegetación.

m_5 corrección por efecto de sinuosidades o meandros.

En la *Tabla 7* (Ven Te Chow, 1959) se indican los valores correctivos a considerar según la condición del canal en estudio. Los coeficientes enumerados se estiman por la importancia de su efecto y se deben evaluar cada uno de ellos de forma individual e independiente.

Tabla 7 Coeficientes de ajuste de W. L. Cowan para la rugosidad n de Manning.

COEFICIENTE	DESIGNACIÓN	CATEGORÍA	VALOR
n_1	Irregularidad.	Suave.	0,000
		Menor.	0,005
		Moderada.	0,010
		Severa.	0,020
n_2	Variación de la sección.	Gradual.	0,000
		Ocasional.	0,005
		Frecuente.	0,010 – 0,015
n_3	Obstrucción.	Despreciable.	0,010
		Menor.	0,010 – 0,015
		Apreciable.	0,020 – 0,030
		Severa.	0,040 – 0,060
n_4	Vegetación.	Escasa.	0,005 – 0,010
		Moderada.	0,010 – 0,025
		Alta.	0,025 – 0,050
		Muy alta.	0,050 – 0,100
m_5	Intensidad de sinuosidad.	Menor.	1,000
		Apreciable.	1,150
		Severa.	1,300

La selección de un coeficiente de rugosidad que represente apropiadamente la resistencia al escurrimiento puede hacerse menos subjetiva, y consecuentemente más precisa, mediante la utilización de la fórmula definida por Cowan, aunque de todas formas siempre subsiste una cierta incertidumbre proveniente de la correcta o no elección del coeficiente básico n_0 .

Por lo general se requiere experiencia para la elección del coeficiente n , lo cual se realiza mediante la utilización de tablas o bien extrapolando resultados que se tengan de otros canales similares al que se está proyectando.

Dado que la expresión de Robert Manning es de tipo empírica, es de suponer la existencia de determinadas limitaciones en su uso, por lo que es conveniente tener presente al respecto la indicación y pensamiento del profesor Hunter Rouse, en su libro Hidráulica, donde expresa taxativamente...*"La fórmula de Manning es aceptable para valores intermedios de rugosidad relativa. Tampoco hay que olvidar que una expresión de este tipo no puede englobar la acción de la viscosidad, por lo que es de suponer que su exactitud disminuya con números de Reynolds bajos."*

3.4. Relación tirante – pérdida de energía unitaria.

Tratándose de un escurrimiento a superficie libre con movimiento uniforme, se tiene de (55) que la pérdida de energía unitaria j^* y la pérdida de carga j son numéricamente iguales a la pendiente longitudinal i del canal.

De la expresión de Chézy para movimiento permanente y sección prismática constante:

$$U = c \sqrt{R i} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{U^2}{c^2 R} = \frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R}$$

Siendo:

$$Q = \text{cte. (movimiento permanente).}$$

$$\Omega = f(h)$$

$$c = f(n, R) = f(h)$$

$$R = f(h)$$

Por consiguiente se tiene:

$$i = j = j^* = \frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R} = \frac{\text{cte.}}{f(h)} \quad (81)$$

A partir de una sección prismática en estudio, como por ejemplo la trapezoidal de la *Figura 42*, se puede confeccionar una tabla tal como la señalada en la *Figura 43*, dando valores al tirante h para calcular consecuentemente y en correspondencia los parámetros Ω , Ω^2 , χ , R , c , c^2 y finalmente en la columna final determinar la pendiente longitudinal i , la cual resulta equivalente a la pérdida de energía unitaria j^* y la pérdida de carga unitaria j .

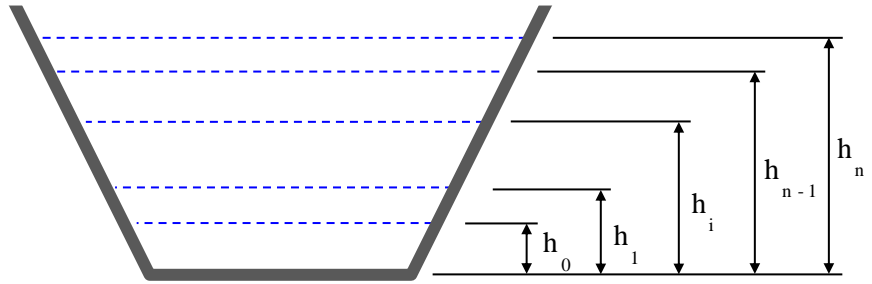


Figura 42 – Sección prismática – tirante variable.

h	Ω	Ω^2	χ	R	c	c^2	$i = j = j^* = \frac{Q^2}{c^2 \Omega^2 R}$
h_0	→	→	→	→	→	→	$i_0 = j_0 = j^*_0$
h_1	→	→	→	→	→	→	$i_1 = j_1 = j^*_1$
h_i	→	→	→	→	→	→	$i_i = j_i = j^*_i$
h_{n-1}	→	→	→	→	→	→	$i_{n-1} = j_{n-1} = j^*_{n-1}$
h_n	→	→	→	→	→	→	$i_n = j_n = j^*_n$

Figura 43 – Tabla vinculante entre tirantes con pérdidas de energía unitaria.

La representación gráfica $h - j^*$ resulta inmediata tomando los pares de valores por cada fila de las columnas extremas pertenecientes a la tabla precedente (Ver Figura 44).

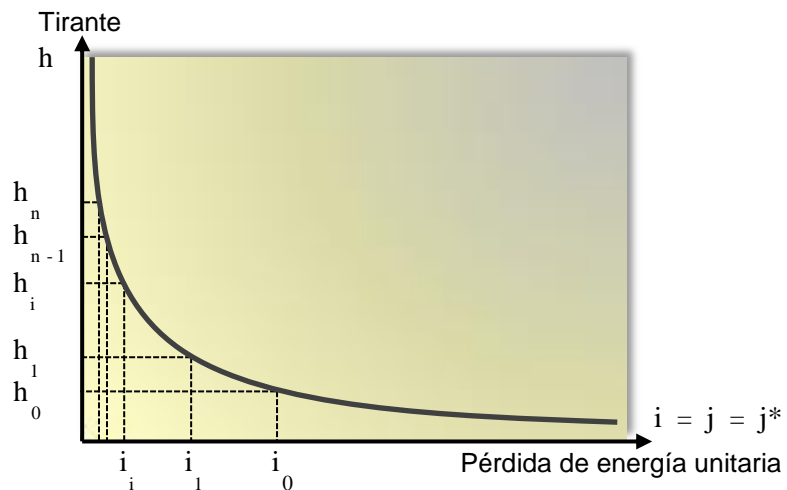


Figura 44 – Gráfico de la pérdida de energía unitaria en función del tirante.

Su variación es hiperbólica y es evidente y hasta intuitivo que para un mismo caudal Q el tirante h aumenta a medida que disminuye la pendiente longitudinal i, simultáneamente con la pérdida de energía unitaria j^* (ver Figura 45) y viceversa si la pendiente i crece.

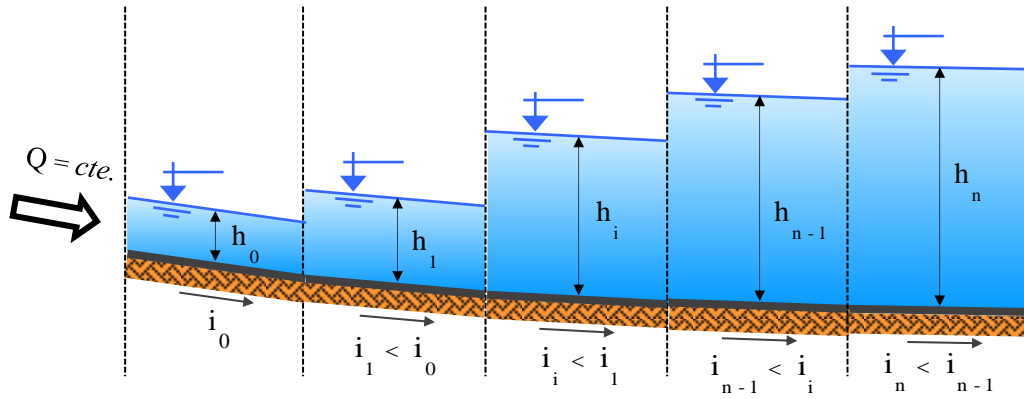


Figura 45 – Variación del tirante en función de la pendiente longitudinal.

4. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES.

La presión relativa sobre la solera del canal, donde se estudia en una sección transversal en particular (ver Figura 7-46) es:

$$p = \gamma h \cos \alpha \tag{82}$$

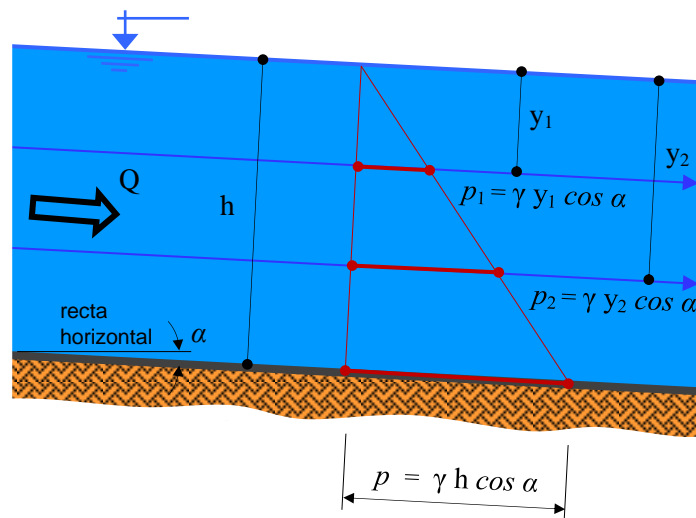


Figura 46 – Variación de la presión en función del tirante.

Para profundidades intermedias y_1 e y_2 , la presión varía linealmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \gamma y_1 \cos \alpha \\ p_2 = \gamma y_2 \cos \alpha \end{array} \right.$$

Recordando el concepto desarrollado en el punto 1.3. relativo a la hipótesis simplificada, válida para canales de escasa pendiente, la presión se determina en forma práctica midiendo el tirante h directamente sobre la vertical (ver Figura 47).

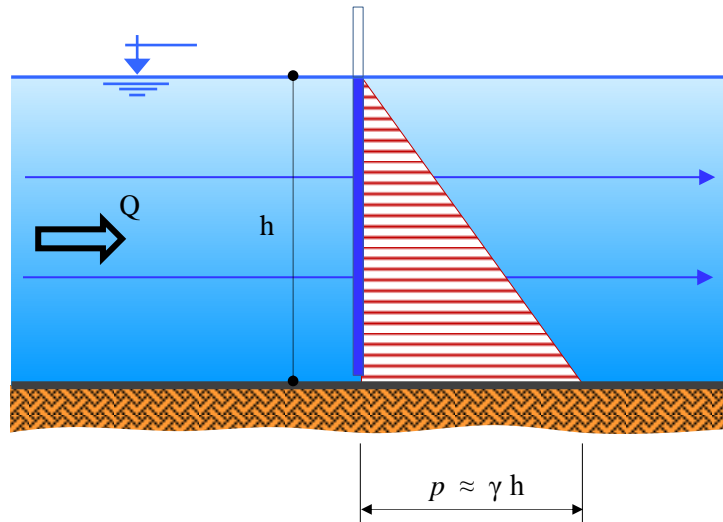


Figura 47 – Distribución de presiones en canales de baja pendiente.

Por lo tanto, la presión en el fondo del canal se calcula con la expresión:

$$p \approx \gamma h \tag{83}$$

Se reitera que lo anteriormente expuesto es válido exclusivamente para pendientes longitudinales i relativamente pequeñas, esto implica que en términos de aplicación tecnológica se confunden prácticamente con la horizontal.

En la hipotética situación que el perfil longitudinal de la solera adopte una forma convexa o cóncava, el movimiento deja de ser uniforme y se produce una disminución o aumento de la presión debido al efecto de la fuerza centrífuga originada por la curvatura de las líneas de corriente. La distribución de presiones deja de ser similar a la hidrostática.

En el primer caso las fuerzas centrífugas actúan hacia arriba, en contra de la acción gravitatoria, por lo que la presión resultante es menor que en los escurrimientos paralelos (ver Figura 48):

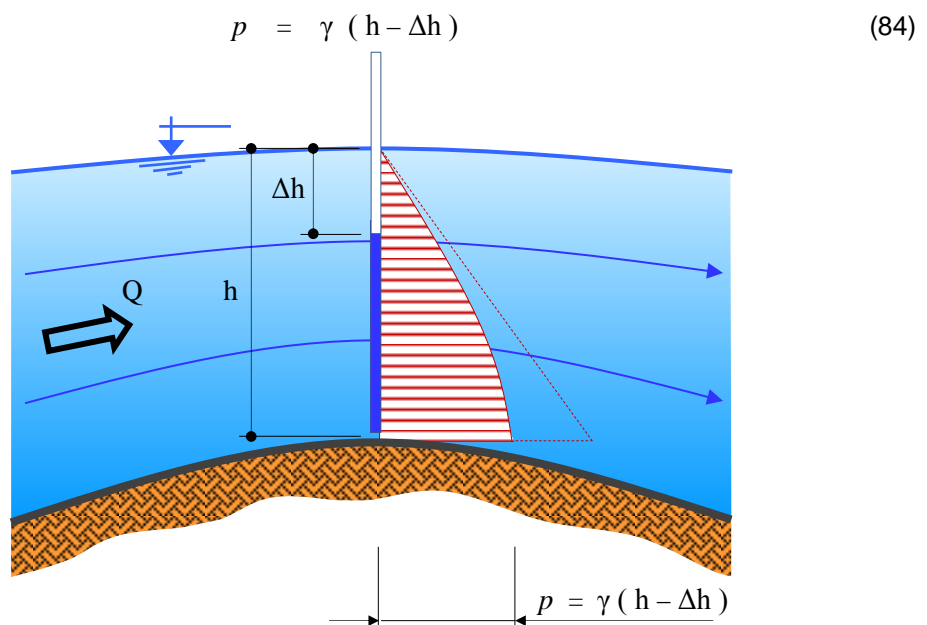


Figura 48 – Distribución de presiones en un canal de perfil longitudinal convexo.

En cambio si el escurrimiento acontece sobre un perfil longitudinal cóncavo, las fuerzas centrífugas apuntan hacia abajo, adicionales a la acción de la gravedad, y la presión resultante es mayor (ver *Figura 49*):

$$p = \gamma (h + \Delta h) \quad (85)$$

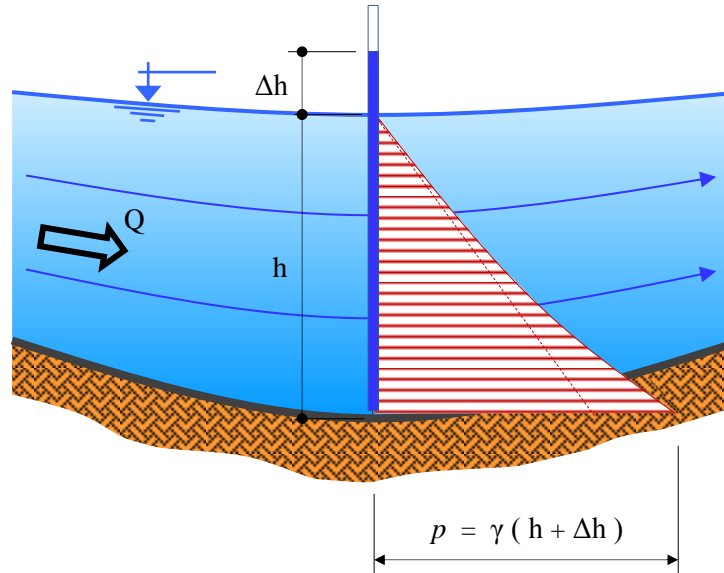


Figura 49 – Distribución de presiones en un canal de perfil longitudinal cóncavo.

5. DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES.

5.1. Descripción.

Si se analiza la variación de la velocidad en una sección en estudio correspondiente a un escurrimiento a superficie libre, se puede constatar que lejos de ser la misma un valor constante, es de por sí variable punto a punto.

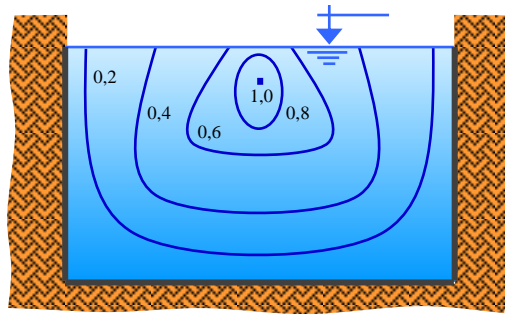
Las partículas fluidas que se encuentran en contacto con las paredes sólidas inmóviles, de acuerdo al principio enunciado por Meyer, su velocidad es nula. Así también, la presencia del aire supuestamente estático sobre la superficie libre, genera un freno debido al rozamiento con el líquido, causal que la velocidad máxima no se manifieste sobre dicha superficie, sino inmediatamente dentro del seno de la sección.

En las aplicaciones usuales, la corriente de los canales se mueve con números de Reynolds elevados, lo que implica que el régimen sea turbulento. Esta circunstancia conlleva a recordar que en cualquier punto de la sección considerada, la velocidad varía en magnitud y dirección de instante a instante, por lo que la denominación *velocidad en un punto*, en realidad se refiere a la velocidad media temporal en un lapso denominado pulsación, comprendido entre 1,5 y 2,0 minutos, tal como se desprende del concepto desarrollado por Boussinesq.

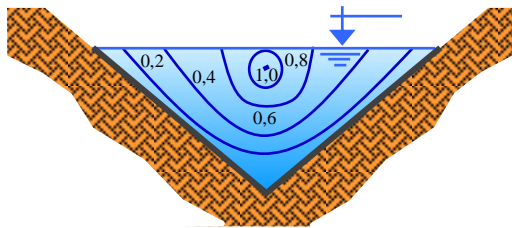
Si el canal es prismático y el movimiento uniforme, la velocidad en un punto cualquiera de la sección es paralela a las generatrices y por consiguiente perpendicular a dicha sección. Siendo para este caso, las líneas de corriente también paralelas a las generatrices.

El lugar geométrico de los puntos de una sección que tienen igual velocidad, conforman una línea que se denomina isotaquia o isodroma. En la *Figura 50* se indican líneas isotaquias de

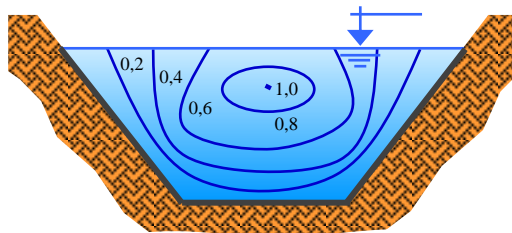
secciones rectangular, triangular y trapecial, para velocidades correspondientes al 20%, 40%, 60% y 80% de la velocidad máxima.



a) Sección rectangular.



b) Sección triangular.



c) Sección trapecial.

Figura 50 – Líneas isotaquias o isodromas.

La experiencia hidrométrica prueba que la distribución de velocidades es muy próxima a la indicada en la Figura 51, donde la máxima velocidad se encuentra a una profundidad, que dependiendo del tipo de sección, varía entre $0,05 h$ y $0,25 h$. Esa distancia tiende a tomar el mayor valor cuanto más ancho es el canal.

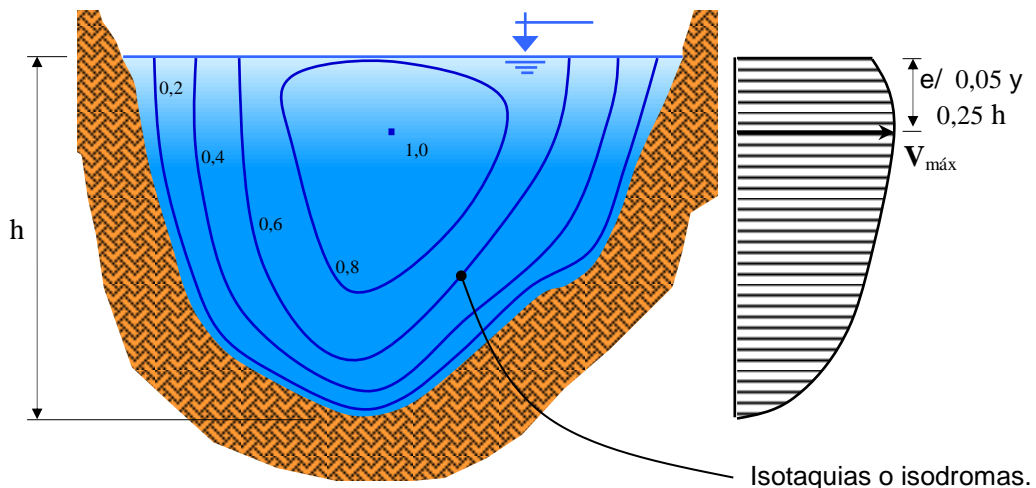


Figura 51 – Distribución de velocidades – Velocidad máxima.

La U. S. Geological Survey recomienda para la determinación de la velocidad media U , medir la velocidad $V_{0,6h}$, ya que está probado que ambos valores son muy próximos (ver *Figura 52*). Si se requiere mayor precisión en el cálculo de la velocidad media U , se sugiere adoptar la media aritmética entre las velocidades $V_{0,2h}$ y $V_{0,8h}$.

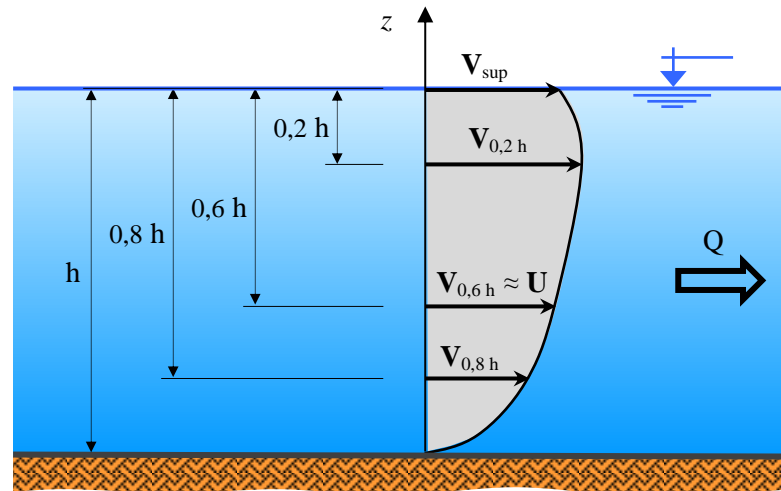


Figura 52 – Distribución de velocidades – Velocidad media.

En régimen turbulento la velocidad crece muy rápidamente cuando se aleja de la pared, para conservar luego un valor apenas distinto de la velocidad media U . Admitiendo en una primera aproximación que la velocidad es constante en toda la sección e igual a la velocidad media U , se gesta una hipótesis que permite simplificar un problema tridimensional a uno de una sola dimensión, dependiendo la velocidad solo de la dirección longitudinal, siempre que el movimiento sea permanente.

Referente a la energía cinética en función de la velocidad media U , y a los efectos de la determinación del coeficiente de Coriolis α , se puede afirmar como resultado de distintas experiencias que para canales con forma simple α varía entre 1,05 y 1,15, de manera que en los cálculos relativamente precisos es recomendable adoptar $\alpha = 1,1$ o también con menor rigor profesional y de manera más simplificada considerar $\alpha = 1$.

Al respecto se hacen las siguientes observaciones:

- En secciones irregulares (tipo naturales) o de formas compuestas, α puede alcanzar valores un tanto mayores de 1,3.
- En dos secciones iguales con movimiento uniforme, α es mayor cuanto más rugosas son las paredes de contacto.
- En un movimiento gradualmente variado:
 - α aumenta de aguas arriba hacia aguas abajo cuando hay divergencia de las líneas de corriente (caso de curvas de remanso de sobre-elevación o ensanchamiento).
 - α disminuye de aguas arriba hacia aguas abajo cuando hay convergencia de las líneas de corriente (caso de curvas de remanso de depresión o estrechamiento).

- En una situación intermedia entre las dos anteriores, en circunstancias en que el escurrimiento se aproxima al régimen crítico, el coeficiente α tiende a la unidad.

Steponas Kolupaila (1892-1964), oriundo de Letonia, confeccionó una tabla con valores mínimos, medios y máximos de los coeficientes de Coriolis α y Boussinesq β , producto de sus propias experiencias realizadas en su país de origen y en E.E.U.U.

Tabla 8 **Tabla de coeficientes de Coriolis y Boussinesq en canales.**

TIPO DE CANALES	COEFICIENTE					
	Coroilis α			Boussinesq β		
	Mínimo	Medio	Máximo	Mínimo	Medio	Máximo
Rectos, sin obstáculos.	1,01	1,05	1,10	1,00	1,02	1,03
Regulares y descargas en vertederos.	1,10	1,15	1,20	1,03	1,05	1,07
Corrientes naturales y torrentes.	1,15	1,30	1,50	1,05	1,10	1,17
Ríos bajo cubierta de hielo.	1,20	1,50	2,00	1,07	1,17	1,33
Ríos de valle desbordados en planicie.	1,50	1,75	2,00	1,17	1,25	1,33

En el orden práctico y ventajoso, se aconseja utilizar en los cálculos, el criterio simplificado de velocidad media U .

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} V d\Omega$$

Donde V representa la velocidad media temporal.

5.2. Velocidades límites.

En los escurrimientos a superficie libre, las velocidades medias de circulación se encuentran condicionadas en la práctica por un límite superior denominado *velocidad máxima* y otro inferior llamado *velocidad mínima*, a los efectos de asegurar el correcto funcionamiento de los canales.

a) Velocidad máxima.

Está relacionada directamente con la naturaleza de los bordes sólidos. Se refiere a la máxima velocidad media que admite un canal, sin que sus paredes se vean vulneradas por efecto de la socavación provocada por la fricción del líquido circulante.

A modo de ejemplo, en la *Tabla 9* se muestran valores indicativos máximos de la velocidad media admisible para distintos tipos de materiales constitutivos de las paredes de los canales y correspondiente exclusivamente para tirantes medios de 1 m.

Tabla 9 Máximas velocidades medias admisibles en canales con tirantes medios de 1 m .

M A T E R I A L		VELOCIDAD MÁXIMA
		$U_{m\acute{a}x}$ [m/s]
Arcilla	Poco compacta.	0,25
	Compacidad media.	0,60
	Compacta.	0,95
	Muy compacta.	1,30
Limo	Poco compacto.	0,30
	Compacidad media.	0,70
	Compacto.	1,00
	Muy compacto.	1,40
Arena	Fina. Partículas de dimensiones e/ 0,85 y 0,05 mm.	0,15
	Media. Partículas de dimensiones e/ 1,00 y 0,85 mm.	0,25
	Gruesa. Partículas de dimensiones e/ 2,50 y 1,00 mm.	0,45
Grava	Partículas de dimensiones e/ 5,00 y 2,50 mm.	0,50
	Partículas de dimensiones e/ 10,00 y 5,00 mm.	0,65
	Partículas de dimensiones e/ 15,00 y 10,00 mm.	0,80
Hormigón	Resistencia característica 13 Mpa.	20,00
	Resistencia característica 17 Mpa.	25,00
	Resistencia característica 21 Mpa.	30,00
Mampostería	Ladrillos comunes.	3,00
	Roca sedimentaria.	15,00
	Roca ígnea.	18,00
Césped	Denso y permanente.	1,50
	Ralo y débil.	0,90

Si se trata de un canal de tirante medio distinto de 1 m, los valores dados en la Tabla 9 deben rectificarse, multiplicando por un coeficiente corrector C_c según las indicaciones de la Tabla 10.

Tabla 10 Coeficiente corrector de máximas velocidades medias admisibles.

TIRANTE MEDIO h_m [m]	COEFICIENTE CORRECTOR C_c [adimensional]
0,30	0,80
0,50	0,90
0,75	0,95
1,00	1,00
1,50	1,10
2,00	1,10
2,50	1,20
3,00	1,20

Existen tablas más completas y precisas que contemplan como variable adicional el tenor de sustancias coloidales.

b) Velocidad mínima.

Se prevé esta restricción inferior con la finalidad de evitar embanques y formación de plantas acuáticas, ya que los mismos accionan negativamente contra el regular funcionamiento del canal a consecuencia de la disminución de la sección y un mayor costo de mantenimiento.

Robert Gregg Kennedy (1851-1920), de origen británico, desarrolló sus experiencias sobre redes de canales construidos en India y Pakistán. Formuló la siguiente expresión de uso vigente:

$$U_{\min} = \beta h^s \tag{86}$$

Los valores comunes que adoptan β y s en canales de tipos más usuales son:

$$\begin{cases} \beta = 0,55 \\ s = 0,64 \end{cases}$$

En estas condiciones, la fórmula de Kennedy (7-86) queda expresada de modo más concreto:

$$U_{\min} = 0,55 h^{0,64} \tag{87}$$

Donde el coeficiente β es un factor que depende del material en suspensión

6. CANALES.

Se considera en este punto el estudio de los escurrimientos superficiales que se presentan en conductos artificiales, o sea, los construidos a través de la mano de obra del hombre, en sus dos formas, contornos abiertos y contornos cerrados.

6.1. Problemas.

Las alternativas que se presentan para la resolución de los canales se resumen en dos problemáticas bien definidas:

- Dimensionado.

En este caso se tiene de dato inicial al gasto o caudal Q que debe transportar el canal, cuya magnitud puede llegar a merecer un análisis previo por parte del proyectista, y en base a ello se comienza con una primera etapa de diseño y otra posterior de cálculo.

El diseño comprende una fase creativa que consiste en definir la forma de la sección transversal, teniendo en cuenta argumentos de índole hidráulico y/o estético, además de las limitaciones topográficas o urbanísticas que se puedan dar. También se debe precisar la pendiente longitudinal i , que será consecuencia de un estudio técnico, teniendo como principales variables en la decisión, la topografía superficial, la

conformación del suelo y la pendiente natural del terreno. Y como paso siguiente se ha de explicitar el material que va a conformar las paredes de la conducción, sea del tipo natural, o natural compactado o bien alguna de las tantas opciones que nos brinda la tecnología en cuanto a tipos de revestimiento, delimitando el coeficiente de rugosidad de Manning n .

Fijando las variables detalladas anteriormente, se continúa finalmente con el cálculo hidráulico, donde se cuantifican específicamente las dimensiones de la sección proyectada.

- Verificación.

Es un problema que consiste en determinar, o bien controlar, el gasto o caudal Q que es capaz de escurrir por un canal existente.

Por consiguiente, se tienen como datos previos las características geométricas de la sección transversal, la pendiente longitudinal i y el coeficiente de rugosidad n del material con el que está constituido el canal. Con todos estos elementos se calcula el gasto o caudal Q aplicando directamente la expresión de la velocidad de Chézy-Manning, multiplicada por la sección transversal Ω .

6.2. Procedimiento de cálculo.

El dimensionado consiste en calcular cada una de las magnitudes correspondientes con la sección en estudio, cuya forma ha sido previamente diseñada. Tal como su nombre lo indica, se trata de determinar las dimensiones exactas de la sección.

Para ello, el proyectista debe definir los siguientes parámetros básicos del cálculo, en función de las necesidades, materiales y topografía del lugar:

- Q Gasto o caudal de diseño.
- n Coeficiente de rugosidad de Manning.
- i Pendiente longitudinal.

Además, según el tipo de sección transversal de la cual se trate, también se debe adoptar criteriosamente una relación entre el tirante h y una longitud característica de dicha sección. Así por ejemplo para:

- Secciones rectangulares: $\frac{h}{B}$
- Secciones trapeciales: $\frac{h}{B_f}$
- Secciones circulares: $\frac{h}{D}$

Si en el cálculo, se trata de una sección que incluye un talud, el proyectista tiene que fijar la inclinación m , considerando la estabilidad del mismo en función de la cualidad propia del suelo.

Teniendo en cuenta las consideraciones apuntadas, se procede a analizar partiendo de las expresiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación de continuidad.} \\ \text{Fórmula de Chézy – Manning.} \end{array} \right.$$

$$Q = \Omega U = \Omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} = \Omega \frac{1}{n} \frac{\Omega^{2/3}}{\chi^{2/3}} i^{1/2} = \frac{1}{n} \frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} i^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} = \frac{Q n}{i^{1/2}} \quad (88)$$

La ecuación (88), de exprofeso ha sido dividida en dos miembros, agrupando convenientemente cada uno de los términos intervinientes, según sea incógnita o dato del problema.

- 1° miembro: Ω y χ . Ambos son función del tirante h , que representa la incógnita principal.
- 2° miembro: Q , n e i . Todos datos de partida en el dimensionado.

Procediendo particularmente con cada tipo de secciones, se reemplaza en la (88) por la expresión matemática que representa individualmente a $\Omega = f(h)$ y $\chi = f(h)$, transformándose la misma en una ecuación con una sola incógnita, de la que se obtiene en primera instancia el tirante h . Luego, en función de dicho tirante, se deducen las demás longitudes características de la sección, el ancho superficial B , la sección Ω y el perímetro mojado χ .

También se puede determinar fácilmente la magnitud cinemática, representada por la velocidad media U , como el cociente entre el gasto o caudal Q y el área de la sección transversal Ω .

6.3. Cálculo de secciones usuales.

a) Secciones de contorno abierto.

- **Sección triangular.**

- *Datos:*

- Q Gasto o caudal.
- i Pendiente longitudinal.
- n Coeficiente de rugosidad de Manning.
- m Inclinación del talud.

- *Solución:*

Sección transversal.

$$\Omega = m h^2$$

Perímetro mojado.

$$\chi = 2h \left(1 + m^2\right)^{1/2}$$

Resolviendo:

$$\frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} = \frac{\left(m h^2\right)^{5/3}}{\left[2 \left(1 + m^2\right)^{1/2}\right]^{2/3} h^{2/3}} = h^{8/3} \frac{m^{5/3}}{2^{2/3} \left(1 + m^2\right)^{1/3}} = \frac{Q n}{i^{1/2}}$$

Tirante hidráulico.

$$\Rightarrow h = \left[\frac{2^{2/3} \left(1 + m^2\right)^{1/3}}{m^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Ancho superficial.

$$B = 2 m h$$

- **Sección rectangular.**

- *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{B}$ Relación tirante – ancho.

- *Solución:*

Sección transversal.

$$\Omega = B h = \frac{h}{h} B h = \frac{h^2}{\frac{h}{B}}$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B + 2h = \frac{h}{h} B + 2h = h \left(\frac{1}{\frac{h}{B}} + 2 \right) = \frac{h}{\frac{h}{B}} \left(1 + 2 \frac{h}{B} \right)$$

Resolviendo:

$$\frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} = \frac{\left(\frac{h^2}{h/B}\right)^{5/3}}{\left[\frac{h}{h/B} \left(1 + 2 \frac{h}{B}\right)\right]^{2/3}} = h^{8/3} \frac{1}{\frac{h}{B} \left(1 + 2 \frac{h}{B}\right)^{2/3}} = \frac{Q n}{i^{1/2}}$$

Tirante hidráulico.

$$\Rightarrow h = \left[\frac{h}{B} \left(1 + 2 \frac{h}{B}\right)^{2/3} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Ancho superficial.

$$B = \frac{h}{\frac{h}{B}}$$

• **Sección trapecial.**

• *Datos:*

- Q Gasto o caudal.
- i Pendiente longitudinal.
- n Coeficiente de rugosidad de Manning.
- m Inclinación del talud.
- $\frac{h}{B_f}$ Relación tirante – ancho de fondo.

• *Solución:*

Sección transversal.

$$\Omega = B_f h + m h^2 = h^2 \left(\frac{1}{h/B_f} + m \right)$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B_f + 2h \left(1 + m^2\right)^{1/2} = h \left[\frac{1}{h/B_f} + 2 \left(1 + m^2\right)^{1/2} \right]$$

Resolviendo:

$$\frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} = \frac{h^{10/3} \left(\frac{1}{h/B_f} + m \right)^{5/3}}{h^{2/3} \left[\frac{1}{h/B_f} + 2 \left(1 + m^2 \right)^{1/2} \right]^{2/3}} = \frac{Q n}{i^{1/2}}$$

Tirante hidráulico.

$$\Rightarrow h = \left\{ \frac{\left[\frac{1}{h/B_f} + 2 \left(1 + m^2 \right)^{1/2} \right]^{2/3}}{\left(\frac{1}{h/B_f} + m \right)^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Ancho superficial.

$$B = B_f + 2 m h$$

- **Sección trapezoidal asimétrica.**

- *Datos:*

- Q Gasto o caudal.
- i Pendiente longitudinal.
- n_1 Coeficiente de rugosidad de Manning del talud izquierdo.
- n_2 Coeficiente de rugosidad de Manning del talud derecho.
- n_3 Coeficiente de rugosidad de Manning de la solera.
- m_1 Inclinación del talud izquierdo.
- m_2 Inclinación del talud derecho.
- h/B_f Relación tirante – ancho de fondo.

- *Solución:*

Tirante hidráulico.

$$h = \left\{ \frac{\left[\left(1 + m_1^2 \right)^{1/2} n_1^{3/2} + \left(1 + m_2^2 \right)^{1/2} n_2^{3/2} + \frac{1}{h/B_f} n_3^{3/2} \right]^{2/3}}{\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{1}{h/B_f} \right)^{5/3}} \frac{Q}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Sección transversal.

$$\Omega = h^2 \left(\frac{1}{h/B_f} + \frac{m_1 + m_2}{2} \right)$$

Perímetro mojado

$$\chi = h \left[\frac{1}{h/B_f} + (1 + m_1^2)^{1/2} + (1 + m_2^2)^{1/2} \right]$$

Ancho de fondo

$$B_f = \frac{h}{h/B_f}$$

Ancho superficial.

$$B = B_f + m_1 h + m_2 h$$

• **Sección compuesta *semicircular – trapecial.***

• *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n_1 Coeficiente de rugosidad de Manning del talud izquierdo.

n_2 Coeficiente de rugosidad de Manning del talud derecho.

n_3 Coeficiente de rugosidad de Manning de la semicircunferencia.

m_1 Inclinación del talud izquierdo.

m_2 Inclinación del talud derecho.

$\frac{h}{r}$ Relación tirante – radio. Límite: $\frac{h}{r} \geq 1$

• *Solución:*

Cálculos previos.

$$cte.1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{h/r} \right)^2 (m_1 + m_2) + \frac{2}{h/r} \left(1 - \frac{1}{h/r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\pi}{\left(\frac{h}{r} \right)^2}$$

$$cte.2 = (1 + m_1^2)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{h/r} \right) + (1 + m_2^2)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{h/r} \right) + \frac{\pi}{h/r}$$

$$cte.3 = (1 + m_1^2)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{h/r} \right) n_1^{3/2}$$

$$cte.4 = \left(1 + m_2^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{h/r}\right) n_2^{3/2}$$

$$cte.5 = \frac{\pi}{h/r} n_3^{3/2}$$

Tirante hidráulico.

$$h = \left[\frac{(cte.3 + cte.4 + cte.5)^{2/3} Q}{(cte.1)^{5/3} i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Radio.

$$r = \frac{h}{h/r}$$

Sección transversal.

$$\Omega = cte.1 h^2$$

Perímetro mojado.

$$\chi = cte.2 h$$

Ancho superficial.

$$B = 2r + m_1(h - r) + m_2(h - r)$$

Coefficiente de rugosidad medio compensado de Manning.

$$n = \left(\frac{cte.3 + cte.4 + cte.5}{cte.2} \right)^{2/3}$$

- **Sección tolva.**

- *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

m Inclinación del talud.

$\frac{h}{r}$ Relación tirante – radio.

• **Solución:**

Ángulo talud – eje horizontal.

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{m}$$

Radio.

$$r = \left\{ \frac{2^{2/3} \left[\alpha + \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right) (1 + m^2)^{1/2} \right]^{2/3}}{\left[\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right) + m \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right)^2 \right]^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Tirante hidráulico.

$$h = \frac{h}{r} r$$

Sección transversal.

$$\Omega = r^2 \left[\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right) + m \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right)^2 \right]$$

Perímetro mojado.

$$\chi = 2r \left[\alpha + \left(\frac{h}{r} + \cos \alpha - 1 \right) (1 + m^2)^{1/2} \right]$$

Ancho superficial.

$$B = 2r \operatorname{sen} \alpha + 2m \left[h - r(1 - \cos \alpha) \right]$$

• **Sección “U”.**

• **Datos:**

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

h/r Relación tirante – radio. Límite: $h/r \geq 1$.

• **Solución:**

Radio.

$$r = \left\{ \frac{\left[\pi + 2 \left(\frac{h}{r} - 1 \right) \right]^{2/3}}{\left[\frac{\pi}{2} + 2 \left(\frac{h}{r} - 1 \right) \right]^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Tirante hidráulico.

$$h = \frac{h}{r} r$$

Sección transversal.

$$\Omega = r^2 \left[\frac{\pi}{2} + 2 \left(\frac{h}{r} - 1 \right) \right]$$

Perímetro mojado.

$$\chi = r \left[\pi + 2 \left(\frac{h}{r} - 1 \right) \right]$$

Ancho superficial.

$$B = 2 r$$

- **Sección parabólica.**

- *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{B}$ Relación tirante – ancho superficial.

- *Solución:*

Tirante hidráulico.

$$h = \left\{ \frac{3}{2} \frac{h}{B} \left[\frac{3}{2} + 4 \left(\frac{h}{B} \right)^2 \right]^{2/3} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Sección transversal.

$$\Omega = \frac{2}{3} B h$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B + \frac{8}{3} \frac{h^2}{B}$$

Ancho superficial.

$$B = \frac{h}{\frac{h}{B}}$$

b) Secciones de contorno cerrado.

• **Sección triangular.**

• *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

m Inclinación del talud.

$\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $0 < h/a \leq 1$.

• *Solución:*

Tirante hidráulico.

$$h = \left[\frac{2^{2/3} \left[\frac{m}{\frac{h}{a}} + (1+m^2)^{1/2} \right]^{2/3}}{m^{5/3} \left(\frac{2}{\frac{h}{a}} - 1 \right)^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Altura.

$$a = \frac{h}{\frac{h}{a}}$$

Ancho de fondo.

$$B_f = \frac{2 m h}{\frac{h}{a}}$$

Sección transversal.

$$\Omega = B_f h - m h^2$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B_f + 2h (1+m^2)^{1/2}$$

Ancho superficial.

$$B = B_f - 2 m h$$

- **Sección rectangular.**

- *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $0 < h/a \leq 1$.

$\frac{a}{B}$ Relación altura – ancho

- *Solución:*

Tirante hidráulico.

$$h = \left[\frac{h}{a} \frac{a}{B} \left(1 + 2 \frac{h}{a} \frac{a}{B} \right)^{3/8} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Altura.

$$a = \frac{h}{\frac{h}{a}}$$

Ancho superficial (igual al ancho de fondo).

$$B = B_f \frac{1}{\frac{h}{a}} \frac{1}{\frac{a}{B}} h$$

Sección transversal.

$$\Omega = B h$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B + 2h$$

- **Sección trapecial.**

- *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

m Inclinación del talud.

$\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $0 < h/a \leq 1$.

$\frac{a}{B_f}$ Relación altura – ancho de fondo. Límites: $0 < \frac{a}{B_f} \leq 1/(2m)$.

- **Solución:**

Tirante hidráulico.

$$h = \left\{ \frac{\left[\frac{1}{\frac{h}{a}} \frac{1}{\frac{a}{B_f}} + 2 (1+m^2)^{1/2} \right]^{2/3}}{\left(\frac{1}{\frac{h}{a}} \frac{1}{\frac{a}{B_f}} - m \right)^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Altura.

$$a = \frac{h}{\frac{h}{a}}$$

Ancho de fondo.

$$B_f = \frac{a}{\frac{a}{B_f}}$$

Ancho superior.

$$B_s = B_f - 2 m a$$

Sección transversal.

$$\Omega = B_f h - m h^2$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B_f + 2h (1+m^2)^{1/2}$$

Ancho superficial.

$$B = B_f - 2 m h$$

- **Sección circular.**

- **Datos:**

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{D}$ Relación tirante – diámetro. Límites: $0 < \frac{h}{D} \leq 1$.

- *Solución:*

Ángulo en función del tirante h.

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{h}{r}\right) = \arccos\left(1 - 2 \frac{h}{D}\right)$$

Radio.

$$r = \frac{1}{2} \left[\frac{2^{10/3} \theta^{2/3}}{(\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Diámetro.

$$D = 2 r$$

Tirante hidráulico.

$$h = \frac{h}{D} D$$

Sección transversal.

$$\Omega = r^2 (\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$$

Perímetro mojado.

$$\chi = 2 \theta r$$

Ancho superficial.

$$B = 2 r \operatorname{sen} \theta$$

- **Sección bóveda semicircular.**

- *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $1 - 1/[2(a/B_f)] < \frac{h}{a} \leq 1$.

$\frac{a}{B_f}$ Relación altura – ancho de fondo. Límites: $\frac{a}{B_f} \geq 1/2$.

- *Solución:*

Ángulo en función del tirante h.

$$\theta = \arccos\left[1 - 2 \frac{a}{B_f} \left(1 - \frac{h}{a}\right)\right]$$

Radio.

$$r = \left[\frac{2^{2/3} \left(2 \frac{a}{B_f} + \theta \right)^{2/3}}{\left(4 \frac{a}{B_f} - 2 + \theta + \text{sen} \theta \cos \theta \right)^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Altura.

$$a = \frac{a}{B_f} 2 r$$

Dimensiones parciales de la altura.

$$a' = r$$

$$a'' = a - r$$

Tirante hidráulico.

$$h = \frac{h}{a} a$$

Ancho de fondo.

$$B_f = 2 r$$

Sección transversal.

$$\Omega = r^2 \left[2 \left(\frac{a}{r} - 1 \right) + \theta + \text{sen} \theta \cos \theta \right]$$

Perímetro mojado.

$$\chi = 2 r \left(\frac{a}{r} + \theta \right)$$

Ancho superficial.

$$B = 2 r \text{sen} \theta$$

- **Sección modelo.**

- *Datos:*

- Q Gasto o caudal.

- i Pendiente longitudinal.

- n Coeficiente de rugosidad de Manning.

- $\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $1/6 \leq \frac{h}{a} \leq 1$.

- *Solución:*

Ángulo en función del tirante h.

$$\theta = \arcsen\left(1,20 \frac{h}{a} - 0,20\right)$$

Radio.

$$r = \left[\frac{(2,0529 + 2\theta)^{2/3}}{(0,2688 + \theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta)^{5/3}} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right]^{3/8}$$

Altura.

$$a = 1,20 r$$

Dimensiones parciales de la altura.

$$a' = r$$

$$a'' = 0,20 r$$

Tirante hidráulico.

$$h = \frac{h}{a} a$$

Ancho de fondo.

$$B_f = 2 r$$

Sección transversal.

$$\Omega = r^2 [0,2688 + \theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta]$$

Perímetro mojado.

$$\chi = r (2,0529 + 2\theta)$$

Ancho superficial.

$$B = 2 r \operatorname{sen}\theta$$

- **Sección herradura.**

- *Datos:*

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $1/2 \leq \frac{h}{a} \leq 1$.

• Solución:

Ángulo.

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\pi - \arccos \frac{3}{4} \right) - \frac{\pi}{4}$$

Ángulo en función del tirante h.

$$\theta = \arccos \left(\frac{h}{r} - 1 \right) = \arccos \left(2 \frac{h}{a} - 1 \right)$$

Radio.

$$r = \left[\frac{(2\theta + 8\alpha)^{2/3} \frac{Qn}{i^{1/2}}}{\left(\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 8\alpha - 8\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{sen}\alpha + 4\operatorname{sen}^2\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \right)^{5/3}} \right]^{3/8}$$

Tirante hidráulico.

$$h = 2 \frac{h}{a} r$$

Altura.

$$a = 2 r$$

Dimensiones parciales de la altura.

$$a' = r$$

$$a'' = 2 r \operatorname{sen}\alpha$$

$$a''' = 2 r (1 - \cos\alpha)$$

Ancho de fondo.

$$B_f = 4 r \operatorname{sen}\alpha$$

Sección transversal.

$$\Omega = r^2 \left[\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 8\alpha - 8\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{sen}\alpha + 4\operatorname{sen}^2\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \right]$$

Perímetro mojado.

$$\chi = r (2\theta + 8\alpha)$$

Ancho superficial.

$$B = 2 r \cos\theta$$

- **Sección parabólica con fondo triangular.**

- **Datos:**

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $\frac{1}{11} \leq \frac{h}{a} \leq 1$.

$\frac{a}{B_f}$ Relación altura – ancho de fondo.

- **Solución:**

Tirante hidráulico.

$$h = \frac{h}{a} \left\{ \left[\left(\frac{800}{363} - \frac{8}{3} \left(\frac{10}{11} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a} \right)^{3/2} \right) \left(\frac{a}{B_f} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \left(\frac{11}{10} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a} \right)^{1/2} \right) \left(\frac{a}{B_f} \right)^{-1} + \left(\frac{4}{121} + \left(\frac{a}{B_f} \right)^{-2} \right)^{1/2} \right]^{2/3} \cdot \right. \\ \left. \left[\left(\frac{43}{66} - \left(\frac{44}{90} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a} \right)^{3/2} \right) \left(\frac{a}{B_f} \right)^{-1} \right]^{-5/3} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Altura.

$$a = \frac{h}{\frac{h}{a}}$$

Dimensiones parciales de la altura.

$$a' = \frac{10}{11} a$$

$$a'' = \frac{1}{11} a$$

Ancho de fondo.

$$B_f = \frac{a}{\frac{a}{B_f}}$$

Sección transversal.

$$\Omega = \frac{43}{66} B_f a - \left(\frac{44}{90} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a} \right)^{1/2} B_f (a - h)$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B_f + \frac{800}{363} \frac{a^2}{B_f} - \left(\frac{11}{10}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f - \frac{8}{3} \left(\frac{10}{11}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{3/2} \frac{a^2}{B_f} + 2 \left[\frac{a^2}{121} + \frac{B_f^2}{4} \right]^{1/2}$$

Ancho superficial.

$$B = \left[\frac{11}{10} \left(1 - \frac{h}{a}\right) \right]^{1/2} B_f$$

• **Sección parabólica con fondo circular.**

• **Datos:**

Q Gasto o caudal.

i Pendiente longitudinal.

n Coeficiente de rugosidad de Manning.

$\frac{h}{a}$ Relación tirante – altura. Límites: $\frac{1}{11} \leq \frac{h}{a} \leq 1$.

$\frac{a}{B_f}$ Relación altura – ancho de fondo.

• **Solución:**

Tirante hidráulico.

$$h = \frac{h}{a} \left\{ \left[\frac{1}{\frac{a}{B_f}} + \frac{800}{363} \frac{a}{B_f} - \left(\frac{11}{10}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} \frac{1}{\frac{a}{B_f}} - \frac{8}{3} \left(\frac{10}{11}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{3/2} \frac{a}{B_f} + 2 \operatorname{arccos} \frac{44 \frac{a}{B_f}}{4 \frac{a}{B_f}^2 + 11^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{22} + \frac{11}{8 \frac{a}{B_f}^2} \right]^{2/3} \left[\frac{20}{33 \frac{a}{B_f}} - \left(\frac{44}{90}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{3/2} \frac{1}{\frac{a}{B_f}} + \operatorname{arccos} \frac{44 \frac{a}{B_f}}{4 \frac{a}{B_f}^2 + 11^2} \cdot \left(\frac{1}{22} + \frac{11}{8 \frac{a}{B_f}^2} \right)^2 - \frac{11}{16 \frac{a}{B_f}^3} + \frac{1}{44 \frac{a}{B_f}} \right]^{-5/3} \frac{Q n}{i^{1/2}} \right\}^{3/8}$$

Altura.

$$a = \frac{h}{\frac{h}{a}}$$

Dimensiones parciales de la altura.

$$a' = \frac{10}{11} a$$

$$a'' = \frac{1}{11} a$$

Ancho de fondo.

$$B_f = \frac{a}{\frac{a}{B_f}}$$

Radio.

$$r = \frac{a}{22} + \frac{11}{8} \frac{B_f^2}{a}$$

Sección transversal.

$$\Omega = \frac{20}{33} B_f a - \left(\frac{44}{90}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f (a - h) + \operatorname{arccosen} \frac{B_f}{\frac{a}{11} + \frac{11}{4} \frac{B_f^2}{a}} \cdot \left(\frac{a}{22} + \frac{11}{8} \frac{B_f^2}{a}\right)^2 - \frac{11}{16} \frac{B_f^3}{a} + \frac{a B_f}{44}$$

Perímetro mojado.

$$\chi = B_f + \frac{800}{363} \frac{a^2}{B_f} - \left(\frac{11}{10}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{1/2} B_f - \frac{8}{3} \left(\frac{10}{11}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{3/2} \frac{a^2}{B_f} + 2 \operatorname{arccosen} \frac{B_f}{\frac{a}{11} + \frac{11}{4} \frac{B_f^2}{a}} \left(\frac{a}{22} + \frac{11}{8} \frac{B_f^2}{a}\right)$$

Ancho superficial.

$$B = \left[\frac{11}{10} \left(1 - \frac{h}{a}\right)\right]^{1/2} B_f$$

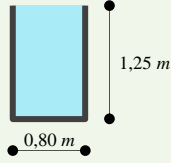
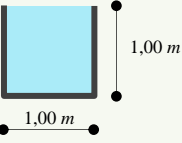
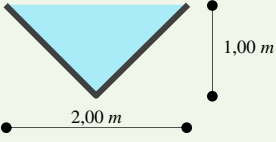
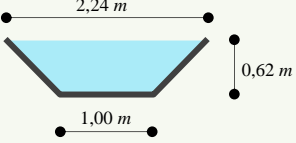

6.3.1. Cálculo con criterio de mínima resistencia.

Primeramente interesa determinar el tipo de sección con mayor capacidad de transporte de caudal, considerando las distintas formas geométricas optativas, y teniendo en cuenta la igualdad del área en la comparación.

La ecuación de Chézy-Manning (redistribuidos algunos de sus términos para un mejor entendimiento de posteriores razonamientos) se expresa en las dos formas indicadas en la ecuación (89).

$$Q = \frac{\Omega \cdot i^{1/2}}{n} R^{2/3} = \frac{\Omega^{5/3} \cdot i^{1/2}}{n} \frac{1}{\chi^{2/3}} \quad (89)$$

Tabla 11 Tipos de secciones simples con área unitaria.

FORMA	GRÁFICO	SECCIÓN Ω [m ²]	PERÍMETRO MOJADO χ [m]
Rectangular		1,00	3,30
Cuadrada		1,00	3,00
Triangular		1,00	2,83
Trapezoidal		1,00	2,75
Semicircular		1,00	2,51

Es evidente que al analizar la ecuación (89), para un mismo valor de sección Ω e igual pendiente i y coeficiente de rugosidad n , el caudal Q será máximo cuando simultáneamente el radio hidráulico R sea máximo y consecuentemente, el perímetro mojado χ sea mínimo.

En la *Tabla 11* se muestran, de modo ejemplificativo, cinco tipos de secciones transversales simples, con longitudes particulares que guardan una característica común entre ellas, la cual es que el área en todos los casos es igual a la unidad. Además, la misma ha sido ordenada de mayor a menor, en función de la dimensión del perímetro mojado χ .

A partir de este ejemplo sintetizado en la tabla, se calculan con el auxilio de la ecuación (78) los caudales porcentuales comparativos, tomando como referencia a la sección semicircular (menor valor de χ) por la cual escurre el máximo caudal y se supone igual al 100%. Así, para las demás secciones, circulan menores caudales equivalentes a los siguientes porcentajes:

- sección trapezoidal 94%
- sección triangular 92%
- sección cuadrada 89%
- sección rectangular 83%

De hecho, la forma circular es la figura geométrica que tiene menor perímetro con relación al área, o bien la que tiene mayor sección encerrada para un perímetro dado, tal como se demuestra a continuación:

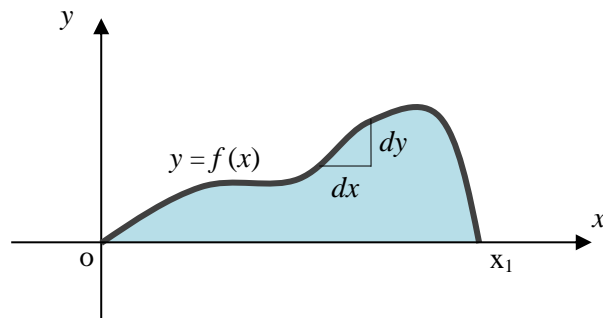


Figura 53 – Área encerrada por una curva.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Área} \quad \Omega = \int_0^{x_1} y \, dx \quad \rightarrow \text{Integral a maximizar.} \\ \text{Perímetro} \quad \chi = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad \rightarrow \text{Restricción.} \end{array} \right.$$

El lagrangiano L es:

$$L = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \tag{90}$$

Se maximiza $\int_0^{x_1} L \, dx$ en forma irrestricta.

Por lo tanto debe satisfacer la ecuación de Euler – Lagrange:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (91)$$

Donde:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \lambda \frac{2 y'}{2 \sqrt{1+y'^2}} \quad (92)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 \quad (93)$$

Reemplazando (92) y (93) en (91):

$$\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda d \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = dx$$

Integrando:

$$\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - cte.1$$

Elevando al cuadrado:

$$\lambda^2 \frac{y'^2}{1+y'^2} = (x - cte.1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 y'^2 = (x - cte.1)^2 (1+y'^2)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 y'^2 = (x - cte.1)^2 + (x - cte.1)^2 y'^2$$

$$\Rightarrow y'^2 [\lambda^2 - (x - cte.1)^2] = (x - cte.1)^2$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{(x - cte.1)^2}{\lambda^2 - (x - cte.1)^2}$$

$$\therefore y' = \frac{x - cte.1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - cte.1)^2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{x - cte.1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - cte.1)^2}} dx \quad (94)$$

Donde:

$$\begin{cases} x - cte.1 = u \\ dx = du \end{cases} \quad (95)$$

Reemplazando (95) en (94):

$$dy = \frac{u}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}} du$$

Integrando:

$$y = \sqrt{\lambda^2 - u^2} + cte.2$$

$$y = \sqrt{\lambda^2 - (x - cte.1)^2} + cte.2$$

$$\Rightarrow y - cte.2 = \sqrt{\lambda^2 - (x - cte.1)^2}$$

$$\Rightarrow (y - cte.2)^2 = \lambda^2 - (x - cte.1)^2$$

Finalmente resulta una ecuación de tipo circular:

$$(y - cte.2)^2 + (x - cte.1)^2 = \lambda^2 \quad (96)$$

Conclusión:

Se ha demostrado que la figura geométrica que encierra la máxima superficie para un determinado perímetro χ (tomado como restricción del problema) es semicircular, cuya ecuación responde a la expresión (96).

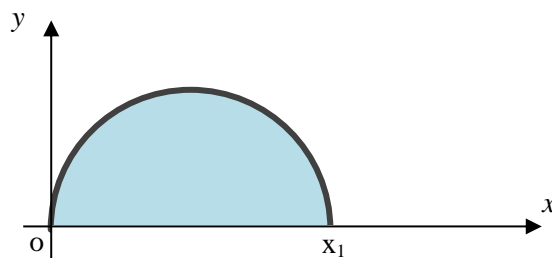


Figura 54 – Máxima área encerrada por una curva.

En la hidráulica de los canales, este concepto se interpreta desde una óptica inversa, es decir como una determinada área confinada dentro de un perímetro mínimo.

Ahora bien, una vez que el proyectista haya definido la forma en función al criterio de diseño, para el mismo tipo de formato geométrico existen variantes relativas entre sus propias dimensiones que disminuyen el perímetro mojado para una misma área de la sección, mejorando la circulación de la corriente hidráulica.

Tomando del ejemplo anterior el diseño exclusivo de la sección rectangular, se puede observar en la *Figura 55* otra alternativa comparativa, en la cual se consideran iguales condiciones de sección ($\Omega = 1\text{m}^2$), pendiente i y rugosidad de las paredes n . Los dos canales allí representados difieren solamente en sus perímetros mojados χ con un valor porcentual superior del 16% en el caso a respecto al b .

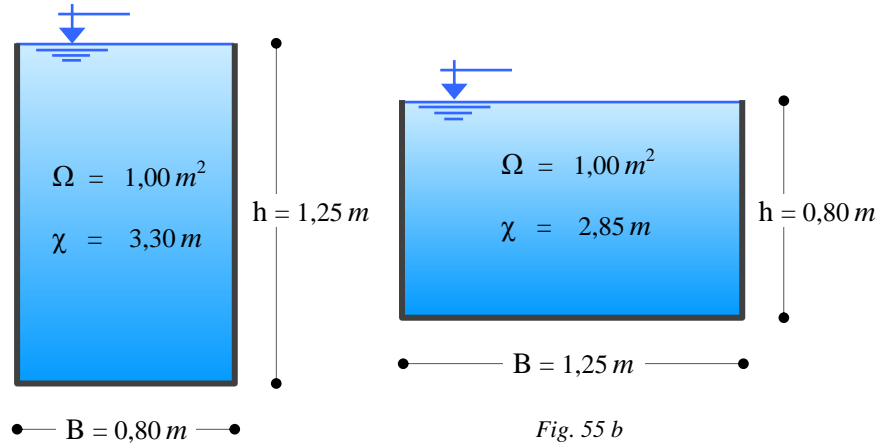


Fig. 55 a

Fig. 55 b

Figura 55 – Secciones rectangulares unitarias.

Este hecho provoca mayor fricción entre el fluido y el sólido, dando lugar a que escurra un menor caudal en la alternativa a (del orden del 9%), lo cual induce a razonar sobre la existencia de una relación particular entre el tirante h y el ancho B , tal que se maximice el gasto Q circulante.

Es así que en la delineación de los escurrimientos a superficie libre, el proyectista define en una primera instancia la morfología de la sección utilizando el criterio de diseño (ver apartado 7.11.) y optando por la sección más conveniente (ver apartado 6.5.). Una vez resuelta la forma geométrica, también se puede mejorar el escurrimiento, relacionando convenientemente el tirante con las dimensiones características de la sección elegida.

En base a lo expuesto, se analizan a continuación y de manera individual distintos tipos usuales de secciones de contorno abierto, para lo cual se determinan indirectamente las relaciones que producen el máximo caudal $Q_{\text{máx}}$, tomando como eje principal de cálculo el mínimo perímetro mojado $\chi_{\text{mín}}$. Ver ecuación (89).

Conducciones de contorno abierto:

- **Sección triangular.**

- *Datos fijos:*

Sección $\Omega = \text{cte.}$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

Inclinación m

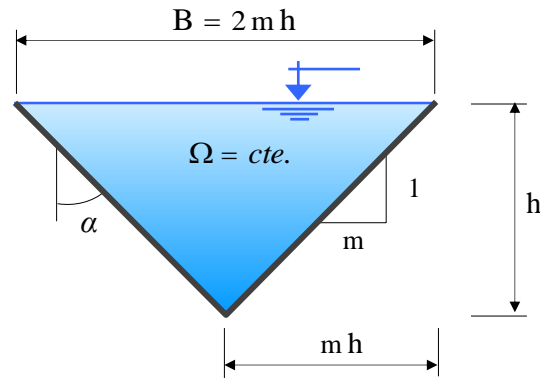


Figura 56 – Sección triangular (contorno abierto) con mínima resistencia.

$$\Omega = \frac{2 m h h}{2} = m h^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{\Omega}{m}}$$

$$\chi = 2 \sqrt{h^2 + m^2 h^2} = 2 h \sqrt{1 + m^2} = 2 \sqrt{\frac{\Omega}{m}} \sqrt{1 + m^2}$$

$$\chi = 2 \frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{m}} \sqrt{1 + m^2} = 2 \sqrt{\Omega} m^{-1/2} (1 + m^2)^{1/2}$$

$$\chi_{\text{mín}} = \text{incógnita}$$

$$\frac{d\chi}{dm} = 2\sqrt{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\right) m^{-3/2} (1+m^2)^{1/2} + 2\sqrt{\Omega} m^{-1/2} \frac{1}{2} (1+m^2)^{-1/2} 2m = 0$$

$$\frac{d\chi}{dm} = -\sqrt{\Omega} m^{-3/2} (1+m^2)^{1/2} + 2\sqrt{\Omega} m^{1/2} (1+m^2)^{-1/2} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Omega} m^{-3/2} (1+m^2)^{1/2} = 2\sqrt{\Omega} m^{1/2} (1+m^2)^{-1/2}$$

$$\therefore \frac{1}{m^{3/2} m^{1/2}} (1+m^2)^{1/2} (1+m^2)^{1/2} = \frac{1}{m^2} (1+m^2) = 2$$

$$\Rightarrow 1 = 2m^2 - m^2 = m^2$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{1} = 1 = \text{tg } \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 45^\circ$$

Condición de mínima resistencia:

$$m = 1 \quad (97)$$

O bien:

$$\frac{h}{B} = \frac{1}{2} \quad (98)$$

• **Sección rectangular.**

• *Datos fijos:*

Sección $\Omega = cte.$

• *Parámetros variables:*

Tirante h

Ancho B

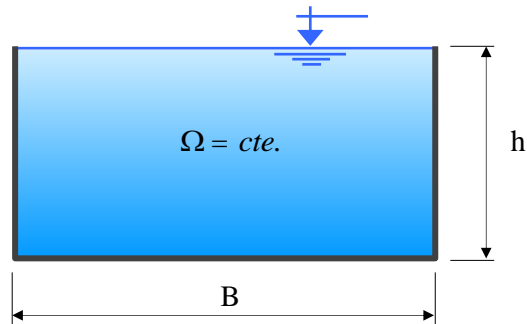


Figura 57 – Sección rectangular (contorno abierto) con mínima resistencia.

$$\Omega = B h \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\Omega}{h}$$

$$\chi = 2 h + B = 2 h + \frac{\Omega}{h}$$

$$\chi_{\text{mín}} = \text{incógnita}$$

$$\frac{d\chi}{dh} = 2 - \frac{\Omega}{h^2} = 2 - \frac{B h}{h^2} = 2 - \frac{B}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = 2 h$$

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{B} = \frac{1}{2} \quad (99)$$

- **Sección trapezoidal.**

Caso a)

- *Datos fijos:*

Sección $\Omega = cte.$

Inclinación $m = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

Ancho B_f

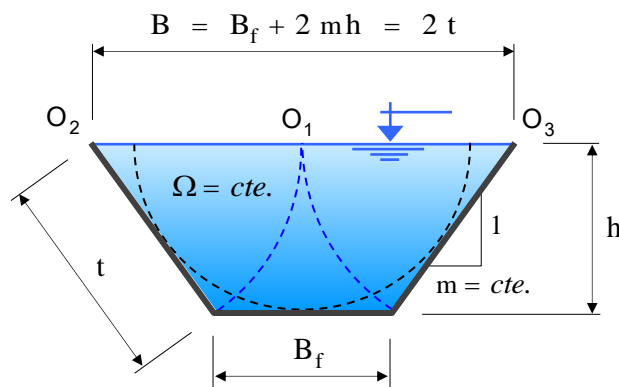


Figura 58 – Sección trapezoidal (contorno abierto y $m = cte.$) con mínima resistencia.

$$\Omega = \frac{B_f + B_f + 2 m h}{2} h = (B_f + m h) h = B_f h + m h^2$$

$$\Rightarrow B_f = \frac{\Omega}{h} - m h$$

$$\chi = B_f + 2 \sqrt{h^2 + m^2 h^2} = \frac{\Omega}{h} - m h + 2 \sqrt{1 + m^2} h$$

$$\chi_{\min} = \text{incógnita}$$

$$\frac{d\chi}{dh} = -\frac{\Omega}{h^2} - m + 2 \sqrt{1 + m^2} = 0$$

$$-\frac{B_f h + m h^2}{h^2} - m + 2 \sqrt{1 + m^2} = 0$$

$$-\frac{B_f}{h} - m - m + 2\sqrt{1+m^2} = -\frac{B_f}{h} + 2\left(-m + \sqrt{1+m^2}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{B_f}{h} = 2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right)$$

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{B_f} = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right)} \quad (100)$$

Longitud del talud t:

$$t = \sqrt{h^2 + m^2 h^2}$$

$$t = h\sqrt{1+m^2}$$

Ancho superficial B:

$$B = B_f + 2mh$$

$$B = 2h\left(\sqrt{1+m^2} - m\right) + 2mh$$

$$B = 2h\sqrt{1+m^2}$$

$$B = 2t$$

Sección circunscripta:

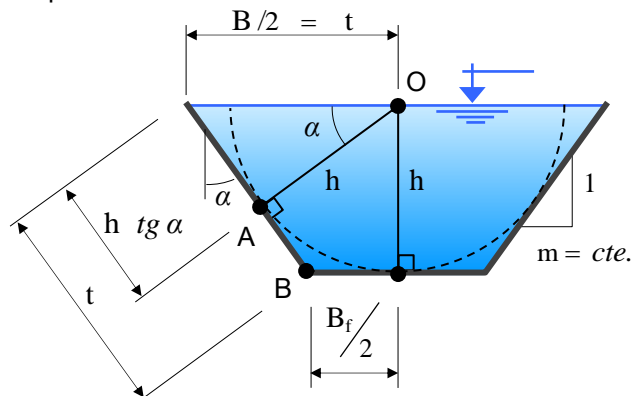


Figura 59 – Sección trapezoidal circunscripta.

$$\overline{AB} = t - h \operatorname{tg} \alpha = t - mh = \frac{B}{2} - mh$$

$$\overline{AB} = \frac{B_f + 2mh}{2} - mh$$

$$\overline{AB} = \frac{B_f}{2}$$

De este caso de mínima resistencia se sacan dos conclusiones:

- El ancho superficial es igual al doble de la longitud del talud ($B = 2t$).
- La sección trapezoidal se circunscribe en una circunferencia de radio r igual al tirante h .

Caso b)

- *Datos fijos:*

Sección $\Omega = \text{cte.}$

Tirante $h = \text{cte.}$

- *Parámetros variables:*

Inclinación m

Ancho B_f

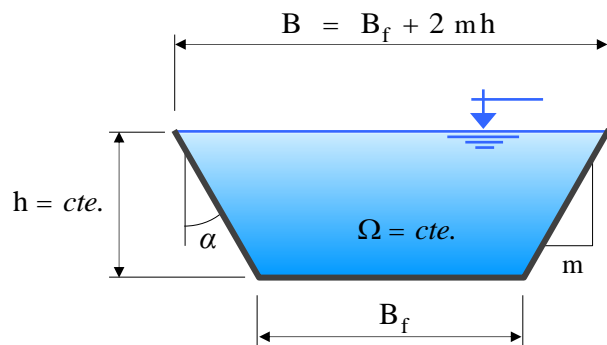


Figura 60 – Sección trapezoidal (contorno abierto y $h = \text{cte.}$) con mínima resistencia.

$$\Omega = B_f h + m h^2 \quad \Rightarrow \quad B_f = \frac{\Omega}{h} - m h$$

$$\chi = B_f + 2h \sqrt{1 + m^2} = \frac{\Omega}{h} - m h + 2 \sqrt{1 + m^2} h$$

$$\chi_{\min} = \text{incógnita}$$

$$\frac{d\chi}{dm} = -h + 2h \frac{1}{2\sqrt{1+m^2}} 2m = 0$$

$$\frac{d\chi}{dm} = h \left(-1 + \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} \right) = 0$$

$$\therefore 2m = \sqrt{1+m^2}$$

$$3m^2 = 1$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Condición de mínima resistencia:

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (101)$$

Caso c)

Corresponde a una combinación de los casos a) y b).

• *Datos fijos:*

Sección $\Omega = \text{cte.}$

Inclinación $m = \text{cte.} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ$

• *Parámetros variables:*

Tirante h

Ancho B_f

De la expresión (100) deducida en el caso a) para cualquier inclinación m, se reemplaza por el valor particular correspondiente a la tangente trigonométrica del ángulo $\alpha = 30^\circ$.

$$\frac{h}{B_f} = \frac{1}{2 \left(\sqrt{1+m^2} - m \right)} = \frac{1}{2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right]} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La sección resulta ser un semihexágono regular.

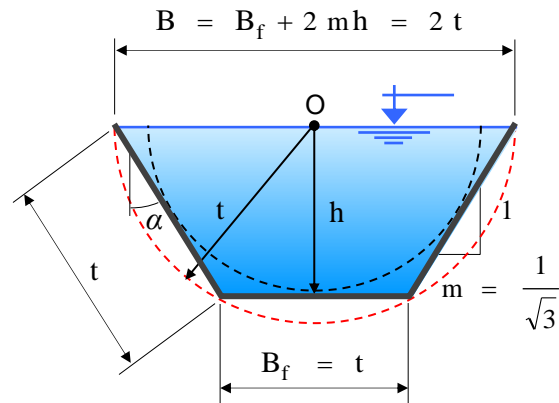


Figura 61 – Sección trapezoidal (contorno abierto y $\alpha = 30^\circ$) con mínima resistencia.

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{B_f} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (102)$$

De esta otra condición particular de mínima resistencia derivan los siguientes corolarios:

- . El ancho superficial es igual al doble de la longitud del talud ($B = 2t$).
- . La sección trapezoidal se circunscribe en una circunferencia de radio r igual al tirante h .
- . La sección trapezoidal se inscribe en una circunferencia de radio r igual al talud t .

- **Sección trapezoidal asimétrica.**

- *Datos fijos:*

Sección $\Omega = cte.$

Inclinación talud 1 $m_1 = cte.$

Inclinación talud 2 $m_2 = cte.$

Coefficiente de rugosidad de Manning:

$n_1 = cte.$ (corresponde al talud 1).

$n_2 = cte.$ (corresponde al talud 2).

$n_3 = cte.$ (corresponde a la solera).

• *Parámetros variables:*

Tirante h

Ancho B_f

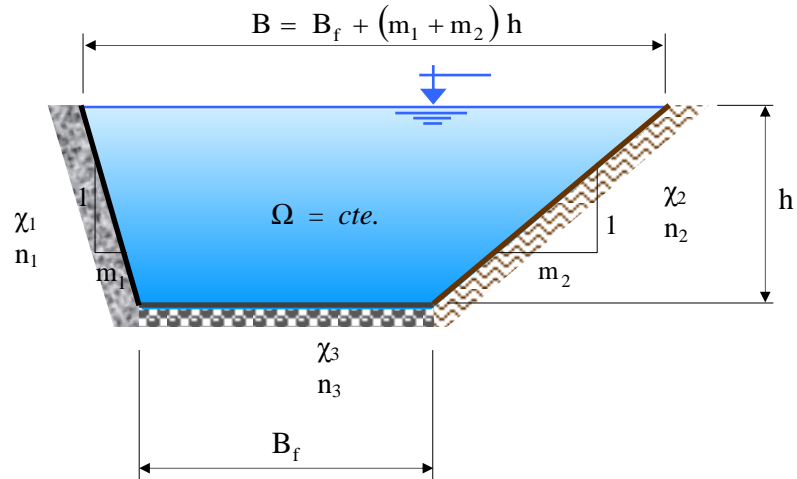


Figura 62 – Sección trapecial asimétrica con rugosidad variable.

Partiendo de la expresión de Chézy-Manning aplicada a la ecuación del caudal Q , se determina el máximo gasto calculando el mínimo valor del término que relaciona el coeficiente de rugosidad n con el perímetro mojado χ .

$$Q = U \Omega = \Omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} = \frac{1}{n} \frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} i^{1/2}$$

↓
mínimo

$$\Omega = B_f h + \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) h^2 \Rightarrow B_f = \frac{\Omega}{h} - \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) h$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \sqrt{1 + m_1^2} h \\ \chi_2 &= \sqrt{1 + m_2^2} h \\ \chi_3 &= B_f \end{aligned} \right\} \chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$$

Coefficiente de rugosidad compensado:

$$n = \left[\frac{\chi_1 n_1^{3/2} + \chi_2 n_2^{3/2} + \chi_3 n_3^{3/2}}{\chi} \right]^{2/3}$$

$$\left(n \chi^{2/3} \right)_{\text{mín}} = \text{incógnita}$$

$$n \chi^{2/3} = \left[\chi_1 n_1^{3/2} + \chi_2 n_2^{3/2} + \chi_3 n_3^{3/2} \right]^{2/3} = \text{mínimo}$$

$$n \chi^{2/3} = \left[\sqrt{1+m_1^2} h n_1^{3/2} + \sqrt{1+m_2^2} h n_2^{3/2} + B_f n_3^{3/2} \right]^{2/3}$$

$$n \chi^{2/3} = \left[\sqrt{1+m_1^2} h n_1^{3/2} + \sqrt{1+m_2^2} h n_2^{3/2} + \frac{\Omega}{h} n_3^{3/2} - \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) h n_3^{3/2} \right]^{2/3}$$

Denominando:

$$cte.1 = \sqrt{1+m_1^2} n_1^{3/2}$$

$$cte.2 = \sqrt{1+m_2^2} n_2^{3/2}$$

$$cte.3 = n_3^{3/2}$$

$$cte.4 = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) n_3^{3/2}$$

$$\frac{d}{dh} \left(n \chi^{2/3} \right) = \frac{d}{dh} \left[cte.1 h + cte.2 h + cte.3 \frac{\Omega}{h} - cte.4 h \right]^{2/3} = 0 =$$

$$= \frac{2}{3} \left[(cte.1 + cte.2 - cte.4) h + cte.3 \frac{\Omega}{h} \right]^{-1/3} \left[(cte.1 + cte.2 - cte.4) - cte.3 \frac{\Omega}{h^2} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dh} \left(n \chi^{2/3} \right) = \frac{2}{3} \frac{\left[(cte.1 + cte.2 - cte.4) - cte.3 \frac{\Omega}{h^2} \right]}{\left[(cte.1 + cte.2 - cte.4) h + cte.3 \frac{\Omega}{h} \right]^{-1/3}} = 0$$

El numerador debe ser igual a *cero*.

$$\Rightarrow (cte.1 + cte.2 - cte.4) - cte.3 \frac{\Omega}{h^2} = 0$$

$$(cte.1+cte.2-cte.4) - cte.3 \left[\frac{B_f h}{h^2} + \frac{\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) B_f h^2}{h^2} \right] = 0$$

$$(cte.1+cte.2-cte.4) - cte.3 \left[\frac{B_f}{h} + \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{B_f}{h} = \frac{(cte.1+cte.2-cte.4)}{cte.3} - \frac{m_1 + m_2}{2}$$

Invertiendo y reemplazando las constantes por su valor:

$$\frac{h}{B_f} = \left[\frac{\left(\sqrt{1+m_1^2} n_1^{3/2} + \sqrt{1+m_2^2} n_2^{3/2} - \frac{m_1 + m_2}{2} n_3^{3/2} \right)}{n_3^{3/2}} - \frac{m_1 + m_2}{2} \right]^{-1}$$

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{B_f} = \frac{1}{\sqrt{1+m_1^2} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^{3/2} + \sqrt{1+m_2^2} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{3/2} - (m_1 + m_2)} \quad (103)$$

- **Sección parabólica.**

- *Datos fijos:*

Sección $\Omega = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

Ancho B

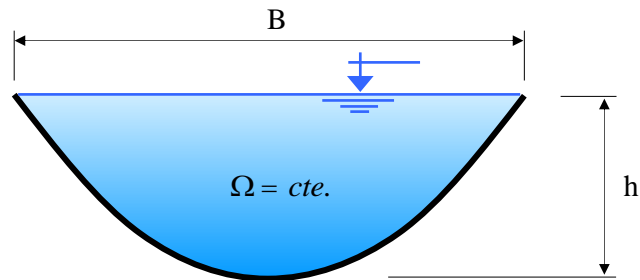


Figura 63 – Sección parabólica con mínima resistencia.

$$\Omega = \frac{2}{3} B h \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{2} \frac{\Omega}{h}$$

$$\chi = B + \frac{8 h^2}{3 B} = \left(\frac{3}{2} \frac{\Omega}{h} \right) + \frac{8 h^2}{3 \left(\frac{3}{2} \frac{\Omega}{h} \right)} = \frac{3}{2} \frac{\Omega}{h} + \frac{16 h^3}{9 \Omega}$$

$$\chi_{\min} = \text{incógnita}$$

$$\frac{d\chi}{dh} = -\frac{\frac{3}{2}\Omega}{h^2} + \frac{16 \cdot 3 h^2}{9 \Omega} = -\frac{3 \Omega}{2 h^2} + \frac{16 h^2}{3 \Omega} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3 \Omega}{2 h^2} = \frac{16 h^2}{3 \Omega}$$

$$\Rightarrow \quad 9 \Omega^2 = 32 h^4$$

$$9 \left(\frac{2}{3} B h \right)^2 = 32 h^4$$

$$\therefore B^2 = 8 h^2$$

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{B} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

(104)

- **Sección tolva.**

- *Datos fijos:*

Sección $\Omega = cte.$

Inclinación $m = cte.$

→ corresponde ángulo $\alpha = cte.$

→ corresponde ángulo $\theta = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

Radio r

Área sección tolva =

$$= \text{Área sector circular EOF} - \text{Área triángulo BOC} + 2 \text{Área triángulo ABE}$$

Por simetría: Área triángulo ABE = Área triángulo CDF. Ver Figura 64.

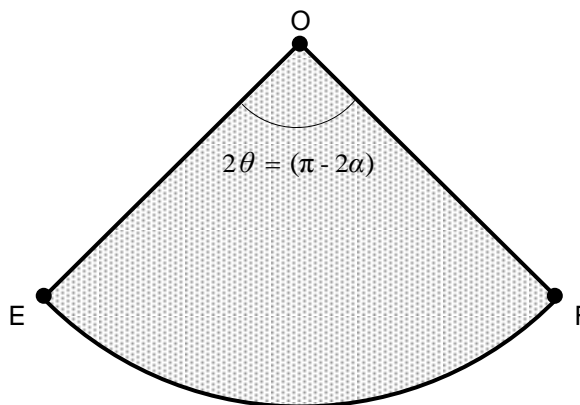
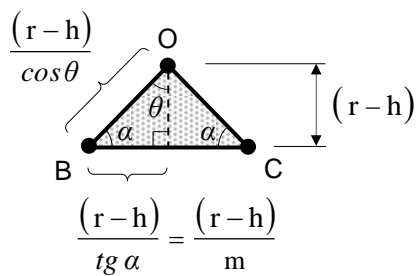
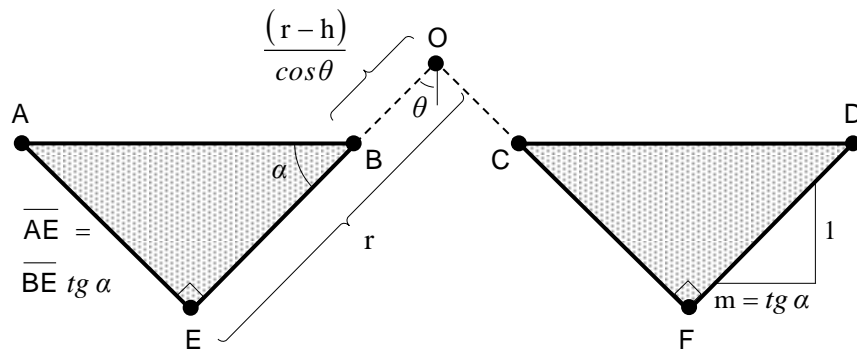
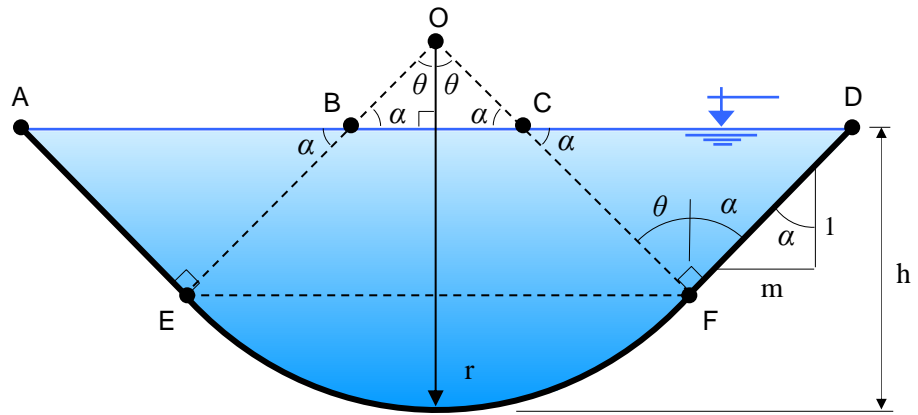


Figura 64 – Sección tolva (total y parcial).

Cálculos auxiliares:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cosen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{m^2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m$$

$$\operatorname{sec}^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta} \Rightarrow \operatorname{cos} \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$$

Área sector circular EOF.

$$\Omega_{\text{EOF}} = 2 \theta r \frac{r}{2} = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m \right) \left(\frac{r}{h} \right)^2 h^2 \quad (105)$$

Área triángulo BOC.

$$\Omega_{\text{BOC}} = 2 \frac{1}{2} \frac{(r-h)}{m} (r-h) = \frac{(r-h)^2}{m} = \frac{1}{m} \left(\frac{r}{h} - 1 \right)^2 h^2 \quad (106)$$

Área triángulos ABE + CDF = 2 Área triángulo ABE.

$$\overline{\text{BE}} = r - \frac{(r-h)}{\operatorname{cos} \theta} = r - \frac{(r-h)}{1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = r - (r-h) \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} =$$

$$\overline{\text{BE}} = \left[\left(\frac{r}{h} \right) - \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \sqrt{\frac{m^2 + 1}{m^2}} \right] h = \left[\left(\frac{r}{h} \right) - \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} \right] h$$

$$\overline{\text{AE}} = \overline{\text{BE}} m = m \left[\left(\frac{r}{h} \right) - \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} \right] h$$

$$2 \Omega_{ABE} = 2 \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{BE} = m \left[\left(\frac{r}{h} \right) - \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \right]^2 h^2 \quad (107)$$

Área total de la sección tolva.

$$\Omega = \Omega_{EOF} + 2 \Omega_{ABE} - \Omega_{BOC} \quad (108)$$

Introduciendo (105), (106) y (107) en (108):

$$\Omega = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } m \right) \left(\frac{r}{h} \right)^2 + m \left[\left(\frac{r}{h} \right) - \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \right]^2 - \frac{1}{m} \left(\frac{r}{h} - 1 \right)^2 \right\} h^2$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \Omega = & \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } m \right) \left(\frac{r}{h} \right)^2 h^2 + m \left(\frac{r}{h} \right)^2 h^2 - 2\sqrt{1+m^2} \left(\frac{r}{h} \right)^2 h^2 + \\ & + 2\sqrt{1+m^2} \left(\frac{r}{h} \right) h^2 + (1+m^2) \left(\frac{r}{h} \right)^2 h^2 - 2(1+m^2) \left(\frac{r}{h} \right) h^2 + \\ & + (1+m^2) h^2 - \frac{1}{m} \left(\frac{r}{h} \right)^2 h^2 + 2 \frac{1}{m} \left(\frac{r}{h} \right) h^2 - \frac{1}{m} h^2 \end{aligned}$$

Agrupando:

$$\Omega = \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } m \right) - 2(\sqrt{1+m^2} - m) \right] \left(\frac{r}{h} \right)^2 + 2(\sqrt{1+m^2} - m) \left(\frac{r}{h} \right) + m \right\} h^2 \quad (109)$$

Asignando una denominación particular a los siguientes conjuntos de términos constantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{cte.1} &= \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } m \right) - 2(\sqrt{1+m^2} - m) \\ \text{cte.2} &= 2(\sqrt{1+m^2} - m) \\ \text{cte.3} &= m \end{aligned} \right.$$

Reemplazando las constantes en (109):

$$\Omega = \left[cte.1 \left(\frac{r}{h} \right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h} \right) + cte.3 \right] h^2 \quad (110)$$

Perímetro mojado.

$$\chi = 2\theta r + m \left[\left(\frac{r}{h} \right) - \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \right] h$$

$$\chi = 2\theta \left(\frac{r}{h} \right) h + 2m \left(\frac{r}{h} \right) h - 2m \left(\frac{r}{h} \right) \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} h + 2m \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} h$$

$$\chi = \left[\left(2\theta + 2m - 2m \sqrt{1+m^2} \right) \left(\frac{r}{h} \right) + 2\sqrt{1+m^2} \right] h$$

$$\chi = \left\{ \left[2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m \right) - 2 \left(\sqrt{1+m^2} - m \right) \right] \left(\frac{r}{h} \right) + 2\sqrt{1+m^2} \right\} h \quad (111)$$

Denominando:

$$\left\{ \begin{array}{l} cte.4 = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m \right) - 2 \left(\sqrt{1+m^2} - m \right) \\ cte.5 = 2\sqrt{1+m^2} \end{array} \right.$$

Reemplazando las constantes 4 y 5 en (111):

$$\chi = \left[cte.4 \left(\frac{r}{h} \right) + cte.5 \right] h \quad (112)$$

Además, se cumplen las siguientes relaciones entre constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} cte.4 = 2 cte.1 + cte.2 \\ cte.5 = cte.2 + 2 cte.3 \end{array} \right. \quad (113)$$

Despejando el tirante h de la ecuación (110):

$$h = \frac{\Omega^{1/2}}{\left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3\right]^{1/2}} \quad (114)$$

Remplazando (114) en (112):

$$\chi = \left[cte.4 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.5\right] \frac{\Omega^{1/2}}{\left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3\right]^{1/2}}$$

$$\chi = \Omega^{1/2} \left[cte.4 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.5\right] \left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3\right]^{-1/2}$$

$$\chi = f\left(\frac{r}{h}\right) \quad (115)$$

Derivando la expresión (115) e igualando a cero para determinar una relación geométrica que conduzca al escurrimiento con mínima resistencia:

$$\frac{d\chi}{d\left(\frac{r}{h}\right)} = \Omega^{1/2} cte.4 \left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3\right]^{-1/2} +$$

$$+ \Omega^{1/2} \left[cte.4 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.5\right] \left(-\frac{1}{2}\right) \left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3\right]^{-3/2} = 0$$

$$\frac{d\chi}{d\left(\frac{r}{h}\right)} = \frac{\Omega^{1/2} cte.4}{\left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\Omega^{1/2} \left[cte.4 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.5\right] \left(-\frac{1}{2}\right) \left[2 cte.1 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.2\right]}{\left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3\right]^{3/2}} = 0$$

$$\frac{d\chi}{d\left(\frac{r}{h}\right)} = \Omega^{1/2} \frac{cte.4 \left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3 \right] - \left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3 \right]^{3/2}}{\left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3 \right]^{3/2}} - \frac{1}{2} \left[cte.4 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.5 \right] \left[2 cte.1 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.2 \right] = 0 \tag{116}$$

La ecuación también se satisface cuando solo el numerador es igual a cero.

$$cte.4 \left[cte.1 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + cte.2 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.3 \right] - \frac{1}{2} \left[cte.4 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.5 \right] \left[2 cte.1 \left(\frac{r}{h}\right) + cte.2 \right] = 0$$

Desarrollando y eliminando términos iguales con distinto signo:

$$\left[2 cte.2 cte.4 - cte.2 cte.4 - 2 cte.1 cte.5 \right] \left(\frac{r}{h}\right) + 2 cte.3 cte.4 - cte.2 cte.5 = 0$$

Despejando:

$$\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{cte.2 cte.5 - 2 cte.3 cte.4}{cte.2 cte.4 - 2 cte.1 cte.5} \tag{117}$$

Reemplazando las constantes de (113) en (117):

$$\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{cte.2 (cte.2 + 2 cte.3) - 2 cte.3 (2 cte.1 + cte.2)}{cte.2 (2 cte.1 + cte.2) - 2 cte.1 (cte.2 + 2 cte.3)}$$

$$\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{cte.2^2 - 4 cte.1 cte.3}{cte.2^2 - 4 cte.1 cte.3} = 1 \quad \Rightarrow \quad h = r$$

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{r} = 1$$

(118)

- **Sección "U".**

- *Datos fijos:*

Sección $\Omega = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

Radio r

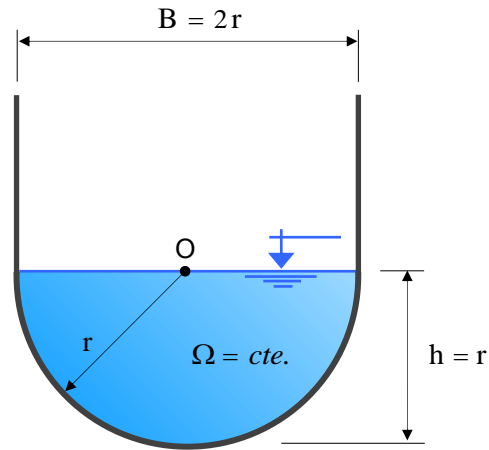


Figura 65 – Sección "U" con mínima resistencia.

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{r} = 1 \tag{119}$$

6.3.2. Cálculo con criterio de máximo caudal.

Cuando se trata de escurrimientos a superficie libre, donde el fluido circula por conductos de contorno cerrado, se determinan las relaciones entre el tirante h y las longitudes características de cada sección que conducen al cálculo del máximo caudal utilizando directamente la ecuación (120) originada en la fórmula de Chézy-Manning.

$$Q = \frac{\Omega^{5/3} i^{1/2}}{n \chi^{2/3}} \tag{120}$$

Se advierte que el máximo caudal Q no se produce cuando la sección se encuentra prácticamente colmada, ya que como se aprecia desde la *Figura 66* en las adyacencias del sector superior, ante un pequeño aumento Δh del tirante h , el cual implica una mayor sección y circulación de gasto, simultáneamente se produce un significativo incremento del perímetro mojado que actúa de freno en el escurrimiento.

De estas dos acciones concurrentes, en ese nivel, prevalece la correspondiente al retardo de la corriente, de allí que en cada caso particular de los distintos tipos de secciones usualmente utilizadas en la práctica, el caudal máximo se produce en general con un tirante relativamente menor a la altura a del conducto de contorno cerrado en cuestión.

A partir de la expresión (120) se deduce que para una misma pendiente $i = cte.$ y un mismo material $n = cte.$, el caudal Q es función de la relación entre la sección Ω elevada a la $5/3$ y el perímetro mojado elevado a la $2/3$.

$$Q \propto \frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} \quad (121)$$

Interpretando matemáticamente el hecho físico anteriormente descrito, se puede afirmar que el término χ en el denominador de la expresión (121) predomina sobre el del numerador, causando la disminución del caudal Q ante el aumento Δh del tirante h .

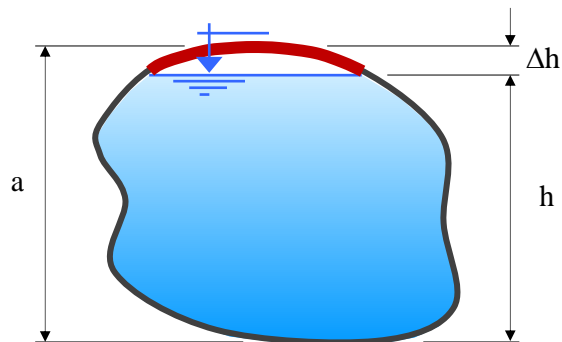


Figura 66 – Máximo caudal en sección de contorno cerrado.

Queda bien diferenciado este procedimiento respecto al utilizado en conductos de contorno abierto, donde las relaciones geométricas que corresponden al máximo caudal se calculan indirectamente minimizando el perímetro mojado, lugar este donde se ocasiona la resistencia por fricción entre el líquido y el sólido.

- **Sección triangular.**

- *Datos fijos:*

Altura $a = cte.$

Inclinación $m = cte.$

Pendiente longitudinal $i = cte.$

Coefficiente de rugosidad $n = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

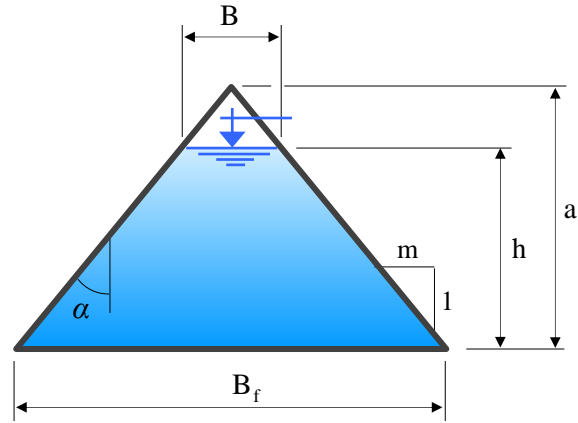


Figura 67 – Sección triangular (contorno cerrado) con máximo caudal.

Área:

$$\Omega = (B_f + B) \frac{h}{2} = (B_f + B_f - 2mh) \frac{h}{2} = \left(\frac{B_f}{h} - m \right) h^2 =$$

$$\Omega = \left(2m \frac{a}{h} - m \right) h^2 = m \left(2 \frac{a}{h} - 1 \right) h^2$$

Perímetro mojado:

$$\chi = \left(B_f + 2\sqrt{h^2 + m^2 h^2} \right) = \left(\frac{B_f}{h} + 2\sqrt{1+m^2} \right) h =$$

$$\chi = 2 \left(m \frac{a}{h} + \sqrt{1+m^2} \right) h$$

Gasto o caudal:

$$Q = \frac{\Omega^{5/3} i^{1/2}}{n \chi^{2/3}} = \frac{i^{1/2}}{n} \frac{\left[m \left(2 \frac{a}{h} - 1 \right) h^2 \right]^{5/3}}{\left[2 \left(m \frac{a}{h} + \sqrt{1+m^2} \right) h \right]^{2/3}} =$$

$$Q = \frac{i^{1/2}}{n} h^{8/3} \frac{a^{8/3} m^{5/3} \left[\frac{2}{(h/a)} - 1 \right]^{5/3}}{2^{2/3} \left[\frac{m}{(h/a)} + \sqrt{1+m^2} \right]^{2/3}}$$

Si:

$$cte.1 = \frac{i^{1/2} a^{8/3} m^{5/3}}{2^{2/3} n} \Rightarrow$$

$$Q = cte.1 \left(\frac{h}{a}\right)^{8/3} \frac{\left[\frac{2}{\left(\frac{h}{a}\right)} - 1\right]^{5/3}}{\left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{2/3}} =$$

$$Q = cte.1 \frac{\left\{\left[\left(\frac{h}{a}\right)^{8/3}\right]^{3/5} \left[\frac{2}{\left(\frac{h}{a}\right)} - 1\right]\right\}^{5/3}}{\left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{2/3}} =$$

$$Q = cte.1 \frac{\left[2\left(\frac{h}{a}\right)^{3/5} - \left(\frac{h}{a}\right)^{8/5}\right]^{5/3}}{\left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{2/3}}$$

$Q_{\text{máx}}$ = incógnita → derivando respecto a (h/a) e igualando a cero:

$$\frac{dQ}{d(h/a)} = cte.1 \frac{\frac{1}{3} \left[2\left(\frac{h}{a}\right)^{3/5} - \left(\frac{h}{a}\right)^{8/5}\right]^{2/3} \left[\frac{6}{\left(\frac{h}{a}\right)^{2/5}} - 8\left(\frac{h}{a}\right)^{3/5}\right] \left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{2/3} - \left[2\left(\frac{h}{a}\right)^{3/5} - \left(\frac{h}{a}\right)^{8/5}\right]^{5/3} \left(-\frac{2}{3}m\right) \frac{1}{\left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{1/3} \left(\frac{h}{a}\right)^2}}{\left\{\left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{2/3}\right\}^2} = 0$$

Haciendo solo el numerador igual a cero, también satisface $\frac{dQ}{d(h/a)} = 0$

Condición de máximo caudal:

$$\begin{aligned} &\left[2\left(\frac{h}{a}\right)^{3/5} - \left(\frac{h}{a}\right)^{8/5}\right]^{2/3} \left[\frac{6}{\left(\frac{h}{a}\right)^{2/5}} - 8\left(\frac{h}{a}\right)^{3/5}\right] \left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{2/3} + \\ &+ 2 \frac{\left[2\left(\frac{h}{a}\right)^{3/5} - \left(\frac{h}{a}\right)^{8/5}\right]^{5/3}}{\left[\frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)} + \sqrt{1+m^2}\right]^{1/3}} \frac{m}{\left(\frac{h}{a}\right)^2} = 0 \end{aligned}$$

(122)

El proyectista especifica la inclinación m y la condición de máximo caudal representada por la fórmula (122) se transforma en una ecuación resoluble de una sola incógnita que define una única relación h/a . Ver *Tabla 12*.

Tabla 12 Relaciones de máximo caudal en secciones triangulares.

INCLINACIÓN m	RELACIÓN h/a
1/10	0,784
1/5	0,808
1/4	0,818
1/3	0,831
1/2	0,849
1	0,876
2	0,889
3	0,893
4	0,894
5	0,895
10	0,895

- **Sección rectangular.**

- *Datos fijos:*

Altura $a = cte.$

Ancho $B = cte.$

Pendiente longitudinal $i = cte.$

Coefficiente de rugosidad $n = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

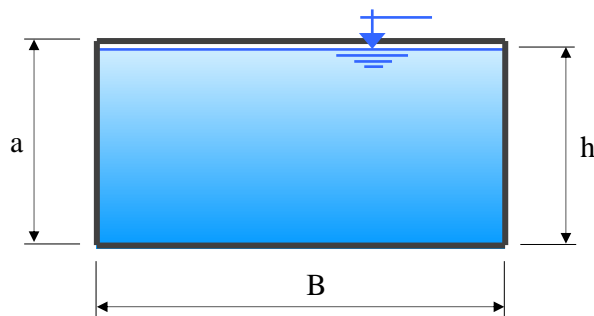


Figura 68 – Sección rectangular con máximo caudal.

Condición de mínima resistencia:

$$\frac{h}{B} = \frac{1}{2} \quad (123)$$

Condición de máximo caudal:

$$\frac{h}{a} = 1 \quad (124)$$

- **Sección trapecial.**

- *Datos fijos:*

Altura $a = cte.$

Inclinación $m = cte.$

Relación $a/B_f = cte.$

Pendiente longitudinal $i = cte.$

Coefficiente de rugosidad $n = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h

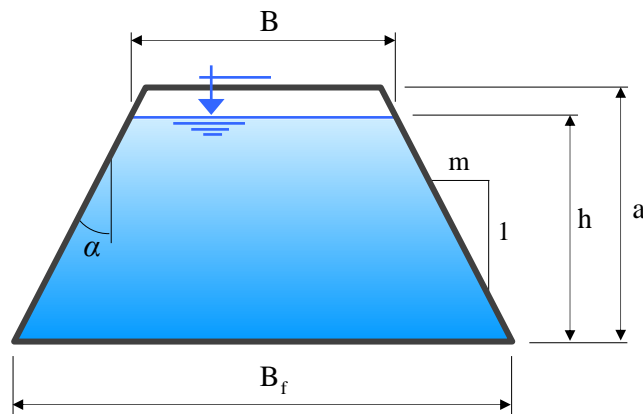


Figura 69 – Sección trapecial (contorno cerrado) con máximo caudal.

Ancho de fondo:

$$B_f = \frac{h}{\left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{a}{B_f}\right)}$$

Área:

$$\Omega = B_f h - m h^2 = h^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{a}{B_f}\right)} - m \right]$$

Perímetro mojado:

$$\chi = B_f + 2h\sqrt{1+m^2} = h \left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]$$

Gasto o caudal:

$$Q = \frac{\Omega^{5/3} i^{1/2}}{n \chi^{2/3}} = \frac{i^{1/2}}{n} h^{8/3} \frac{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} - m \right]^{5/3}}{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3}} =$$

$$Q = \frac{i^{1/2}}{n} B_f^{8/3} (a/B_f)^{8/3} (h/a)^{8/3} \frac{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} - m \right]^{5/3}}{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3}} =$$

Si:

$$cte.1 = \frac{i^{1/2}}{n} B_f^{8/3} (a/B_f)^{8/3} \Rightarrow$$

$$Q = cte.1 (h/a)^{8/3} \frac{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} - m \right]^{5/3}}{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3}} =$$

$$Q = cte.1 \frac{\left[\frac{(h/a)^{3/5}}{(a/B_f)} - m(h/a)^{8/5} \right]^{5/3}}{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3}}$$

Q_{\max} = incógnita → derivando respecto a (h/a) e igualando a cero:

$$\frac{dQ}{d(h/a)} = \frac{\frac{5}{3} cte.1 \left[\frac{(h/a)^{3/5}}{(a/B_f)} - m(h/a)^{8/5} \right]^{2/3} \left[\frac{3}{5} \frac{(h/a)^{-2/5}}{(a/B_f)} - \frac{8}{5} m(h/a)^{3/5} \right]}{\left\{ \left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3} \right\}^2}$$

$$\cdot \frac{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3} - cte.1 \left[\frac{(h/a)^{3/5}}{(a/B_f)} - m(h/a)^{8/5} \right]^{5/3}}{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3} - cte.1 \left[\frac{(h/a)^{3/5}}{(a/B_f)} - m(h/a)^{8/5} \right]^{5/3}}$$

$$\cdot \frac{2}{3} \left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{-1/3} \left[(-1) \frac{1}{(a/B_f)} (h/a)^{-2} \right] = 0$$

Igualando el numerador a cero, se obtiene la condición de máximo caudal:

$$\left[\frac{(h/a)^{3/5}}{(a/B_f)} - m(h/a)^{8/5} \right]^{2/3} \left[\frac{3(h/a)^{-2/5}}{(a/B_f)} - 8m(h/a)^{3/5} \right]$$

$$\cdot \left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{2/3} + 2 \left[\frac{(h/a)^{3/5}}{(a/B_f)} - m(h/a)^{8/5} \right]^{5/3}$$

$$\cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{(h/a)(a/B_f)} + 2\sqrt{1+m^2} \right]^{1/3}} \frac{1}{(h/a)^2 (a/B_f)} = 0$$

(125)

Fijando criteriosamente los valores de la inclinación m y la relación a/B_f , la ecuación (125) permite determinar la proporción h/a que define el máximo caudal $Q_{\text{máx}}$ de escurrimiento.

• **Sección circular.**

• **Datos fijos:**

Diámetro $D = cte.$ (o radio $r = cte.$)

Pendiente longitudinal $i = cte.$

Coefficiente de rugosidad $n = cte.$

• **Parámetros variables:**

Tirante h (o ángulo θ).

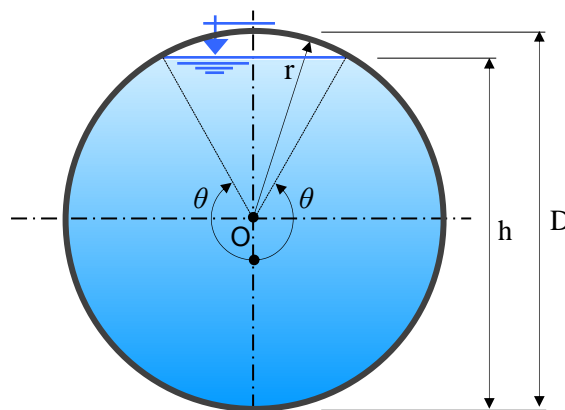


Figura 70 – Sección circular con máximo caudal.

Área:

$$\Omega = \frac{(2\theta) r r}{2} - 2 \frac{r \operatorname{sen} \theta r \cos \theta}{2} = \frac{r^2}{2} (2\theta) - \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} (2\theta) =$$

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 (2\theta) \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right]$$

Perímetro mojado:

$$\chi = r (2\theta)$$

Radio hidráulico:

$$R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{1}{2} r \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right]$$

Gasto o caudal:

$$Q = \frac{\Omega}{n} R^{2/3} i^{1/2} = \frac{i^{1/2}}{n} \frac{1}{2} r^2 (2\theta) \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right] \left\{ \frac{1}{2} r \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right] \right\}^{2/3} =$$

$$Q = \frac{i^{1/2}}{n} r (2\theta) \left\{ \frac{1}{2} r \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right] \right\}^{5/3} = \frac{i^{1/2} r^{8/3}}{2^{5/3} n} (2\theta) \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right]^{5/3}$$

Si:

$$cte.1 = \frac{i^{1/2} r^{8/3}}{2^{5/3} n} \Rightarrow$$

$$Q = cte.1 (2\theta) \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right]^{5/3}$$

Q_{\max} = incógnita \rightarrow derivando respecto a θ e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\theta} &= 2 cte.1 \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right]^{5/3} + \\ &+ \frac{5}{3} \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right]^{2/3} \left[\frac{-\cos (2\theta) (2\theta) + \operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)^2} \right] 2 cte.1 (2\theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} \left[1 - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)} \right] = \cos (2\theta) - \frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{(2\theta)}$$

$$\therefore \frac{3}{5} \left[1 - \frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)} \right] + \frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)} - \cos(2\theta) = 0$$

Resulta una ecuación con una sola incógnita, la cual puede resolverse, por ejemplo, utilizando el método de aproximaciones sucesivas. Así se obtiene:

$$\theta = 151^\circ 12' 23'',9$$

La relación entre el tirante h y el ángulo θ es:

$$h = r (1 - \cos \theta)$$

Finalmente la relación tirante-diámetro que verifica la condición de máximo caudal resulta:

$$\frac{h}{D} = 0,9382 \cong 0,94 \tag{126}$$

Así, para un tirante h próximo a $0,94 D$, se produce el caudal máximo $Q_{\text{máx}}$ que resulta aproximadamente un 8% superior al caudal que escurre con la sección llena Q_{llena} . Ver *Figura 71*.

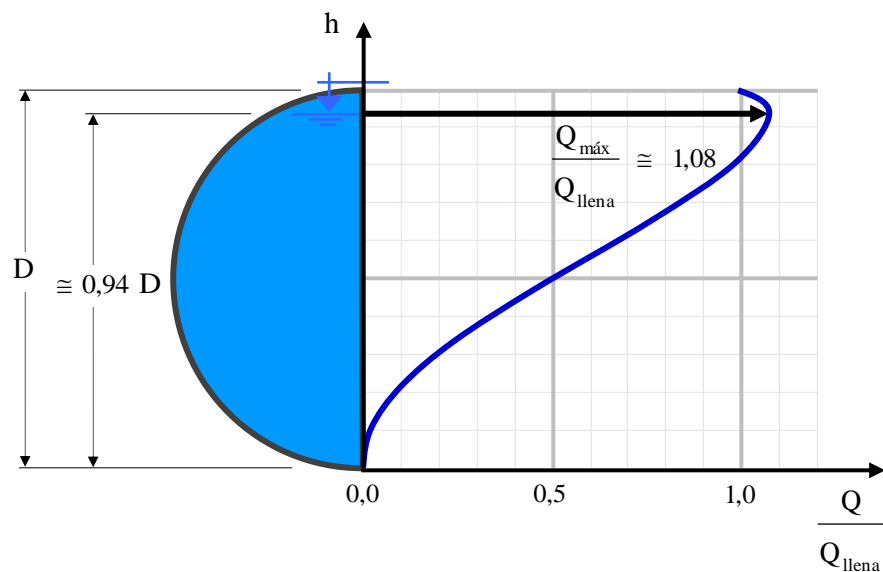


Figura 71 – Distribución del caudal en una sección circular.

La masiva utilización de conductos de contorno cerrado circulares en los escurrimientos a superficie libre, producto de la industrialización de tuberías prefabricadas, induce a un estudio más profundo de los mismos, pudiendo también interesar al proyectista la variación de la velocidad media, y en particular su valor máximo y el tirante que lo ocasiona.

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} = \frac{i^{1/2}}{n} \left\{ \frac{1}{2} r \left[1 - \frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)} \right] \right\}^{2/3} = \frac{i^{1/2}}{n} \left(\frac{r}{2} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)} \right]^{2/3}$$

Si:

$$cte.2 = \frac{i^{1/2}}{n} \left(\frac{r}{2} \right)^{2/3} \Rightarrow$$

$$U = cte.2 \left[1 - \frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)} \right]^{2/3}$$

$U_{\text{máx}}$ = incógnita → derivando respecto a θ e igualando a cero:

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{2}{3} \frac{cte.2}{\left[1 - \frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)} \right]^{1/3}} \left[\frac{-\cos(2\theta)(2\theta) + \text{sen}(2\theta)}{(2\theta)^2} \right] = 0$$

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{4}{3} cte.2 \frac{\left[\frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)^2} - \frac{\cos(2\theta)}{(2\theta)} \right]}{\left[1 - \frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)} \right]^{1/3}} = 0$$

Para que $\frac{dU}{d\theta} = 0$ solo basta que el numerador sea nulo.

$$\frac{\text{sen}(2\theta)}{(2\theta)^2} - \frac{\cos(2\theta)}{(2\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = (2\theta)$$

$$\text{tg}(2\theta) = (2\theta) \quad (127)$$

La (127) es una ecuación trascendente que se verifica si:

$$\theta = 151^\circ 12' 23'',9$$

La relación tirante-diámetro que verifica la condición de máxima velocidad media concluye en:

$$\frac{h}{D} = 0,8128 \cong 0,81 \quad (128)$$

Entonces, para un tirante h del orden de $0,81 D$, se produce la velocidad media máxima $U_{\text{máx}}$ la cual deriva en un valor próximo a un 14% por encima a la velocidad media correspondiente a la sección llena U_{llena} . Ver *Figura 72*.

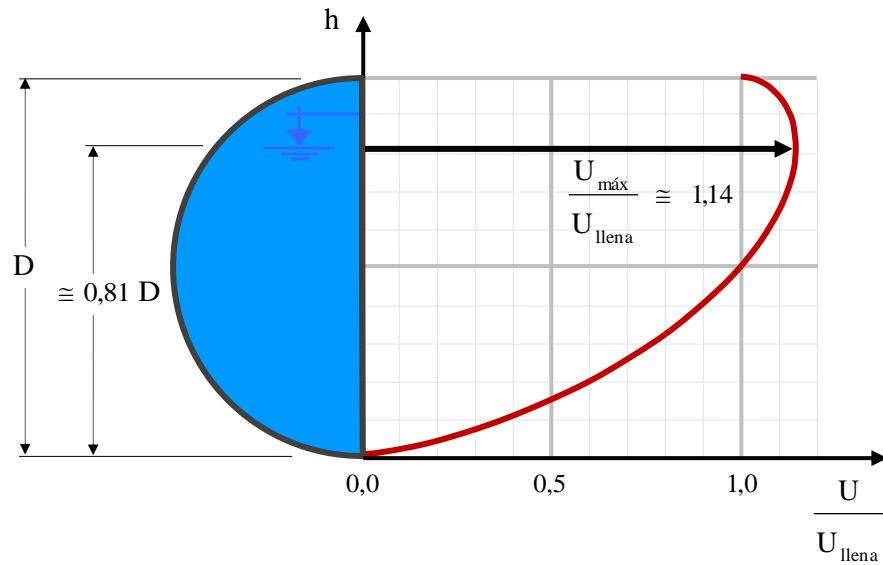


Figura 72 – Distribución de la velocidad media en una sección circular.

• **Sección bóveda semicircular.**

• *Datos fijos:*

Radio $r = cte.$

Relación $a/r = cte.$ (o $a/B_f = cte.$).

Pendiente longitudinal $i = cte.$

Coefficiente de rugosidad $n = cte.$

• *Parámetros variables:*

Tirante h (o ángulo θ).

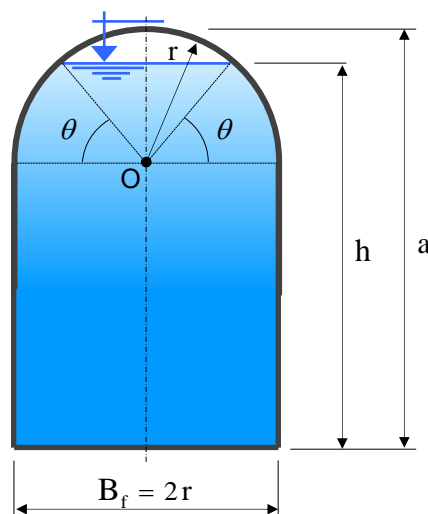


Figura 73 – Sección bóveda semicircular con máximo caudal.

Área:

$$\Omega = r^2 \left[2 \left(\frac{a}{r} - 1 \right) + \theta + \text{sen } \theta \text{ cos } \theta \right]$$

Perímetro mojado:

$$\chi = 2 r \left(\frac{a}{r} + \theta \right)$$

Gasto o caudal:

$$Q = \frac{i^{1/2} \Omega^{5/3}}{n \chi^{2/3}} = \frac{i^{1/2} \left\{ r^2 \left[2 \left(\frac{a}{r} - 1 \right) + \theta + \text{sen } \theta \text{ cos } \theta \right] \right\}^{5/3}}{n \left\{ 2 r \left(\frac{a}{r} + \theta \right) \right\}^{2/3}} =$$

$$Q = \frac{i^{1/2} r^{8/3}}{n 2^{2/3}} \frac{\left[2 \left(\frac{a}{r} - 1 \right) + \theta + \text{sen } \theta \text{ cos } \theta \right]^{5/3}}{\left(\frac{a}{r} + \theta \right)^{2/3}} =$$

Si:

$$cte.1 = \frac{i^{1/2} r^{8/3}}{2^{2/3} n} \quad \text{y} \quad cte.2 = 2 \left(\frac{a}{r} - 1 \right) = 2 \left(\frac{2a}{B_f} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$Q = cte.1 \frac{(cte.2 + \theta + \text{sen } \theta \text{ cos } \theta)^{5/3}}{\left(\frac{a}{r} + \theta \right)^{2/3}}$$

$Q_{\text{máx}}$ = incógnita \rightarrow derivando respecto al ángulo θ e igualando a cero:

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{cte.1 \frac{5}{3} (cte.2 + \theta + \text{sen } \theta \text{ cos } \theta)^{2/3} (1 + \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \left(\frac{a}{r} + \theta \right)^{2/3}}{\left[\left(\frac{a}{r} + \theta \right)^{2/3} \right]^2} - \frac{cte.1 (cte.2 + \theta + \text{sen } \theta \text{ cos } \theta)^{5/3} \frac{2}{3} \left(\frac{a}{r} + \theta \right)^{-1/3}}{\quad} = 0$$

Igualando solo el numerador a cero y posteriormente eliminando la *cte.1*:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} (cte.2 + \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{2/3} (1 + \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \left(\frac{a}{r} + \theta \right)^{2/3} &= \\ &= (cte.2 + \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{5/3} \frac{2}{3} \frac{1}{\left(\frac{2a}{2r} + \theta \right)^{1/3}} \end{aligned}$$

Dividiendo por $(cte.2 + \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{5/3}$ y reordenando:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}{\left[2 \left(\frac{2a}{B_f} - 1 \right) + \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right]} \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{B_f} + \theta \right) &= 1 \quad \Rightarrow \\ \frac{5}{2} \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}{\left[2 \left(\frac{2a}{B_f} - 1 \right) + \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right]} \left(\frac{2a}{B_f} + \theta \right) - 1 &= 0 \quad (129) \end{aligned}$$

Sabiendo que la relación a/B_f es un dato fijo del problema, con la ecuación (129) se obtiene directamente el ángulo θ que cumple con la condición de máximo caudal.

La relación entre el tirante h y la altura a resulta ser:

$$\begin{aligned} \frac{h}{a} &= \frac{a - (r - r \operatorname{sen} \theta)}{a} = 1 - \frac{r (1 - \operatorname{sen} \theta)}{a} = 1 - \frac{2r (1 - \operatorname{sen} \theta)}{2a} \\ \frac{h}{a} &= 1 - \frac{B_f (1 - \operatorname{sen} \theta)}{2a} \end{aligned}$$

Condición de máximo caudal:

$$\frac{h}{a} = 1 - \frac{(1 - \operatorname{sen} \theta)}{2 (a/B_f)} \quad (130)$$

- **Sección modelo.**

- *Datos fijos:*

Radio $r = cte.$

Pendiente longitudinal $i = cte.$

Coefficiente de rugosidad $n = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h (o ángulo θ).

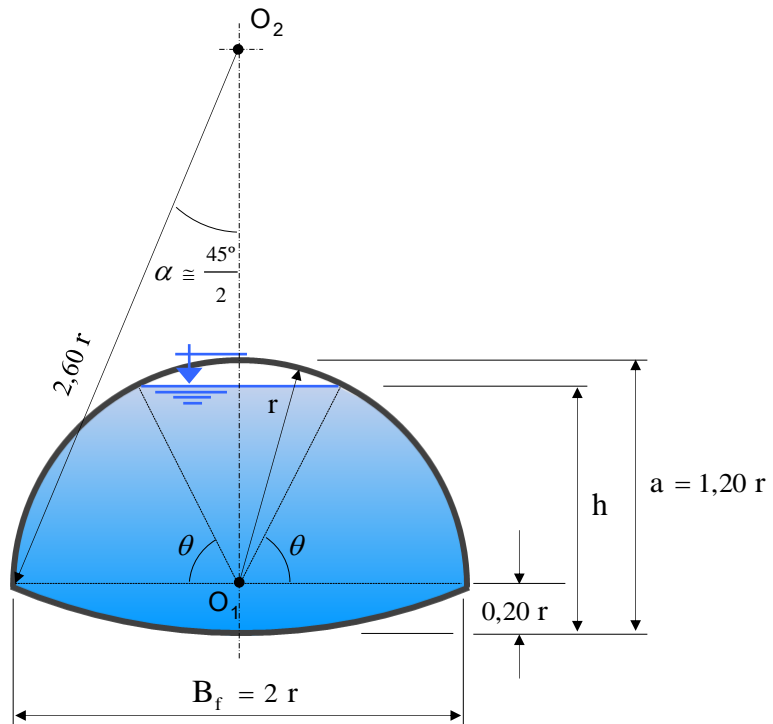


Figura 74 – Sección modelo con máximo caudal.

Área:

$$\Omega = r^2 (0,2688 + \theta + \text{sen } \theta \cos \theta)$$

Perímetro mojado:

$$\chi = r (2,0529 + 2 \theta)$$

Gasto o caudal:

$$Q = \frac{i^{1/2}}{n} \frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} = \frac{i^{1/2}}{n} r^{8/3} \frac{(0,2688 + \theta + \text{sen } \theta \cos \theta)^{5/3}}{(2,0529 + 2 \theta)^{2/3}}$$

$Q_{\text{máx}}$ = incógnita → derivando respecto al ángulo θ e igualando a cero:

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{i^{1/2} r^{8/3}}{n} \frac{\frac{5}{3} (0,2688 + \theta + \text{sen } \theta \cos \theta)^{2/3} (1 + \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)}{[(2,0529 + 2 \theta)^{2/3}]^2} \\ \cdot \frac{(2,0529 + 2 \theta)^{2/3} - (0,2688 + \theta + \text{sen } \theta \cos \theta)^{5/3} \frac{2}{3} (2,0529 + 2 \theta)^{-1/3} \cdot 2}{3} = 0$$

Igualando solo el numerador a cero y resolviendo:

$$\frac{5}{3} (0,2688 + \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{-1} (1 + \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) (2,0529 + 2\theta) \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{4} \frac{(1 + \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) (2,0529 + 2\theta)}{(0,2688 + \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)} - 1 = 0 \quad (131)$$

El valor del ángulo θ que satisface a la ecuación (131) es:

$$\begin{cases} \theta^{\text{rad}} = 1,1532 \\ \theta^{\circ} = 66^{\circ} 04' 20'',7 \end{cases}$$

Condición de máximo caudal:

$$\frac{h}{a} = \frac{(0,20 r - r \operatorname{sen} 66^{\circ} 04' 20'',7)}{a} = \frac{r (0,20 - \operatorname{sen} 66^{\circ} 04' 20'',7)}{2 r}$$

$$\frac{h}{a} = 0,9284 \cong 0,93 \quad (132)$$

- **Sección herradura.**

- *Datos fijos:*

Radio $r = \text{cte.}$

Ángulo $\alpha = \text{cte.}$

Pendiente longitudinal $i = \text{cte.}$

Coefficiente de rugosidad $n = \text{cte.}$

- *Parámetros variables:*

Tirante h (o ángulo θ).

Área:

$$\Omega = r^2 \left[\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 4 \left(2\alpha - 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right) \right]$$

Siendo:

$$\begin{cases} \alpha^{\text{rad}} = \frac{\pi - \operatorname{arccos}(3/4)}{2} - \frac{\pi}{4} = 0,4240 \\ \alpha^{\circ} = 24^{\circ} 17' 42'',7 \end{cases}$$

Si:

$$cte.1 = 4 \left(2\alpha - 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cosa} \right) \Rightarrow$$

$$\Omega = r^2 (\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + cte.1)$$

Perímetro mojado:

$$\chi = r (2\theta + 8\alpha)$$

Si:

$$cte.2 = 8\alpha \Rightarrow$$

$$\chi = r (2\theta + cte.2)$$

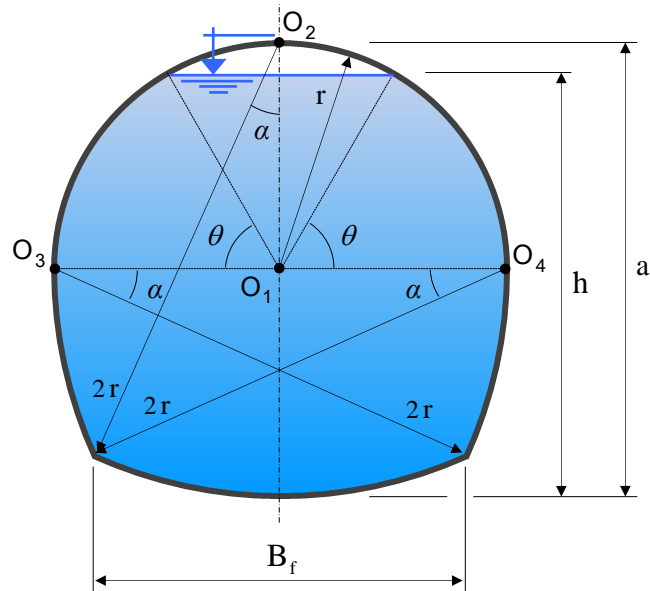


Figura 75 – Sección herradura con máximo caudal.

Gasto o caudal:

$$Q = \frac{i^{1/2}}{n} \frac{\Omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} = \frac{i^{1/2}}{n} r^{8/3} \frac{(\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + cte.1)^{5/3}}{(2\theta + cte.2)^{2/3}}$$

Si:

$$cte.3 = \frac{i^{1/2}}{n} r^{8/3} \Rightarrow$$

$$Q = cte.3 \frac{(\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + cte.1)^{5/3}}{(2\theta + cte.2)^{2/3}}$$

$Q_{\text{máx}}$ = incógnita → derivando respecto al ángulo θ e igualando a cero:

$$\frac{dQ}{d\theta} = \text{cte.3} \frac{\frac{5}{3} (\theta + \text{sen } \theta \cos \theta + \text{cte.1})^{2/3} (1 + \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) (2\theta + \text{cte.2})^{2/3} -}{[(2\theta + \text{cte.2})^{2/3}]^2} - \frac{(\theta + \text{sen } \theta \cos \theta + \text{cte.1})^{5/3} \frac{2}{3} (2\theta + \text{cte.2})^{-1/3} \cdot 2}{3} = 0$$

Igualando el numerador a cero y despejando:

$$\frac{5}{3} (\theta + \text{sen } \theta \cos \theta + \text{cte.1})^{2/3} (1 + \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) (2\theta + \text{cte.2})^{2/3} = \frac{4}{3} \frac{(\theta + \text{sen } \theta \cos \theta + \text{cte.1})^{5/3}}{(2\theta + \text{cte.2})^{1/3}}$$

$$\frac{5}{4} \frac{(1 + \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) (2\theta + \text{cte.2})}{(\theta + \text{sen } \theta \cos \theta + \text{cte.1})} - 1 = 0 \quad (133)$$

El ángulo θ que satisface a la ecuación (133) es:

$$\begin{cases} \theta^{\text{rad}} = 1,0655 \\ \theta^{\circ} = 61^{\circ} 02' 55'',2 \end{cases}$$

Condición de máximo caudal:

$$\frac{h}{a} = \frac{(r + r \text{sen } 61^{\circ} 02' 55'',2)}{a} = \frac{r (1 + \text{sen } 61^{\circ} 02' 55'',2)}{2r}$$

$$\frac{h}{a} = 0,9375 \cong 0,94 \quad (134)$$

- **Sección parabólica con fondo triangular.**

- *Datos fijos:*

Altura $a = \text{cte.}$

Relación $a/B_f = \text{cte.}$

Pendiente longitudinal $i = \text{cte.}$

Coefficiente de rugosidad $n = \text{cte.}$

- *Parámetros variables:*

Tirante h .

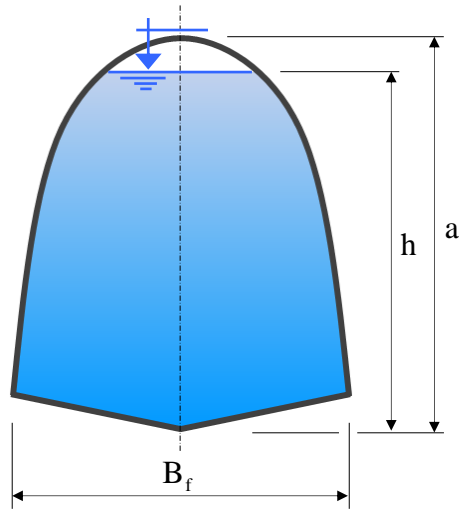


Figura 76 – Sección parabólica de fondo triangular con máximo caudal.

Condición de máximo caudal:

$$\left(\frac{110}{36}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{800}{363}\left(a/B_f\right)^2+\left[\frac{4}{121}\left(a/B_f\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-\right.$$

$$\left. -\left(\frac{640}{99}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a/B_f\right)^2\left(1-\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}-\left[\frac{43}{66}-\left(\frac{40}{90}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

$$\cdot\left[\left(\frac{11}{90}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{640}{99}\left(a/B_f\right)^2\left(1-\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

(135)

- **Sección parabólica con fondo circular.**

- *Datos fijos:*

Altura $a = cte.$

Relación $a/B_f = cte.$

Pendiente longitudinal $i = cte.$

Coefficiente de rugosidad $n = cte.$

- *Parámetros variables:*

Tirante h.

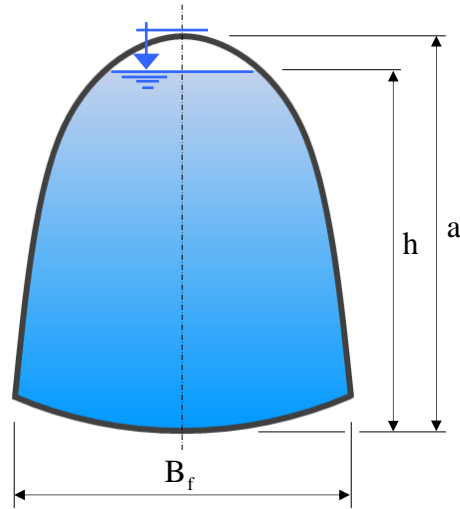


Figura 77 – Sección parabólica de fondo circular con máximo caudal.

Condición de máximo caudal:

$$\left(\frac{110}{36}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(a/B_f)} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{(a/B_f)} + \frac{800}{363} (a/B_f) + \operatorname{arcosen} \left[\frac{44 (a/B_f)}{4(a/B_f)^2 + 11^2} \right] \right\} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{22} + \frac{11}{8(a/B_f)^2} \right] - \left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(a/B_f)} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{640}{99}\right)^{\frac{1}{2}} (a/B_f) \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \left\} -$$

$$- \left\{ \frac{20}{33} \frac{1}{(a/B_f)} + \operatorname{arcosen} \left[\frac{44(a/B_f)}{4(a/B_f)^2 + 11^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{22} + \frac{11}{8(a/B_f)^2} \right]^2 -$$

$$- \left[\frac{11}{16} \frac{1}{(a/B_f)^3} - \frac{1}{44} \frac{1}{(a/B_f)} \right] - \left(\frac{44}{90}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(a/B_f)} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(a/B_f)} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{640}{99}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(a/B_f)} \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right] = 0$$

(136)

6.4. Secciones convenientes.

Desde un punto de vista estrictamente hidráulico, la sección más eficiente es la que eroga mayor caudal Q , o sea la que genera menor resistencia al avance del líquido.

Por otra parte, realizando un análisis con una perspectiva genérica, se puede afirmar que la construcción, operación y mantenimiento de canales diseñados con secciones hidráulicamente eficientes, resulta ser comúnmente más compleja y consecuentemente más onerosa que otras secciones de tipo simple.

Estos dos hechos dan lugar a la consideración del concepto de secciones convenientes, en la que se intenta encontrar equilibradamente una solución intermedia que sea técnica y económicamente viable, conciliando ambas posibilidades.

Para el siguiente análisis se parte de la *Tabla 11*, de la que se consideran en particular las siguientes secciones semicircular y trapecial, ambas de superficie unitaria. Ver *Figura 78*.

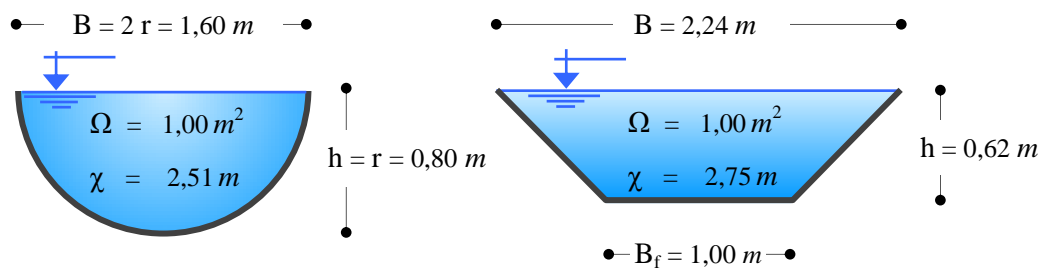


Figura 78 – Secciones unitarias semicircular y trapecial.

De los dos casos, la sección semicircular es hidráulicamente un poco más eficiente que la trapecial, ya que posee una pequeña y mayor capacidad de transporte de caudal, del orden de apenas un 6%. Si bien los caudales no son significativamente diferentes, la complejidad constructiva es en general muy superior en el caso de la sección semicircular, razón por lo cual puede resultar mucho más conveniente la ejecución del canal con sección trapecial.

En consecuencia con lo anteriormente expuesto, se define como *sección conveniente* a la sección que siendo técnicamente aceptable, resulta además la más económica, entendiéndose esto último como la de menor costo anualizado de construcción y operación.

En la elección de la sección se deben tener en cuenta las variantes intervinientes, tales como el destino del canal, topografía, urbanización, método constructivo y demás factores económicos que hacen a la conformación del costo de la obra, tales como expropiaciones, materiales, mano de obra, equipos y herramientas necesarios para su construcción.

6.5. Resguardo en el diseño de la sección.

El cauce de los canales a cielo abierto, cualquiera sea la forma de su sección transversal, se construye siempre de manera que quede un excedente sobre la sección transversal de escurrimiento que da el cálculo hidráulico, el cual se denomina resguardo o revancha, y su principal objetivo es el de absorber incrementos en el caudal, sin que se produzcan rebases y consecuentes inundaciones.

El resguardo, también llamado revancha, debe absorber los sobre caudales que se pueden producir por mal manejo de las compuertas en canales de riego por ejemplo, o bien excesos de precipitaciones por encima de las calculadas en el caso de desagües pluviales.

En efecto, si no existiera la revancha, un incremento sobre el gasto de proyecto rebasaría el canal inundando los lugares adyacentes. Más cuidado debe observarse si el canal es construido en terraplén, ya que el rebase ocasionaría la destrucción del coronamiento y por ende el colapso de toda la estructura.

El valor de la revancha queda entonces librada al buen criterio del proyectista, quien deberá tomar en cuenta las causas apuntadas u otras que pudieran presentarse.

Por lo general se adopta para:

- Canales pequeños: $r_e = 0,10$ a $0,40$ m.
- Canales grandes: $r_e = 0,50$ a $1,00$ m.

Algunos autores recomiendan prever una revancha igual al 25% del tirante hidráulico de cálculo ($r_e = 0,25 h$). Más lógico es asumir la longitud del resguardo en función del caudal $r_e = f(Q)$, considerando de acuerdo al tipo de canal, el sobrecaudal respectivo.

Es racional considerar mayores valores de resguardos en canales construidos en terraplén que sobre desmonte. Un desborde en el primero de los casos ocasionaría el desmoronamiento del canal.

Mayores precauciones se deben tener si el escurrimiento se produce en régimen veloz, ya que se pueden generar ondas por sobre el tirante hidráulico proyectado.

Igual consideración se debe prever si se está en presencia de un canal con un tramo curvo horizontalmente. Sobre uno de los laterales va a haber una sobreelevación como consecuencia de la acción producida por la aceleración centrífuga.

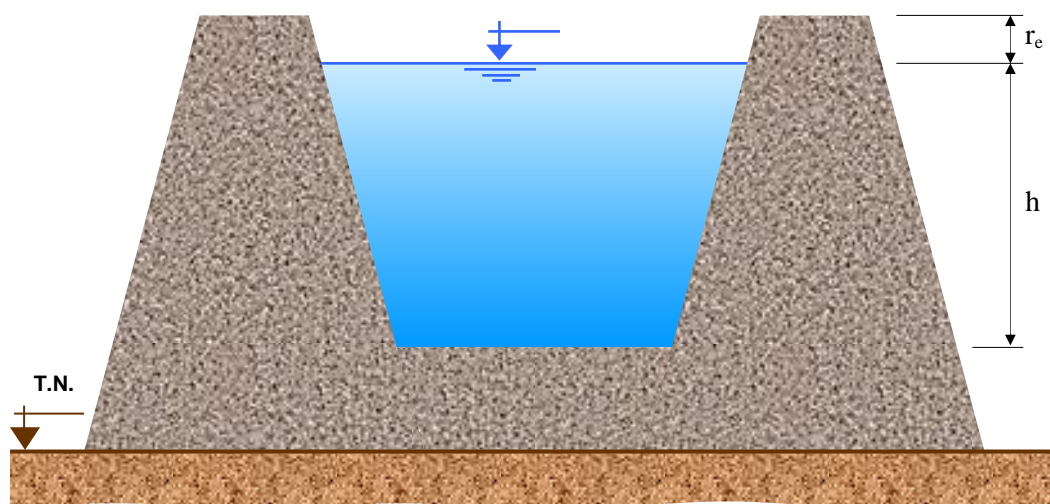


Figura 79 – Resguardo de un canal construido sobre terraplén.

7. ENERGÍA PROPIA EN ESCURRIMIENTOS CON MOVIMIENTO UNIFORME.

La energía propia, también conocida como energía específica, es un concepto ideado y desarrollado en su tesis por el ingeniero ruso Boris Bakhmeteff (1880 - 1951), alcanzando una singular trascendencia y utilidad en la resolución de los perfiles longitudinales correspondientes a los movimientos gradualmente variados.

De los 3 términos de energía que contempla y componen la ecuación de Bernoulli aplicada a un escurrimiento a superficie libre, la energía propia o específica considera solamente las energías por unidad de peso de presión y velocidad. Así se tiene:

$$z + \underbrace{h + \alpha \frac{U^2}{2g}}_{\downarrow} \\ H$$

Siendo:

- z energía por unidad de peso de posición.
- $h = \frac{P}{\gamma}$ energía por unidad de peso de presión.
- $\alpha \frac{U^2}{2g}$ energía por unidad de peso de velocidad.
- H energía por unidad de peso propia o específica.

De este modo, se define a la energía propia o específica en una sección determinada como la energía total referida a un plano de comparación que pasa por el fondo o solera del canal. Es decir que en esta consideración $z = 0$, por lo que la energía propia resulta:

$$H = h + \frac{U^2}{2g} \tag{137}$$

En (137) se desprecian los efectos de no uniformidad del diagrama de velocidades, ya que al tratarse de la circulación de agua, naturalmente de muy baja viscosidad cinemática, la misma se traduce en un escurrimiento bajo régimen turbulento, por lo cual el coeficiente de Coriolis se asimila a $\alpha = 1$ sin mucho error.

Su denominación propia o específica se refiere a la energía dentro de su masa. Deriva de los términos energéticos utilizados, ya que ambos involucran propiedades físicas intrínsecas dentro de la masa tales como la presión y la velocidad, descartando el término z que solo tiene en cuenta su posición.

7.1. Energía propia en función del tirante.

En la *Figura 80* se muestra un escurrimiento a superficie libre con movimiento uniforme y permanente, en la que se analizan dos secciones separadas por una distancia Δl_{1-2} .

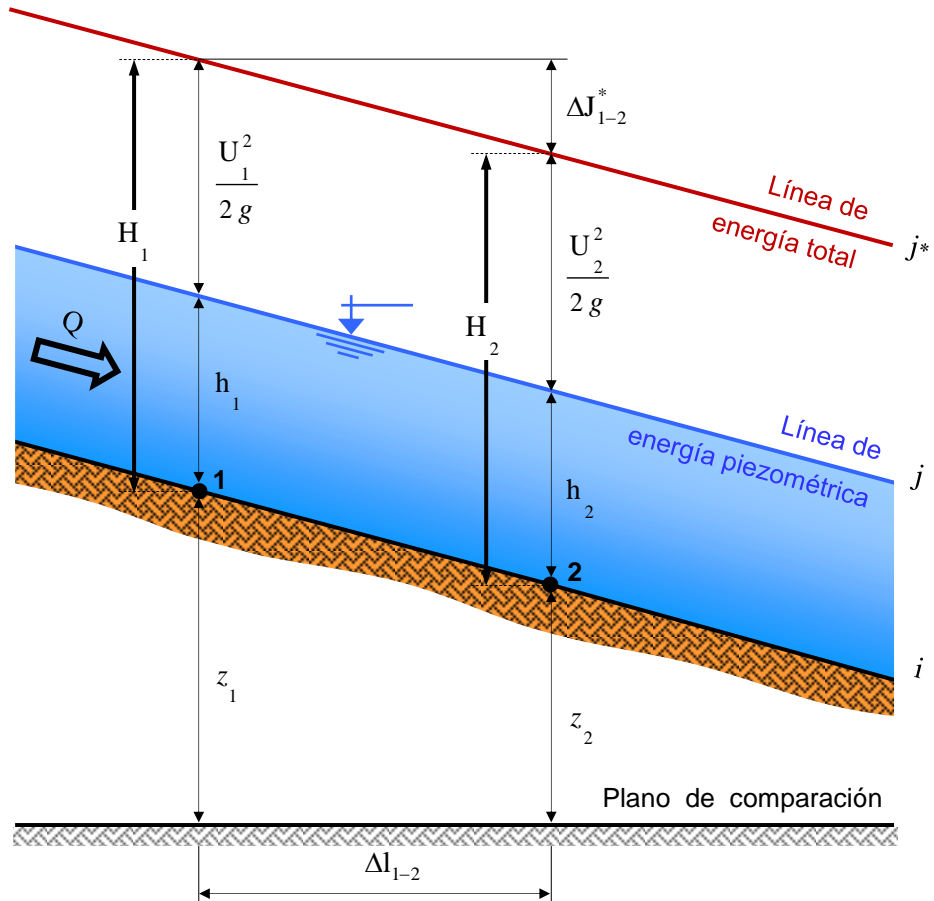


Figura 80 – Energía propia o específica en dos secciones.

Planteando la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2:

$$z_1 + \underbrace{h_1 + \frac{U_1^2}{2g}}_{H_1} = z_2 + \underbrace{h_2 + \frac{U_2^2}{2g}}_{H_2} + \Delta J_{1-2}^*$$

Si el movimiento uniforme: $U_1 = U_2 = U$

Si el movimiento es además permanente y el canal prismático: $h_1 = h_2 = h$

Por consiguiente:

$$H_1 = H_2 = H = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\Omega} \right)^2 \Rightarrow$$

$$H = h + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad (138)$$

Los dos términos que conforman la energía propia H son a su vez función del tirante h :

$$\begin{cases} h = f(h) \\ \Omega = f(h) \end{cases}$$

Por carácter transitivo se deduce que la energía propia H es también función del tirante h .

$$H = f(h)$$

Si se varía la pendiente longitudinal i , manteniendo constante el caudal Q , se modifican los valores de la velocidad media U y la sección Ω siguiendo las leyes que derivan de las ecuaciones de Chézy y continuidad:

$$\begin{cases} U = c \sqrt{Ri} \\ \Omega = \frac{Q}{U} \end{cases}$$

Analizando el problema desde un punto de vista exclusivamente matemático y teniendo en cuenta que para cada inclinación de la pendiente i está asegurada la uniformidad del movimiento, los límites serán en consecuencia:

$$0 \leq i \leq \infty$$

Entonces:

- Si $i \rightarrow 0 \Rightarrow U \rightarrow 0$ - Para que: $Q = U\Omega = cte. \Rightarrow \Omega \rightarrow \infty \therefore h \rightarrow \infty$

$$\text{De (7-127): con } h \rightarrow \infty \Rightarrow H \rightarrow \infty$$

- Si $i \rightarrow \infty \Rightarrow U \rightarrow \infty$ - Para que: $Q = U\Omega = cte. \Rightarrow \Omega \rightarrow 0 \therefore h \rightarrow 0$

$$\text{De (7-127): con } h \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow \infty$$

En conclusión, tanto para tirantes mínimos $h \rightarrow 0$ como para tirantes máximos $h \rightarrow \infty$, en ambas situaciones límites, la función energía propia $H = f(h)$ tiende a infinito $H \rightarrow \infty$

La función energía propia $H = f(h)$ se representa en la *Figura 81*, tomando como referencia un sistema plano con ejes ortogonales cartesianos $H - h$. Para mayor facilidad en el trazado del gráfico, se divide la función en sus dos términos y luego se suman:

$$- H = h \quad \text{Ecuación lineal. Recta con inclinación de } 45^\circ. \quad (139)$$

$$- H = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad \text{Ecuación hipérbolica.} \quad (140)$$

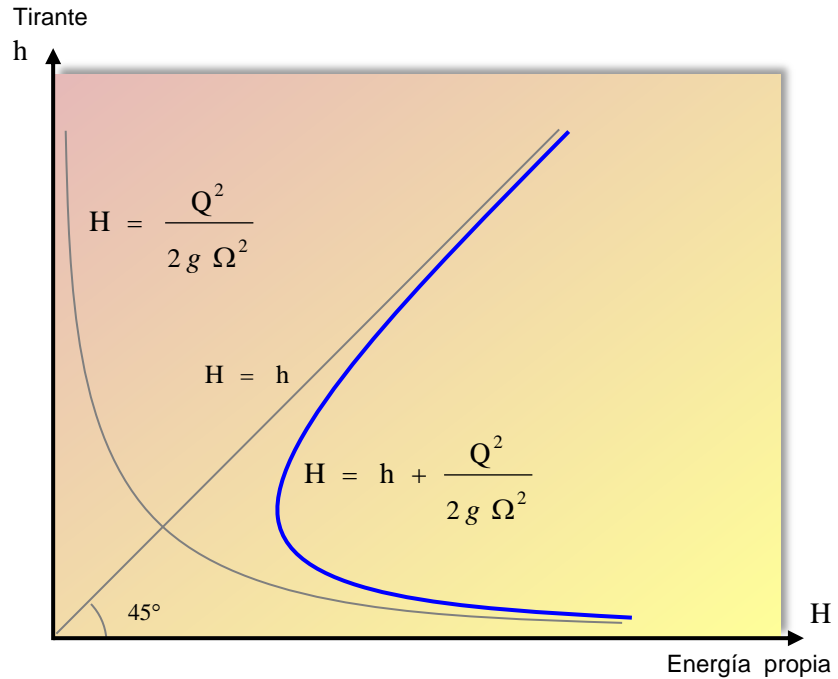


Figura 81 – Energía propia o específica en función del tirante.

La adición de ambas variables da con la curva $H = f(h)$ buscada, la cual incluye las siguientes características:

- Para tirantes tendientes a cero ($h \rightarrow 0$), la curva $H = f(h)$ se hace asintótica al eje horizontal H .
- Para tirantes tendientes a infinito ($h \rightarrow \infty$), la curva $H = f(h)$ se hace asintótica a la recta auxiliar a 45° $H = h$.

7.2. Condición de escurrimiento crítico.

A consecuencia de que la energía propia H tiende a infinito para cada uno de los tirantes límite máximo y mínimo, se deduce que existe un tirante intermedio entre ambos extremos para el cual la energía propia es mínima (H_{\min}).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si: } h \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow \infty \\ \text{Si: } h \rightarrow \infty \Rightarrow H \rightarrow \infty \end{array} \right\} \therefore H = f(h) \text{ debe pasar por un } \textit{valor m\u00ednimo}.$$

Para la determinación del valor de ese tirante que genera la mínima energía propia, el cual se denomina *tirante crítico* h_c , se procede derivando la ecuación (138) e igualando a cero.

$$H = h + \frac{Q^2}{2g \Omega^2} = h + \frac{Q^2}{2g} \Omega^{-2}$$

$$\frac{dH}{dh} = 1 + \frac{Q^2}{2g} (-2) \Omega^{-3} \frac{d\Omega}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{g} \frac{1}{\Omega^3} \frac{d\Omega}{dh} = 0 \quad (141)$$

condición crítica

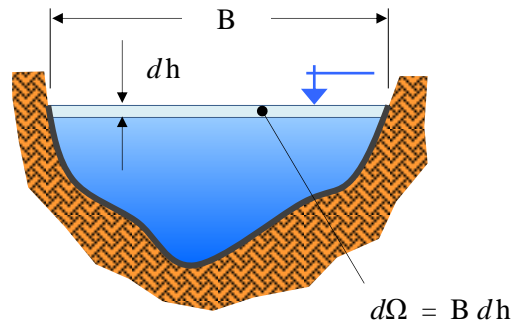


Figura 82 – Sección diferencial en función del ancho superficial en un cauce natural.

Observando la *Figura 7-82* se adopta por convención y conveniencia un área diferencial en coincidencia con la superficie libre, quedando:

$$d\Omega = B dh \quad (142)$$

Siendo:

B ancho superficial.

$$\Rightarrow \frac{d\Omega}{dh} = B \quad (143)$$

Reemplazando (143) en (141):

$$\frac{dH}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{\Omega^3} = 0 \quad (144)$$

De donde se obtiene la *condición de escurrimiento crítico*:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega^3}{B} \quad (145)$$

La ecuación (145) tiene incorporado el requisito de mínima energía propia H_{\min} , y en esas condiciones, el escurrimiento tendrá lugar únicamente con el tirante crítico h_c correspondiente.

Así, la mínima energía propia H_{\min} se vincula con un solo valor de tirante, que es justamente el correspondiente al tirante crítico h_c . Ver *Figura 83*.

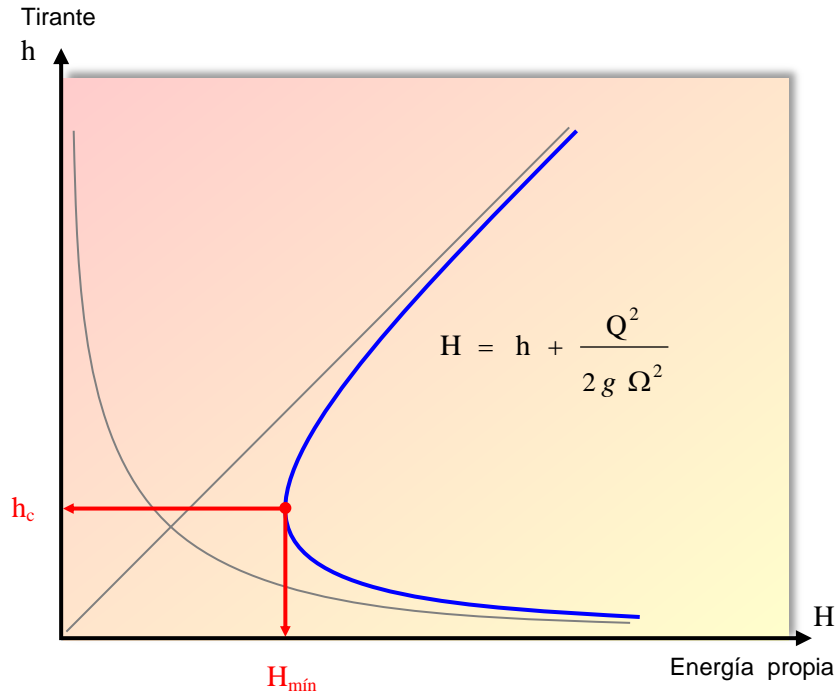


Figura 83 – Ubicación gráfica de la energía propia mínima y el tirante crítico.

Además, los parámetros característicos críticos de la corriente se los indica con el subíndice “c”. Así se relacionan para con el tirante crítico h_c :

- Ω_c sección crítica.
- B_c ancho superficial crítico.
- U_c velocidad media crítica.
- i_c pendiente longitudinal crítica.

Con la nomenclatura precedentemente señalada, la ecuación (145) correspondiente a la condición de escurrimiento crítico modifica su forma, quedando expresada de la siguiente forma:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega_c^3}{B_c} \tag{146}$$

La energía propia mínima se puede escribir entonces:

$$H_{\min} = h_c + \frac{Q^2}{2g \Omega_c^2} \tag{147}$$

Teniendo en cuenta la condición de escurrimiento crítico, se reemplaza (146) en (147):

$$H_{\min} = h_c + \frac{\Omega_c}{2 B_c} \tag{148}$$

Si sobre el mismo canal donde se ha desarrollado el estudio precedente y por el cual circula originalmente un caudal $Q = cte.$, en otra ocasión posterior se altera el gasto circulante, incrementándolo de Q a otro Q_1 , también constante. Evidentemente que la *condición de escurrimiento crítico* representada por la expresión (146) sufrirá una variación, y consecuentemente se va a modificar el tirante crítico h_c inicial por otro superior h_{c1} correspondiente con la nueva condición.

A igual conclusión se arriba si se sigue intensificando nuevamente el caudal a otra magnitud Q_2 , para el cual se va a corresponder con un tirante crítico distinto y mayor h_{c2} .

La representación gráfica de la curva $H - h$ es individual para cada uno de los gastos Q , Q_1 y Q_2 , pero a los fines comparativos en la *Figura 84* se muestran superpuestas las mismas.

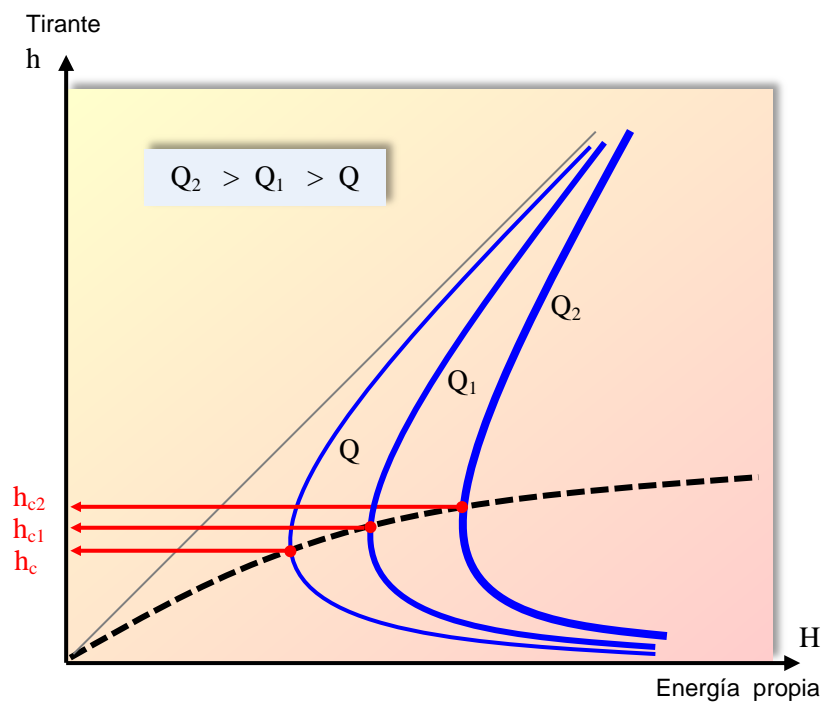


Figura 84 – Curva $H - h$ para distintos caudales.

7.3. Cálculo del tirante crítico.

La existencia de un tirante crítico h_c implica una condición de escurrimiento para la cual circula un determinado caudal Q con la mínima energía propia H_{\min} .

Analizando una sección de cualquier forma, se calculan los valores que toman las secciones Ω y los anchos superficiales B para distintos tirantes h . Para una forma prismática elegida, como por ejemplo la sección trapezoidal, se confecciona un gráfico auxiliar tal como el indicado en la *Figura 85*, donde se procede a dividir genéricamente en varios tirantes h_i que se corresponden particularmente cada uno de ellos con una sección Ω_i y un ancho superficial particular B_i .

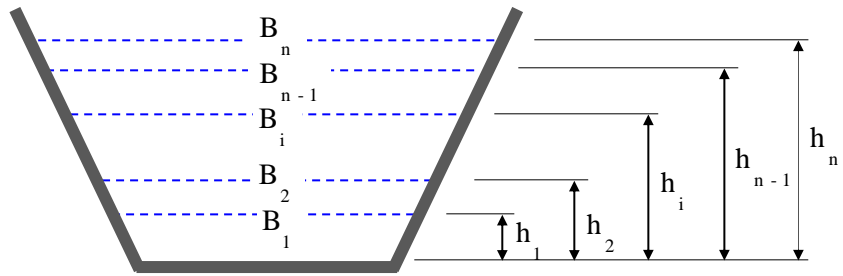


Figura 85 – División de una sección en distintos tirantes.

Los valores calculados en el paso anterior se vuelcan a una planilla (ver Figura 86), en la cual se adiciona una columna con la relación Ω^3/B , relación que obviamente es función del tirante h .

Si se trata de una sección natural, sin ninguna relación matemática que vincule la variación entre el tirante con la sección y el ancho superficial, el cálculo se realiza de manera individual tirante por tirante. En cambio, si la sección es de tipo prismática, con forma geométrica particular y conocida, la determinación de Ω y B es más sencilla, ya que esas magnitudes tienen una ley de variación definida respecto al tirante h .

h	Ω	Ω^3	B	$\frac{\Omega^3}{B}$
h_1	—	—	→	$\frac{\Omega_1^3}{B_1}$
h_2	—	—	→	$\frac{\Omega_2^3}{B_2}$
h_i	—	—	→	$\frac{\Omega_i^3}{B_i}$
h_{n-1}	—	—	→	$\frac{\Omega_{n-1}^3}{B_{n-1}}$
h_n	—	—	→	$\frac{\Omega_n^3}{B_n}$

Figura 86 – Planilla complementaria para el cálculo del tirante crítico.

Seguidamente, sobre un plano referenciado con un par de ejes ortogonales cartesianos, se grafica una curva sobre los puntos generados por los pares de valores obtenidos entre las columnas extremas de la planilla descrita en la Figura 86, llevando Ω^3/B sobre las abscisas y el tirante h sobre las ordenadas. Ver Figura 87.

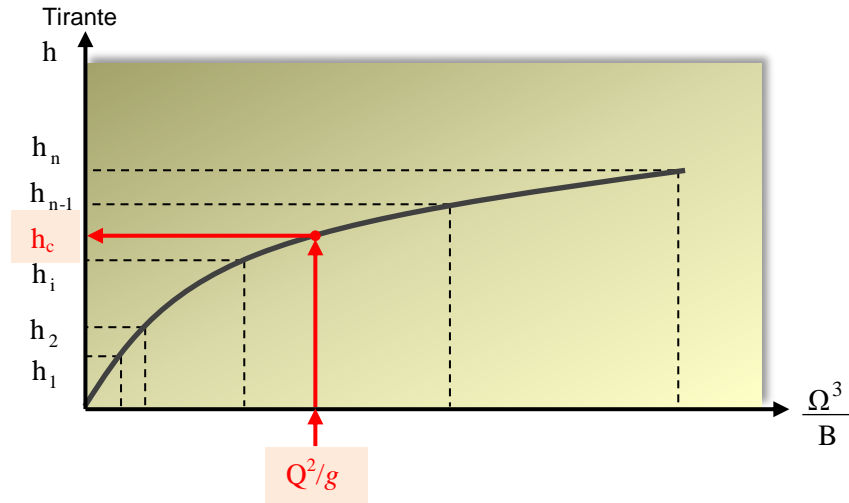


Figura 87 – Gráfico para la determinación del tirante crítico.

Finalmente, sobre el mismo gráfico de la *Figura 87* se ingresa desde las abscisas con el valor de Q^2/g , dando cumplimiento con la condición crítica, y se obtiene sobre la ordenada el tirante crítico buscado h_c .

Es importante remarcar que el tirante crítico h_c es solo función del caudal Q y la sección Ω , y no depende en absoluto de la pendiente longitudinal i .

Además, se hace notar que el procedimiento de cálculo gráfico anteriormente descrito está destinado a un mejor entendimiento conceptual, ya que de por sí es el razonamiento básico utilizado para la determinación del tirante crítico h_c . En la actualidad, la metodología indicada es poco práctica, pero siguiendo el mismo criterio de cálculo con las herramientas que la informática provee al proyectista, se simplifica y acelera ampliamente la resolución del problema.

7.4. Velocidad crítica.

En un escurrimiento que se desarrolla en *régimen crítico* con movimiento permanente, simultáneamente se cumple:

- Energía propia mínima. $H = H_{\min}$
- Tirante de escurrimiento crítico. $h = h_c$

Dependiendo de la forma de la sección, y a partir del tirante crítico h_c previamente determinado según el apartado 7.3., se calcula la sección crítica Ω_c . O sea:

$$h_c \Rightarrow \Omega_c$$

De la ecuación de continuidad:

$$Q = cte. = U \Omega$$

Particularmente para un régimen crítico, va a corresponder una velocidad crítica U_c y una sección también crítica Ω_c . Por lo que la velocidad crítica resulta:

$$U_c = \frac{Q}{\Omega_c} \quad (149)$$

a) Para una sección cualquiera.

En este caso se recurre al concepto simplificado de *tirante medio hidráulico* h_m (Ver *Figura 88*), que se define como la relación entre el área de la sección transversal Ω considerada con el ancho superficial B .

$$h_m = \frac{\Omega}{B} \quad (150)$$

Se recurre entonces a la hipótesis de considerar la sección real Ω por otra ficticia rectangular, de igual superficie, con ancho B y tirante h_m .

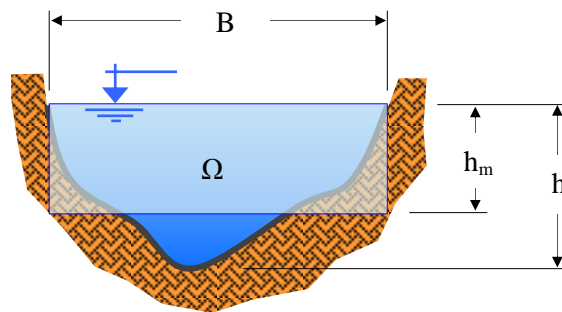


Figura 88 – Tirante medio hidráulico de una sección cualquiera.

Si la sección en estudio es crítica Ω_c , el tirante medio también es crítico h_{mc} y resulta igual a:

$$h_{mc} = \frac{\Omega_c}{B_c} \quad (151)$$

Modificando la condición de tirante crítico e insertando la expresión (151):

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega_c^3}{B_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q^2}{\Omega_c^2} = U_c^2 = g \frac{\Omega_c}{B_c} = g h_{mc}$$

Despejando se obtiene la velocidad media crítica para una sección de cualquier forma:

$$U_c = \sqrt{g h_{mc}} \quad (152)$$

b) Para una sección rectangular.

En el caso de una sección rectangular, resulta coincidente el tirante h con el tirante medio h_m (Ver Figura 89), y también particularmente cuando se trata de un escurrimiento crítico.

$$h_c = h_{mc}$$

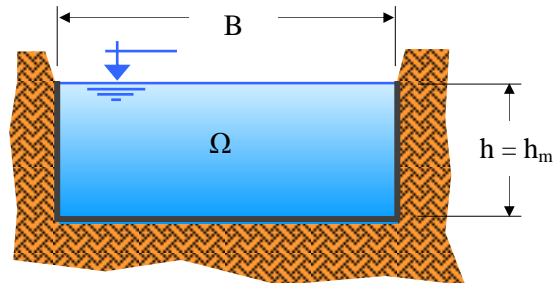


Figura 89 – Tirante medio hidráulico de una sección rectangular.

En estas condiciones y de acuerdo a la fórmula (152), la velocidad media crítica es:

$$U_c = \sqrt{g h_c} \quad (153)$$

7.5. Pendiente crítica.

La pendiente longitudinal i de un canal con movimiento permanente y uniforme, por el que escurre un gasto o caudal Q a través de una sección Ω con un perímetro mojado χ , se obtiene despejando de la fórmula de Chézy:

$$i = \frac{U^2}{c^2 R} = \frac{Q^2 \chi}{c^2 \Omega^3}$$

Si la corriente de circulación hidráulica es crítica, la ecuación anterior se transforma en:

$$i_c = \frac{Q^2 \chi_c}{c_c^2 \Omega_c^3}$$

O bien, teniendo en cuenta la condición de escurrimiento crítico:

$$i_c = \frac{g \chi_c}{c_c^2 B_c} \quad (154)$$

Así, los canales de pendiente crítica generan escurrimientos con mínima energía propia y tirantes h igual al tirante crítico h_c . En cambio, para otros valores de pendiente longitudinal, se define según sus características:

- Canal de débil pendiente.

Pendiente: $i < i_c$

→ Tirante: $h > h_c$

- Canal de fuerte pendiente.

Pendiente: $i > i_c$

→ Tirante: $h < h_c$

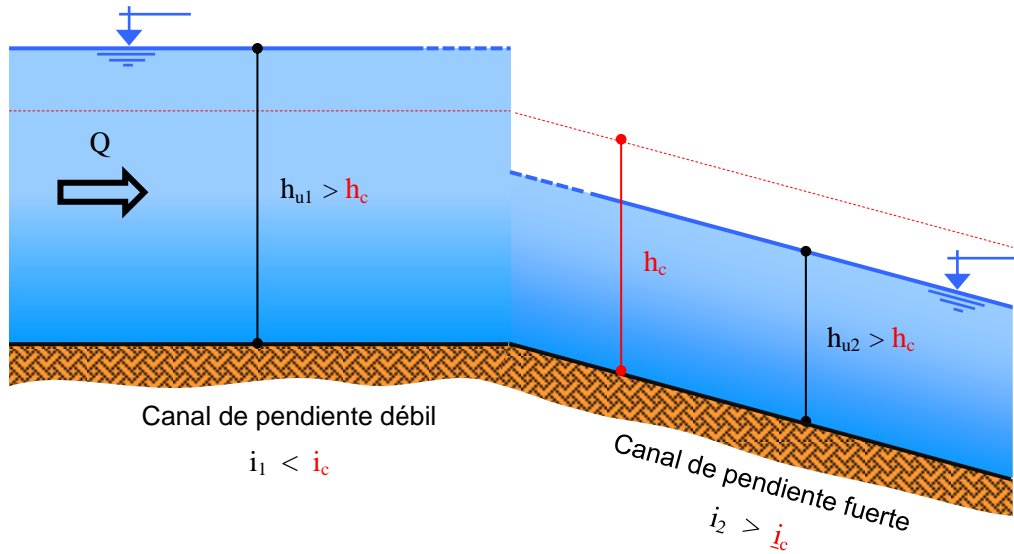


Figura 7-90 – Canal de pendientes débil y fuerte.

7.6. Clasificación de la corriente.

Los escurrimientos a superficie libre se ordenan según tres tipos de regímenes, de acuerdo a la magnitud del tirante hidráulico y/o la velocidad media:

- Régimen crítico.
- Régimen lento o fluvial o subcrítico.
- Régimen veloz o torrencial o supercrítico.

a) Régimen crítico.

Se verifica cuando el escurrimiento ocurre con energía propia mínima $H_{\text{mín}}$, siendo el tirante hidráulico igual al tirante crítico y la velocidad media igual a la velocidad media crítica. Resumiendo:

$$h = h_c$$

$$U = U_c$$

En movimiento uniforme, el escurrimiento se realiza con pendiente longitudinal i_c y el caudal $Q = cte.$ fluye con energía propia mínima $H_{mín}$, por lo tanto se cumple:

$$\frac{dH}{dh} = 0$$

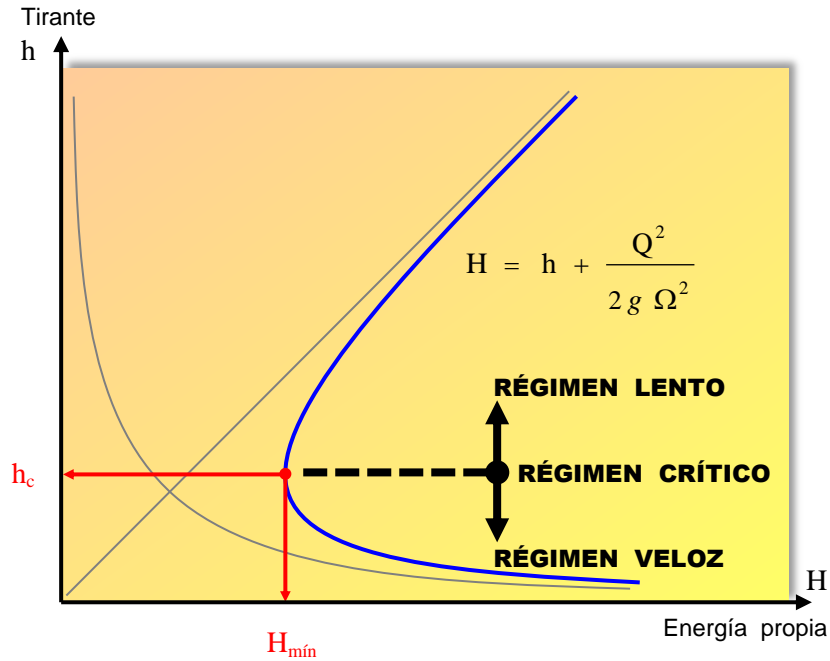


Figura 91 – Tipos de regímenes en curva H - h.

El régimen crítico tiene solo valor teórico, puesto que en la práctica es por demás aconsejable proyectar el escurrimiento en condiciones alejadas de las críticas, dada la inestabilidad que implica el mismo. En efecto, en las cercanías del mínimo de la curva H - h, una pequeña variación de la energía propia H implica importantes variaciones del tirante h.

Por ello, en el diseño de canales, se recomienda evitar que la corriente fluya en régimen crítico para lo cual se debe eludir la opción de proyecto con pendientes i_c , generadoras de tirantes h_c y velocidades U_c , ya que en esas condiciones el movimiento es inestable y se producen ondas móviles en la superficie que afectan la permanencia en una misma sección tanto en el tirante como la velocidad media. Por esta razón, se sugiere concretamente que la energía propia de la corriente H sea al menos un 5% superior a la energía propia mínima $H_{mín}$, sin importar si el régimen es veloz o lento.

b) Régimen lento o fluvial o subcrítico.

Tiene lugar cuando los tirantes h son mayores que los tirantes críticos h_c , y consecuentemente las velocidades medias U son menores que las velocidades medias críticas U_c , es decir:

$$h > h_c$$

$$U < U_c$$

Su segunda denominación, régimen fluvial, se debe por ser propio de los ríos de llanura, caracterizado por bajas pendientes y velocidades, y grandes tirantes.

Por otra parte, la designación régimen subcrítico, se refiere a la velocidad de la corriente U en comparación con la velocidad crítica U_c (no al tirante h con relación al tirante crítico h_c). En este caso, al ser la velocidad media U menor que el parámetro de referencia U_c , se indica como subcrítico.

Si el movimiento es uniforme, el régimen lento se produce con pendientes longitudinales i menor que las críticas i_c .

De la *Figura 92* (Curva $H - h$. zona de régimen lento), se puede observar que ante un aumento del tirante $+\Delta h$ se produce simultáneamente un incremento de la energía propia $+\Delta H$, por lo que se concluye que la variación de la energía propia H respecto al tirante h resulta ser siempre positiva:

$$\frac{dH}{dh} > 0$$

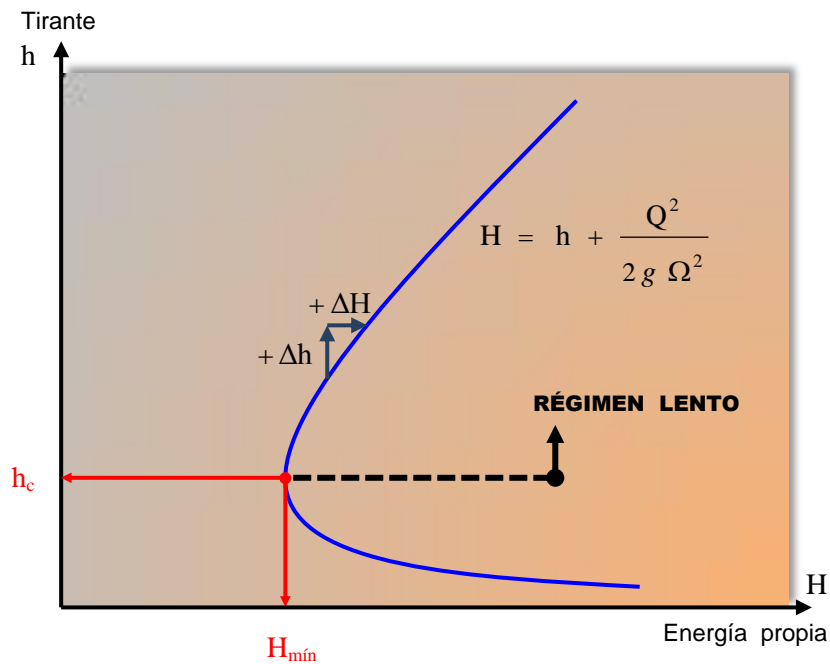


Figura 92 – Variación de la energía propia en régimen lento.

c) Régimen veloz o torrencial o supercrítico.

Se produce cuando los tirantes h son menores que los tirantes críticos h_c , y en consecuencia las velocidades medias U resultan mayores que las velocidades medias críticas U_c :

$$h < h_c$$

$$U > U_c$$

Su designación optativa, régimen torrencial, proviene de los ríos de montaña o serranía, caracterizado por las altas pendientes y velocidades, y pequeños tirantes.

En caso de tratarse de un movimiento uniforme, el régimen veloz es generado por una inclinación de la pendiente i mayor que la crítica i_c .

A partir de la *Figura 93* (Curva $H - h$. zona de régimen veloz), se deduce que un incremento del tirante $+\Delta h$ provoca una disminución de la energía propia $-\Delta H$, así la variación de la energía propia H respecto del tirante h concluye ser siempre negativa:

$$\frac{dH}{dh} < 0$$

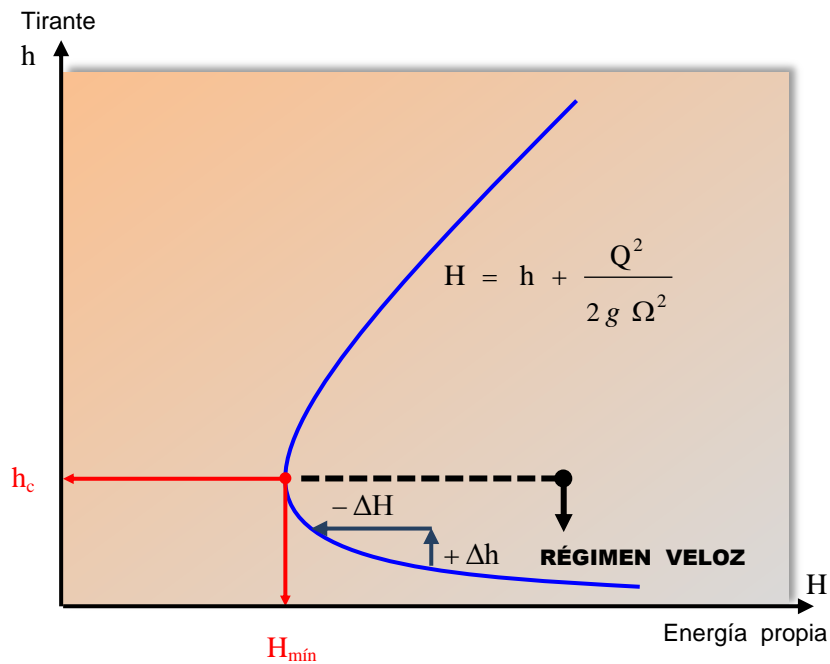


Figura 93 – Variación de la energía propia en régimen veloz.

Es muy importante y necesario conocer el tipo régimen, pues el comportamiento de la corriente es distinto ante cualquier modificación en el recorrido, tal como:

- Forma.
- Pendiente.
- Dirección.

En resumen, según el régimen de escurrimiento, las características físicas correspondiente al tirante, velocidad media, y pendiente longitudinal deben cumplir (ver *Figura 94*):

- Régimen crítico.

Tirante	$h = h_c$
Velocidad media	$U = U_c$
Pendiente	$i = i_c$

- Régimen lento.

Tirante	h	$>$	h_c
Velocidad media	U	$<$	U_c
Pendiente	i	$<$	i_c

- Régimen veloz.

Tirante	h	$<$	h_c
Velocidad media	U	$>$	U_c
Pendiente	i	$>$	i_c

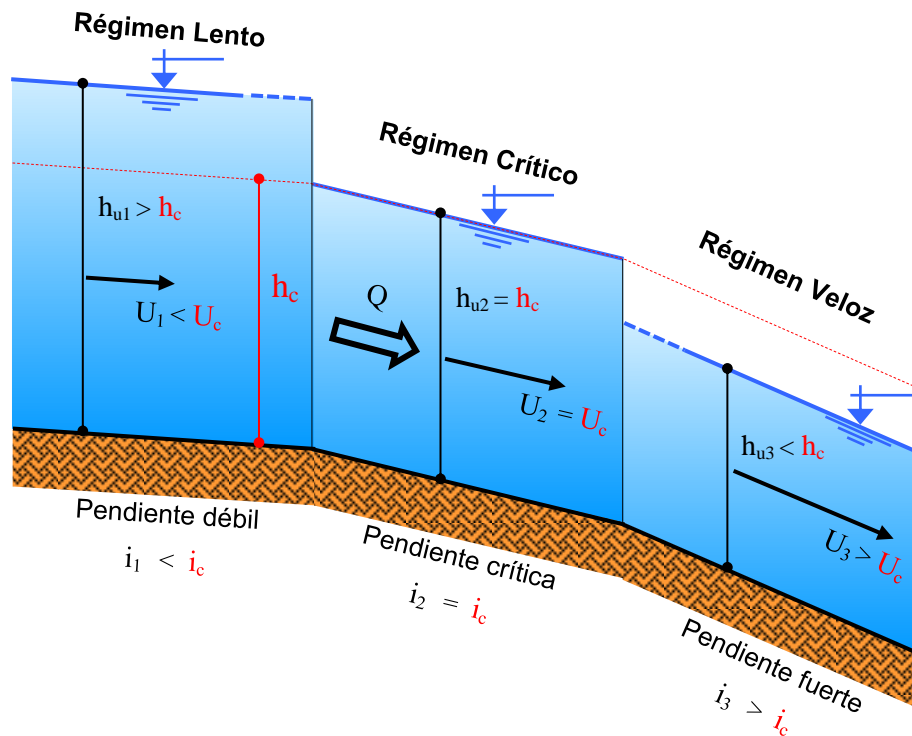


Figura 94 – Tipos de regímenes en canales.

7.7. Número de Froude.

El número de Froude Fr permite establecer las condiciones y tipo de régimen de los escurrimientos en canales. Haciendo un paralelismo, se puede afirmar que el número de Froude Fr representa en los escurrimientos a superficie libre lo que el número de Reynolds Re en los escurrimientos a presión.

Sacando factor común al tirante h en la expresión de energía propia o específica:

$$H = h + \frac{U^2}{2g} = h \left(1 + \frac{U^2}{2gh} \right)$$

↓
 Fr^2

El número de Froude Fr es un valor adimensional que relaciona las fuerzas inerciales con las gravitatorias, según se desprende de la teoría de la semejanza:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g h}} \quad (155)$$

Originalmente en sus estudios, Bakhmeteff definió como *grado de rapidez* de la corriente λ , al término también adimensional:

$$\lambda = \frac{U^2}{g h} \quad (156)$$

Por lo que el grado de rapidez de la corriente λ y el número de Froude Fr se relacionan directamente de la siguiente manera:

$$\lambda = Fr^2 \quad (157)$$

a) Para una sección cualquiera.

- Número de Froude en función del tirante h .

En este caso vale la ecuación (7-155).

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g h}} = \frac{Q}{\sqrt{g h} \Omega} = \sqrt{\frac{Q^2}{g h \Omega^2} \frac{\Omega}{\Omega}} = \sqrt{\frac{Q^2 \Omega}{g h \Omega^3}}$$

Si el escurrimiento es crítico:

$$Fr_c = \sqrt{\frac{Q^2}{g} \frac{\Omega_c}{h_c \Omega_c^3}} = \sqrt{\frac{\Omega_c^3}{B_c} \frac{\Omega_c}{h_c \Omega_c^3}} \Rightarrow$$

$$Fr_c = \sqrt{\frac{\Omega_c}{B_c h_c}} \quad (158)$$

- Número de Froude en función del tirante medio h_m .

Considerando en lugar del tirante h al tirante medio h_m .

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g h_m}} = \frac{U}{\sqrt{g \Omega/B}}$$

Si el escurrimiento es crítico:

$$Fr_c = \frac{U}{\sqrt{g \Omega_c/B_c}} \quad (159)$$

A su vez, la sección crítica Ω_c se puede expresar como el producto entre el ancho superficial B_c y el tirante medio crítico h_{mc} .

$$\Omega_c = B_c h_{mc} \quad (160)$$

Modificando convenientemente los términos de la ecuación (159) e introduciendo la condición de escurrimiento crítico:

$$Fr_c = \frac{Q}{\sqrt{g \Omega_c / B_c} \Omega_c} = \frac{Q}{\sqrt{g h_{mc}} \Omega_c} = \sqrt{\frac{Q^2}{g h_{mc} (B_c h_{mc})^2}} =$$

$$Fr_c = \sqrt{\frac{Q^2}{g} \frac{1}{B_c^3 h_{mc}^3}} = \sqrt{\frac{\Omega_c^3}{B_c} \frac{1}{B_c^2 h_{mc}^3}} = \sqrt{\frac{B_c^3 h_{mc}^3}{B_c} \frac{1}{B_c^2 h_{mc}^3}} =$$

$$Fr_c = \sqrt{\frac{B_c^3 h_{mc}^3}{B_c} \frac{1}{B_c^2 h_{mc}^3}} = \sqrt{\frac{B_c^3 h_{mc}^3}{B_c^3 h_{mc}^3}} = \sqrt{1} \Rightarrow$$

$$Fr_c = 1 \quad (161)$$

Como corolario se obtiene que en los escurrimientos críticos, el número de Froude en función del tirante medio es igual a la unidad.

Extrapolando ese concepto:

- Si el número de Froude $Fr > 1$ → Régimen veloz o supercrítico.
- Si el número de Froude $Fr < 1$ → Régimen lento o subcrítico.

b) Para una sección rectangular.

En este caso el tirante crítico h_c es igual al tirante medio crítico h_{mc} ($h_c = h_{mc}$).

Reemplazando en (158):

$$Fr_c = \sqrt{\frac{\Omega_c}{B_c h_c}} = \sqrt{\frac{B_c h_c}{B_c h_c}} = \sqrt{1} \Rightarrow$$

$$Fr_c = 1 \quad (162)$$

También se cumple:

- Si el número de Froude $Fr > 1$ → Régimen veloz o supercrítico.
- Si el número de Froude $Fr < 1$ → Régimen lento o subcrítico.

7.8. Parábola de Koch.

En el apartado 7.1. se ha estudiado la variación de la energía propia $H = f(h)$ para un canal prismático por el que escurre un determinado caudal Q con movimiento permanente y uniforme. En ese análisis, en que $Q = cte.$, cada uno de los distintos tirantes h pueden ser generados por efecto de la variación de la pendiente longitudinal i .

Ahora se plantea otra hipótesis. Se supone también un canal prismático por el que circulan una serie de escurrimientos con la particularidad que en todos y cada uno de ellos la energía propia o específica H es constante.

Para lograr ese cometido se debe variar el gasto Q , por lo que consecuentemente y en función de ello se modificará el tirante h . Estos distintos tirantes h , al igual que en el caso anterior, pueden interpretarse resultante de distintas inclinaciones de la pendiente i .

De:

$$H = f(h) = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g \Omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$Q = \Omega \sqrt{2g (H - h)} \quad (163)$$

La función (163) se anula para los siguientes valores del tirante h :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ Si } h = 0 \quad \rightarrow \quad Q = 0 \\ \cdot \text{ Si } h = H \quad \rightarrow \quad Q = 0 \end{array} \right.$$

Es evidente que la función $Q = f(h)$ (163) pasa por un máximo ($Q_{\text{máx}}$) para un valor del tirante intermedio entre 0 y H .

La representación gráfica de la función (163) (ver *Figura 95*) es una curva conocida como *parábola de Koch* o también como *curva de Bélanger*.

Ante cualquier valor del caudal Q menor que $Q_{\text{máx}}$, existen dos tirantes h_1 y h_2 con la misma energía propia H . Significa esto que con una energía propia $H = cte.$ puede existir un mismo caudal con dos alternativas:

- Tirante $h_1 \rightarrow$ grande.
Velocidad media $U_1 \rightarrow$ pequeña.
- Tirante $h_2 \rightarrow$ pequeño.
Velocidad media $U_2 \rightarrow$ grande.

En el primer caso es preponderante la energía cinética mientras que en el segundo predomina la energía potencial.

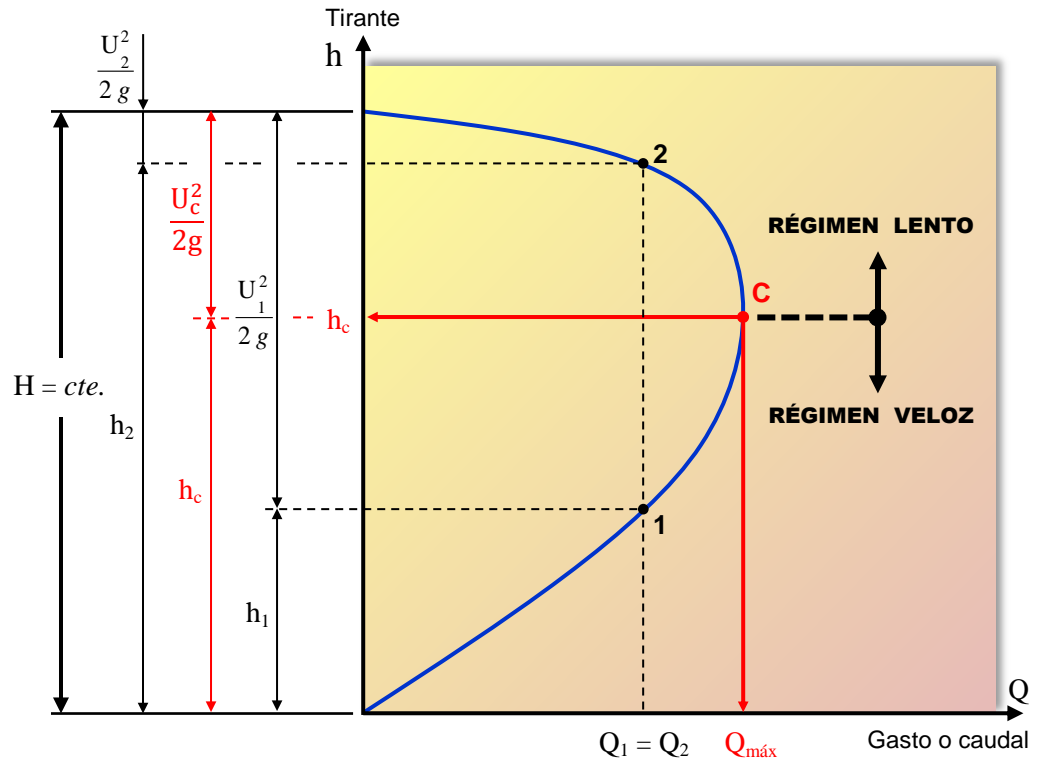


Figura 95 – Parábola de Koch.

Para una determinada energía propia $H = cte.$, el caudal máximo $Q_{m\acute{a}x}$ solo puede circular con un tirante h igual al crítico h_c , y por consiguiente el escurrimiento se producirá exclusivamente en régimen crítico, el cual representa el límite entre los regímenes veloz y lento.

Así, la existencia de una corriente con tirante crítico ($h = h_c$) implica una condición de escurrimiento para la cual circula:

- un caudal $Q = cte.$ dado con mínima energía propia $H_{m\acute{i}n}$.
- un caudal máximo $Q_{m\acute{a}x}$ con una energía propia $H = cte.$ dada.

Como el régimen crítico tiene lugar cuando el caudal Q es máximo, la condición matemática se obtiene derivando $Q = f(h)$ e igualando a cero.

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{d}{dh} \left[\Omega \sqrt{2g(H-h)} \right] = \frac{d\Omega}{dh} \sqrt{2g(H-h)} + \Omega \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2g(H-h)}} (-2g) = 0$$

condición crítica

$$\Rightarrow B_c \sqrt{2g(H-h_c)} - \Omega_c \frac{g}{\sqrt{2g(H-h)}} = 0$$

$$\Rightarrow B_c \left[\sqrt{2g(H-h_c)} \right]^2 = g \Omega_c$$

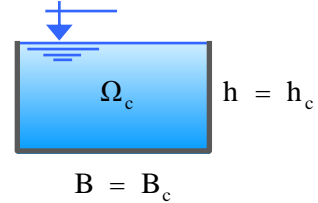
$$\Omega_c = 2 B_c (H - h_c) \quad (164)$$

- En una sección rectangular.

- Tirante crítico h_c :

De (7-164)

$$B_c h_c = 2 B_c (H - h_c) \Rightarrow$$



$$h_c = \frac{2}{3} H \quad (165)$$

- Velocidad media crítica U_c :

$$\frac{U_c^2}{2g} = \frac{1}{3} H$$

$$\Rightarrow U_c = \sqrt{2g \frac{1}{3} H} = \sqrt{2g \frac{1}{3} \frac{3}{2} h_c}$$

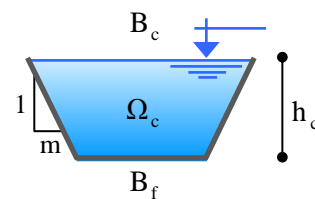
$$U_c = \sqrt{g h_c} \quad (166)$$

- En una sección trapecial.

- Tirante crítico h_c :

De (7-164)

$$(B_f h_c + m h_c^2) = (B_f + 2m h_c) 2 (H - h_c) \Rightarrow$$



- Para $m = 0 \rightarrow$ Sección rectangular.

$$B_f h_c = B_f 2 (H - h_c) \Rightarrow$$

$$h_c = \frac{2}{3} H \quad (167)$$

- Para $B_f = 0 \rightarrow$ Sección triangular.

$$m h_c^2 = 2 m h_c^2 (H - h_c) \Rightarrow$$

$$h_c = \frac{4}{5} H \quad (168)$$

Por consiguiente, se ha probado que en un escurrimiento con sección trapecial, el tirante crítico h_c está comprendido entre los siguientes límites:

$$\frac{4}{5} H < h_c < \frac{2}{3} H \quad (169)$$

- Velocidad media crítica U_c :

- Para $m = 0 \rightarrow$ Sección rectangular.

Idem ecuación (7-166)

$$U_c = \sqrt{g h_c} \quad (170)$$

- Para $B_f = 0 \rightarrow$ Sección triangular.

$$\frac{U_c^2}{2g} = \frac{1}{5} H$$

$$\Rightarrow U_c = \sqrt{2g \frac{1}{5} H} = \sqrt{2g \frac{1}{3} \frac{5}{4} h_c}$$

$$U_c = \sqrt{\frac{1}{2} g h_c} \quad (171)$$

La velocidad media crítica U_c queda limitada entre los siguientes valores:

$$\sqrt{\frac{1}{2} g h_c} = U_c = \sqrt{g h_c} \quad (172)$$

7.9. Experiencia de Bakhmeteff.

En el año 1913, Bakhmeteff estudió el comportamiento de la superficie libre en canales con movimiento uniforme cuando en el mismo se introduce un obstáculo.

La experiencia la realizó sobre un canal rectangular en el cual colocó un pequeño escollo sobre la solera, de forma un tanto fluidodinámica, tal que la pérdida de energía local que se genere sea prácticamente despreciable.

En las observaciones de los ensayos en laboratorio constató que la presencia de un obstáculo de las características señaladas sobre el fondo del canal con un escurrimiento en:

- Régimen lento o subcrítico → Produce una depresión sobre la superficie libre.
- Régimen veloz o supercrítico → Genera una sobreelevación en la superficie libre.

La explicación del fenómeno se apoya en la utilización del concepto de energía propia H , teniendo en cuenta las siguientes pautas comunes para ambos casos:

- Originalmente la solera, la superficie libre y la línea de energía total son paralelas ($i = j = j^*$). Consecuencia de una corriente con movimiento permanente y uniforme.
- El objeto depositado sobre el fondo del canal tiene dimensiones pequeñas.
- La pérdida local es despreciable, por lo que la línea de energía total no sufre ninguna alteración por efecto de la presencia del obstáculo.
- La energía propia H_2 , en correspondencia con el sólido introducido, es menor que la energía propia H_1 en el sector del canal inalterado.

a) Escurrimientos en régimen lento.

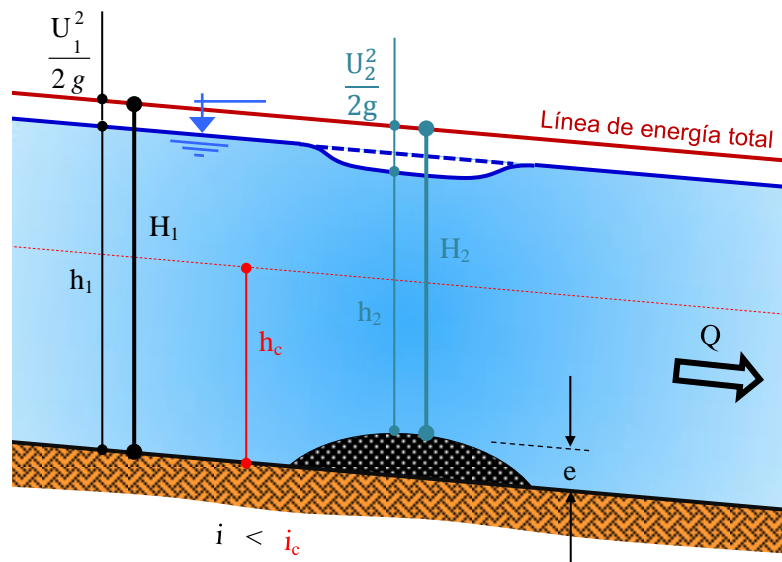


Figura 96 – Experiencia de Bakhmeteff en régimen lento.

De la Figura 7-96 corresponde para:

- Sección 1 → energía propia H_1
- Sección 2 → energía propia H_2 (pierde energía propia - $H_2 < H_1$)

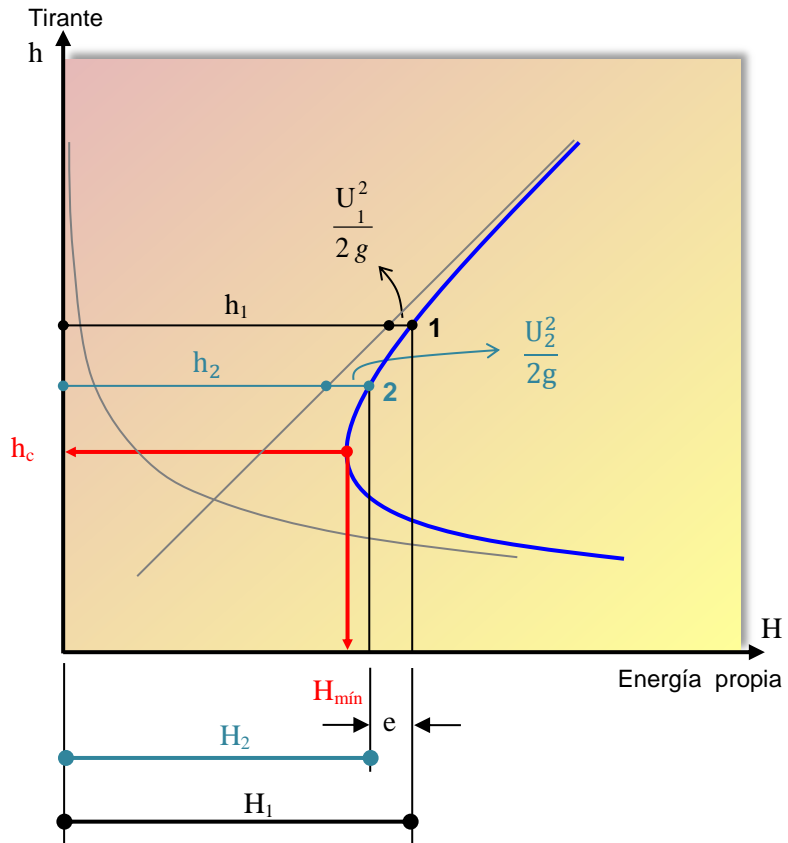


Figura 97 – Curva H – h para la experiencia de Bakhmeteff en régimen lento.

En la curva H – h (ver Figura 97), analizando sobre la abscisa:

- Sección 1 $\rightarrow H_1$ $\left\{ \begin{array}{l} h_1 \text{ (coincidente con el mov. uniforme)} \\ \frac{U_1^2}{2g} \text{ (coincidente con el mov. uniforme)} \end{array} \right.$
- Sección 2 $\rightarrow H_2$ $\left\{ \begin{array}{l} h_2 \text{ (menor que } h_1) \\ \frac{U_2^2}{2g} \text{ (mayor que } \frac{U_1^2}{2g}) \end{array} \right.$

Conclusión:

Al interponer un elemento sólido en la solera de un canal con una corriente en régimen lento, se produce una depresión sobre la superficie libre en correspondencia con dicho elemento, y simultáneamente un aumento de la velocidad, lo cual se aprecia y justifica en la curva H – h.

b) Escurrimientos en régimen veloz.

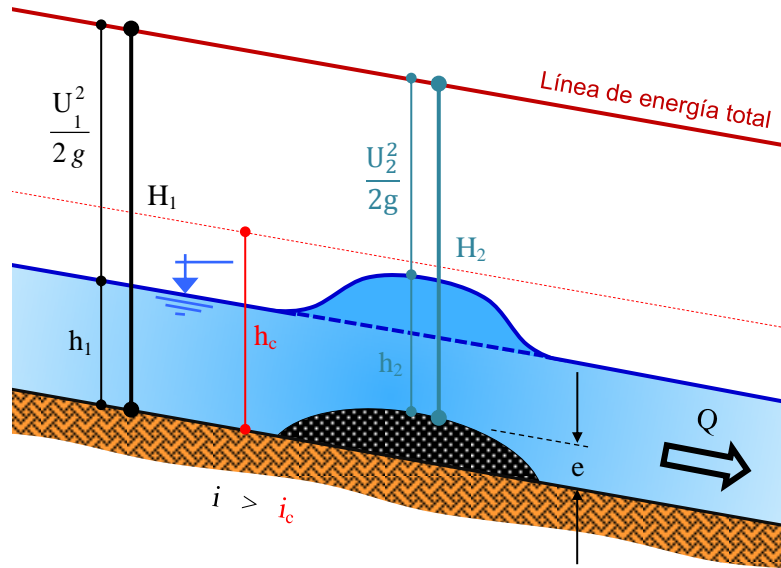


Figura 98 – Experiencia de Bakhmeteff en régimen veloz.

De la Figura 98 corresponde para:

- Sección 1 → energía propia H_1
- Sección 2 → energía propia H_2 (pierde energía propia - $H_2 < H_1$)

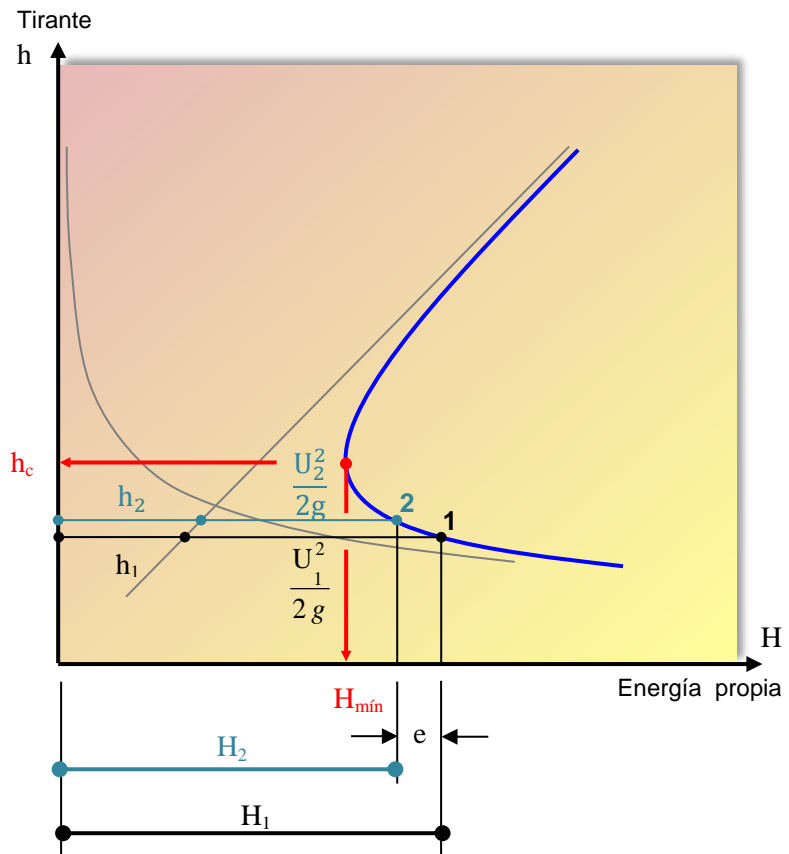


Figura 99 – Curva $H-h$ para la experiencia de Bakhmeteff en régimen lento.

En la curva $H-h$ (ver *Figura 99*), analizando sobre la abscisa:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Sección 1} &\rightarrow H_1 \left\{ \begin{array}{l} h_1 \quad (\text{coincidente con el mov. uniforme}) \\ \frac{U_1^2}{2g} \quad (\text{coincidente con el mov. uniforme}) \end{array} \right. \\ \bullet \text{ Sección 2} &\rightarrow H_2 \left\{ \begin{array}{l} h_2 \quad (\text{mayor que } h_1) \\ \frac{U_2^2}{2g} \quad (\text{menor que } \frac{U_1^2}{2g}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Conclusión:

Al depositar un volumen sólido en el fondo de un canal con un escurrimiento bajo régimen veloz, se genera una sobreelevación de la superficie libre en coincidencia con dicho volumen, y paralelamente se produce una disminución de la velocidad, según se constata en la curva $H-h$.

7.10. Influencia de la viscosidad.

Todo lo desarrollado hasta aquí con relación a los escurrimientos a superficie libre contempla que el líquido circulante del cual se trata es puntual y exclusivamente agua.

Las hipótesis de la fórmula desarrollada originalmente por Chézy estaban destinadas indiferentemente tanto para conductos a presión como a superficie libre. De hecho, la fórmula de Darcy-Weisbach que se utiliza frecuentemente en el cálculo de tuberías a presión con líquido newtoniano, adopta las conjeturas asumidas por Chézy.

Por ello, cuando se trata de cualquier tipo de líquido (incluyendo el agua), con la viscosidad que corresponda a cada caso según su temperatura, es aplicable la ecuación de Darcy-Weisbach, que si bien se difundió su uso para escurrimientos a presión, es igualmente aplicable a los escurrimientos a superficie libre con algunos ajustes.

La utilización del diagrama de Rouse o Moody en el cálculo de canales, implica el conocimiento de la relación entre las ecuaciones de Darcy-Weisbach y Chézy:

$$\bullet \text{ Darcy-Weisbach:} \quad j = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} = f \frac{1}{4R} \frac{U^2}{2g} \quad (173)$$

$$\bullet \text{ Chézy:} \quad j = j^* = i = \frac{U^2}{c^2 R} \quad (174)$$

Igualando (173) y (174):

$$j = f \frac{1}{4R} \frac{U^2}{2g} = \frac{U^2}{c^2 R} \Rightarrow$$

Así se obtiene el coeficiente de Chézy c en función del coeficiente de fricción f .

$$c = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (175)$$

O bien, el coeficiente de fricción f en función del coeficiente de Chézy c .

$$f = \frac{8g}{c^2} \quad (176)$$

Desde este punto de vista del análisis de la corriente en estudio, el escurrimiento se clasifica como laminar o turbulento, dependiendo de la magnitud correspondiente a la proporción entre las fuerzas de inercia y las viscosas. La base de esta clasificación es el número adimensional de Reynolds Re .

Particularmente en escurrimientos a través de canales se adopta como longitud característica al radio hidráulico R , por lo que para este caso el número de Reynolds se expresa según la fórmula (177).

$$Re = \frac{UR}{\nu} \quad (177)$$

El valor límite del régimen laminar es $Re = 550$, equivalente al número de Reynolds 2200 aplicado a tuberías circulares.

Si se trata de agua exclusivamente, el régimen en general es turbulento, por lo que se puede aplicar la ecuación de Colebrook-White con una corrección.

Pillai y Kazemipour-Apelt han desarrollado métodos sencillos y ajustados al cálculo de canales con circulación de agua, utilizando el diagrama de Rouse o Moody. Igualmente este tipo de metodologías no están lo suficientemente desarrolladas y ratificadas por la experiencia.

Por lo anteriormente expresado, siempre continuando en el caso del cálculo de escurrimientos a superficie libre con agua, se aconseja la utilización de la fórmula de Chézy con el coeficiente de Manning, ya que existe abundante información del coeficiente n y por otra parte se advierte un déficit de conocimiento relativo a la rugosidad equivalente k .

7.11. Criterio de diseño.

El proyecto de la sección transversal de un canal, en general consiste en definir y resolver dos partes específicas bien diferenciadas:

- Selección de la forma.
- Dimensionado.

a) Selección de la forma.

El primer paso consiste en establecer si el canal será del tipo de contorno abierto o contorno cerrado.

Frecuentemente, y de acuerdo a su uso particular se utilizan:

- Canales de contorno abierto:
 - Irrigación.
 - Abastecimiento a industrias.
 - Provisión a centrales hidroeléctricas.
 - Desagües pluviales rurales.
 - Cunetas de drenaje.
 - Navegación.

- Canales de contorno cerrado:
 - Suministro de agua potable.
 - Desagües pluviales urbanos.
 - Colectores cloacales.

A continuación se debe precisar la forma concreta de la sección, para lo cual el proyectista puede apoyarse en diversos formatos preestablecidos, auxiliado por las distintas morfologías detalladas en las *Figuras 14 y 19*, o bien recabando mayor información en bibliografía especializada.

El análisis que converge a la elección final de la conformación correspondiente a la sección, debe ser desarrollado estudiando simultáneamente el concepto de *sección conveniente* descrito en el punto 6.5.

En definitiva, la forma de la sección transversal a adoptar depende del destino para el cual se prevé el canal, la naturaleza de las paredes y la variable económica.

Las propiedades particulares del suelo, marcarán la inclinación apropiada del talud para que no produzcan deslizamientos a causa de la inestabilidad de los mismos (Ver *Figura 100 y Tabla 13*).

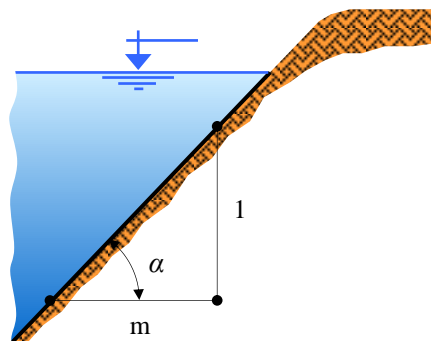


Figura 100 – Talud canal trapezoidal o tolva.

Tabla 13 Tabla de taludes máximos en canales de forma trapecial y tolva.

CARACTERÍSTICA DEL SUELO	INCLINACIÓN m	ÁNGULO α°
Roca firme.	0,00	90,00°
Roca fracturada.	0,25	75,96°
Arcilla compacta.	0,50	63,43°
Mampostería. Suelo compacto revestido con hormigón.	0,75	53,13°
Limo arcilloso. Suelo compacto revestido con gaviones.	1,00	45,00°
Limo arenoso.	1,50	33,69°
Arena suelta.	2,00	26,57°
Arena fina suelta. Arcilla porosa.	3,00	18,43°

b) Dimensionado.

El dimensionado se efectúa siguiendo la metodología indicada en el apartado 6.2., consistente en efectuar la resolución de la ecuación (76), la cual contiene en su 2º miembro a Q , n e i en calidad de datos, y en el 1º a $\Omega = f(h)$ y $\chi = f(h)$.

En esta instancia se acepta al gasto o caudal Q como un dato del problema, pero en realidad su magnitud es producto de un paso anterior, que puede o no corresponder al proyectista del canal. Dependiendo del tipo de aguas a transportar, el caudal Q de cálculo se deberá evaluar de distintas maneras según se trate de:

- Uso poblacional: Se calcula en función de la población a servir. Se puede tratar de abastecimiento de agua potable o colector cloacal.
- Riego: Se determina en base al módulo de riego, la superficie a regar y las pérdidas por infiltración.
- Desagüe pluvial: Se estima considerando las variables hidrológicas.
- Abastecimiento hidroeléctrico: ... Se deduce en función de la potencia que se prevé generar y la caída topográfica.

El coeficiente de rugosidad n es función del tipo de material constitutivo de las paredes en contacto directo con el líquido y se obtiene de tablas (Ver Tabla 4). Por ejemplo, si un canal se proyecta revestido con motivo de prever socavaciones o disminuir pérdidas por infiltraciones, seguramente el valor de n de la cobertura será inferior al del terreno natural. Esta circunstancia implica que para transportar un mismo caudal Q con una determinada pendiente i , el canal se puede materializar

disminuyendo la sección Ω , situación que conlleva a mover un menor volumen de suelos para su construcción.

Referente a la pendiente longitudinal i , como primera premisa se sugiere copiar la misma pendiente del terreno, a los efectos de minimizar las tareas de excavación. A partir de este concepto surge la posibilidad que la pendiente natural sea lo suficientemente grande para ocasionar socavación, ante lo cual se puede optar por 2 alternativas:

- Revestir el canal con un material más resistente, tal que el nuevo límite $U_{\text{máx}}$ admisible sea superior a la velocidad de escurrimiento media U .
- Disminuir la pendiente i hasta lograr que se cumpla $U < U_{\text{máx}}$ a expensas de un mayor movimiento de suelos. O bien concretar esa disminución de pendiente construyendo obras adicionales consistentes en saltos puntuales materializados con estructuras ejecutadas en general de hormigón o gaviones (Ver *Figura 101*).

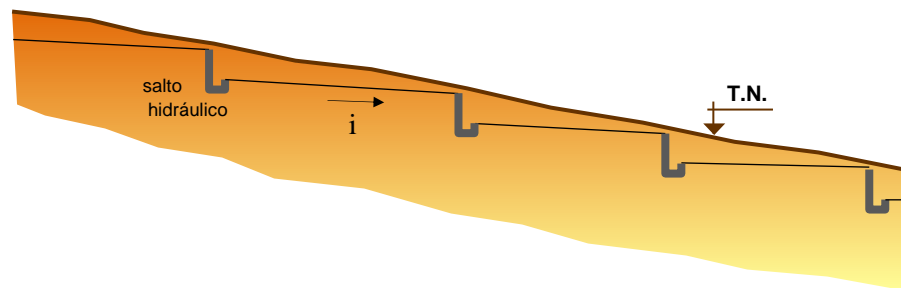


Figura 101 – Canal con saltos hidráulicos.

Las relaciones a adoptar, según la forma de la sección seleccionada entre el tirante h y una de sus longitudes características a fin de resolver la ecuación (76), se definen en función del tipo de suelo y de las características topográficas y urbanas del emplazamiento. No habiendo mayores limitaciones, se recomienda optar preferiblemente por una relación que cumpla la condición de máximo caudal (o mínima resistencia), de modo de optimizar el escurrimiento hidráulico.

Una vez calculada todas las dimensiones geométricas se deben realizar por último 3 verificaciones:

- $U \leq U_{\text{máx}}$: condición para evitar socavaciones.
- $U \geq U_{\text{mín}}$: requisito para prevenir embancamientos.
- $H \geq 1,05 H_{\text{mín}}$: limitación para impedir la generación de ondas superficiales.

8. ESCURRIMIENTOS CON MOVIMIENTO BRUSCAMENTE VARIADO.

Los escurrimientos en canales con movimiento permanente ($dQ/dt = 0$) y variado ($dU/dt \neq 0$) se caracterizan por la modificación que experimenta la velocidad respecto al recorrido. En hidráulica, cuando se alude a una brusca variación del movimiento, en general se refiere a los *resaltos hidráulicos*, también llamados por algunos autores simplemente como saltos hidráulicos.

8.1. Resalto hidráulico.

El resalto hidráulico es un fenómeno localizado, mediante el cual se manifiesta de forma muy brusca el pasaje de un régimen lento o subcrítico a otro veloz o supercrítico. De esta definición se desprende que se trata de un ascenso abrupto del nivel líquido que se presenta en un canal como consecuencia del retardo que sufre una corriente cuando escurre a una elevada velocidad ($U > U_c$) y pasa a otra de baja velocidad ($U < U_c$).

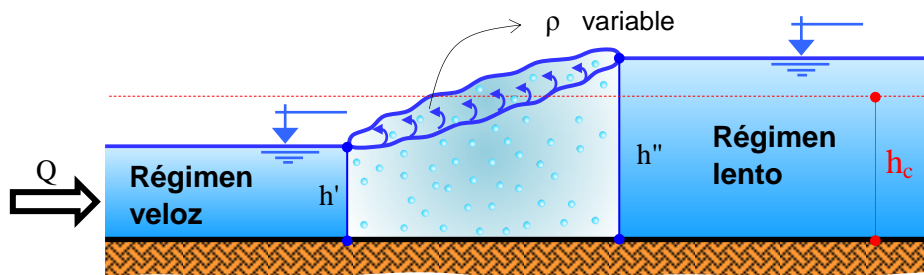


Figura 102 – Resalto hidráulico.

Su formación, la cual ocurre como consecuencia del encuentro entre un régimen veloz con otro lento, cada uno con sus respectivas características, genera un vórtice de eje perpendicular al escurrimiento.

Los respectivos tirantes h' y h'' , al comienzo y al final del resalto, se denominan *tirantes conjugados*. La distancia de separación entre ellos se llama *longitud del resalto* Δl_R y la diferencia ($h'' - h'$) es la *altura del resalto*.

Una vez establecido el resalto hidráulico, su permanencia es relativa ya que la misma es pulsante y está acompañada de:

- gran agitación.
- turbulencia continua.
- incorporación de aire en la masa líquida.
- formación de espuma.
- grandes pérdidas de energía hidráulica.

8.2. Clasificación.

Los resaltos hidráulicos se clasifican en 3 tipos, según la relación entre los tirantes conjugados h' y h'' :

a) Resalto vivo.

También conocido como netamente destacado o de Bidone, en reconocimiento al matemático e hidráulico italiano Giorgio Bidone (1781 – 1839) por sus investigaciones y experiencias con los resaltos hidráulicos.

Condición:

$$h'' \geq 2 h'$$

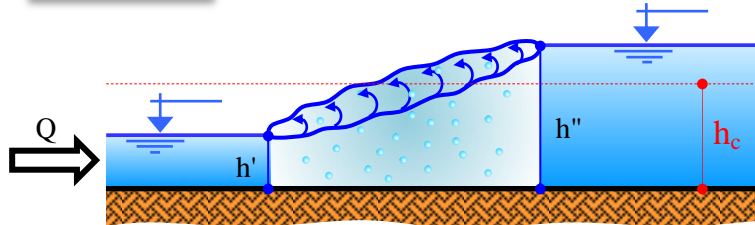


Figura 103 – Resalto vivo o de Bidone.

Prácticamente se alcanza la cota superior por un ascenso continuo de la superficie libre.

b) Resalto ondulado.

Condición:

$$1,1 h' \leq h'' < 2 h'$$

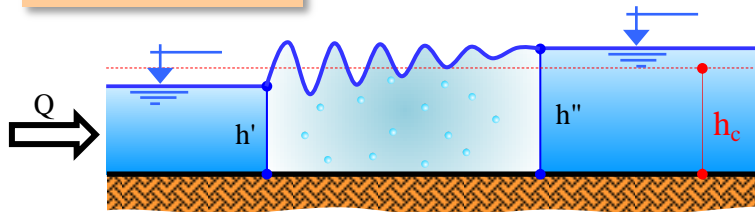


Figura 104 – Resalto ondulado.

Este tipo es característico en resaltos de pequeña altura. Se observa por lo general en cursos naturales de agua con pendiente moderada.

La transición del nivel inferior al superior tiene lugar mediante una serie de ondulaciones de altura gradualmente decreciente.

c) Resalto a contrapendiente.

Condición:

$$h'' < 1,1 h'$$

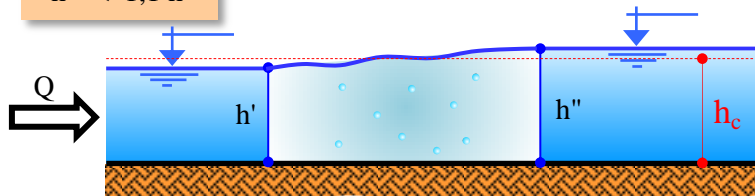


Figura 105 – Resalto a contrapendiente.

Para que realmente se produzca el resalto es condición necesaria que los dos tirantes conjugados h' y h'' sean distintos del tirante crítico h_c .

También, y como tendencia más actualizada, los resaltos hidráulicos se clasifican en función del número de Froude Fr (ver punto 8.8.).

8.3. Resalto vivo.

La forma del resalto vivo es típica de los resaltos de altura importante. En la zona de expansión subyacente, cubierta por un rulo superficial, las partículas describen circuitos cerrados que no participan del movimiento general de traslación de masas. (Ver *Figura 106*).

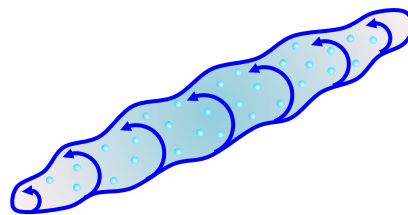


Figura 106 – Rulo superior del resalto vivo

Algunas veces es necesario provocar el resalto, pues es un elemento capaz de disipar mucha energía y erosionar las paredes del canal que lo contiene. En los proyectos en los cuales es necesario intercalar un resalto hidráulico, deben diseñarse de manera que se produzca un *resalto vivo* y quede convenientemente ubicado dentro de una estructura prevista para que no se dañe el curso o canal.

En la etapa de proyecto donde se forma el *resalto vivo*, debe reforzarse y estudiarse convenientemente el revestimiento, el que debe ser altamente resistente a la erosión.

El resalto hidráulico se suele considerar como un fenómeno permanente solo a los efectos de su presentación, o bien de forma casi estable en un lapso de tiempo, es decir una posición media representativa de un hecho más precisamente pulsante que se refiere tanto al pie como a la cresta del mismo. En tales circunstancias no siempre es fácil definir con exactitud el comienzo y el final del resalto, ya que todo depende del tipo de este y las circunstancias que rodean al fenómeno.

Por ejemplo, en un resalto vivo es fácil situar el comienzo, por existir una línea de separación inconfundible que se forma entre la superficie tersa anterior y el rulo del resalto. En cambio en el resalto ondulado, el régimen veloz anterior al resalto es uniforme y fácilmente ubicable, pero es prácticamente imposible delimitar el final, ya que las ondas, de pequeñas curvaturas, cubren una zona extensa y para nada definida.

Consecuentemente las evaluaciones de las características de un resalto contienen fuertes componentes empíricas basadas en la experimentación.

Dada la naturaleza aleatoria y pulsante de los resaltos, surge la necesidad de conocer al menos las siguientes características para resolver los problemas que se plantean:

- tirantes conjugados.
- longitud del resalto.
- pérdida de energía.
- localización o emplazamiento.

8.3.1. Tirantes conjugados.

En la *Figura 107* se esquematiza el corte longitudinal de un escurrimiento a superficie libre con un resalto vivo intercalado, el fondo del canal horizontal y los tirantes conjugados claramente acotados. Simultáneamente y de forma superpuesta se grafican las secciones transversales al inicio y fin del resalto.

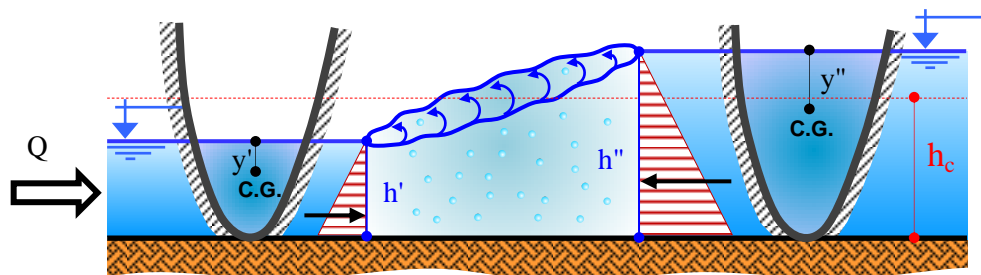


Figura 107 – Tirantes conjugados de un resalto vivo.

a) Función momenta o momentum.

Dada la naturaleza del resalto resulta inaplicable la ecuación de Bernoulli, ya que en el interior del mismo y a consecuencia de la incorporación de aire, la densidad ρ es sumamente variable. Además las líneas de corriente resultan muy curvas, por lo cual no se cumplen las reglas de Bresse.

En estas condiciones solo se puede aplicar:

- Ecuación de continuidad.

Como el movimiento es permanente se tiene que la ecuación de continuidad aplicada a las secciones conjugadas es:

$$Q = U' \Omega' = U'' \Omega'' \tag{178}$$

- Ecuación de cantidad de movimiento.

Es aplicable al volumen de control, considerado en este caso como la porción de masa fluida que contiene el resalto hidráulico sin ningún condicionamiento particular. Por consiguiente, y para un estudio general, la acción dinámica \mathbf{A} es una magnitud vectorial que responde a la expresión:

$$\mathbf{A} = \rho Q (\beta' \mathbf{U}' - \beta'' \mathbf{U}'') + \Sigma \mathbf{f} \tag{179}$$

O bien:

$$A = \rho Q (\beta' U' - \beta'' U'') + [\Sigma F_m + \Sigma F_\mu + \Sigma F_p] \quad (180)$$

Suponiendo que el canal es horizontal (de hecho esa hipótesis es muy próxima a la realidad ya que en general las pendientes longitudinales i son muy pequeñas) y analizando la acción dinámica sobre el eje longitudinal l coincidente con la solera del canal, se observa que en la dirección del escurrimiento no existe ningún contorno sólido, por lo que la acción en dicha orientación resulta ser nula. Ver *Figura 7-108*.

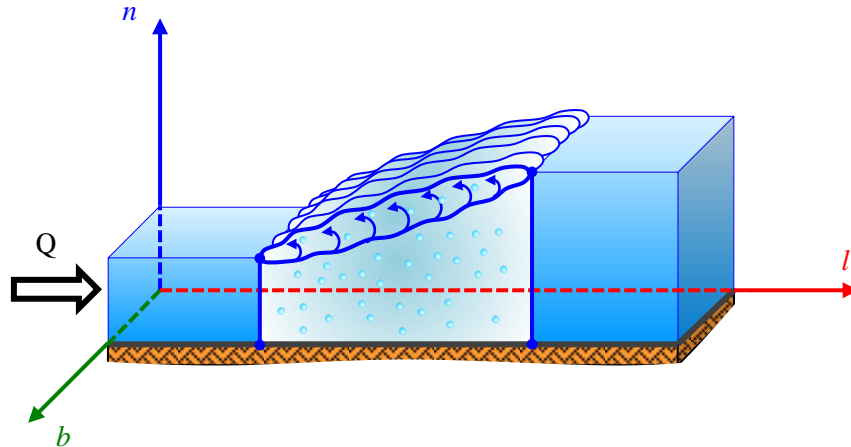


Figura 7-108 – Resalto vivo relacionado con la terna intrínseca.

Entonces la ecuación (7-179) se transforma de la siguiente manera:

$$A_l = \rho Q (\beta' U' - \beta'' U'') + \Sigma f_l = 0 \quad (181)$$

O sino:

$$A_l = \rho Q (\beta' U' - \beta'' U'') + [\Sigma (F_m)_l + \Sigma (F_\mu)_l + \Sigma (F_p)_l] = 0 \quad (182)$$

Complementando el estudio, a continuación se adoptan las siguientes hipótesis que tienen validez tecnológica por su semejanza con la realidad y simultáneamente simplifican la resolución del problema:

- Coeficiente de Boussinesq $\beta = 1$ (183)
- Canal horizontal en el tramo del resalto. La fuerza de masa actuante no es más que el peso propio, el cual actúa normal al eje longitudinal l , por lo cual se tiene:

$$\Sigma (F_m)_l = (\rho g \Delta V)_l = 0 \quad (184)$$

- Se desprecian las pérdidas por frotamiento en las paredes por ser insignificantes frente a las pérdidas propias del resalto. Entonces:

$$\sum \mathbf{F}_\mu = 0$$

$$\begin{cases} \sum (F_\mu)_l = 0 \\ \sum (F_\mu)_n = 0 \\ \sum (F_\mu)_b = 0 \end{cases} \quad (185)$$

Reemplazando (183), (184) y (185) en (182):

$$A_l = \rho Q (U' - U'') + \sum (F_p)_l = 0 \quad (186)$$

El término $\sum \mathbf{f}$ en la dirección longitudinal l se compone solo de las fuerzas correspondientes a la presión $\sum (F_p)_l$. Por lo tanto:

$$\sum (F_p)_l = p' \Omega' - p'' \Omega'' \quad (187)$$

Por lo que reemplazando (187) en (186) y luego agrupando:

$$\begin{aligned} \rho Q (U' - U'') + p' \Omega' - p'' \Omega'' &= 0 \quad \Rightarrow \\ \rho Q U' + p' \Omega' &= \rho Q U'' + p'' \Omega'' \end{aligned} \quad (188)$$

Considerando la *altura baricéntrica* y (distancia entre la superficie libre y el centro de gravedad) en cada una de las secciones correspondientes con los tirantes conjugados y teniendo en cuenta que $U = Q/\Omega$ la expresión (188) se modifica:

$$\rho \frac{Q^2}{\Omega'} + \gamma \Omega' y' = \rho \frac{Q^2}{\Omega''} + \gamma \Omega'' y''$$

Dividiendo la ecuación anterior por el peso específico γ y recordando que a su vez $\gamma = \rho g$:

$$\frac{Q^2}{g \Omega'} + \Omega' y' = \frac{Q^2}{g \Omega''} + \Omega'' y'' \quad (189)$$

A la forma de la función (189), y en general para cualquier tipo de sección considerada, se la define como función *momenta* o *momentum* M .

$$M = \frac{Q^2}{g \Omega} + \Omega y \quad (190)$$

La ecuación dimensional determina sencillamente que la unidad de la función momenta M es L^3 .

La expresión (189), aplicada exclusivamente a las secciones conjugadas de un resalto vivo, indica que por más disímiles que sean las variables intervinientes, la misma presenta el mismo valor. Por lo tanto, en los resaltos vivos, es condición necesaria que los tirantes conjugados h' y h'' deban cumplir:

$$M' = M'' \quad (191)$$

En efecto, como a la sección Ω' le corresponde un solo tirante h' y a la sección Ω'' otro solo tirante h'' , resulta que la condición para la formación de un resalto vivo implica la existencia de dos tirantes conjugados que satisfagan la ecuación (191).

Si el resalto hidráulico se produce en un canal de pendiente apreciable, no se puede obviar en el cálculo el efecto del peso propio del agua y consecuentemente deja de ser válida la ecuación de momenta. A pesar de ello, la solución se puede encaminar empleando una expresión análoga a la ecuación de momenta, complementada por un ajuste con una función empírica que debe determinarse experimentalmente.

b) Condición de mínima momenta.

La ecuación (190) correspondiente a la función momenta está compuesta entre otros términos por:

- Sección transversal. $\Omega = f(h)$
- Altura baricéntrica. $y = f(h)$

Por lo tanto, la momenta o momentum M es consecuentemente también función del tirante h .

$$M = \frac{Q^2}{g \Omega} + \Omega y = f(h) \quad (192)$$

En los dos extremos límites del tirante h la función momenta M se hace infinita:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si: } h \rightarrow 0 \Rightarrow M \rightarrow \infty \\ \text{Si: } h \rightarrow \infty \Rightarrow M \rightarrow \infty \end{array} \right\} \therefore M = f(h) \text{ debe pasar por un } \textit{valor mínimo}.$$

Los límites previos prueban la existencia de un valor mínimo de la función momenta M_{\min} para un determinado tirante h intermedio. El mismo se obtiene haciendo nula la derivada de la función M correspondiente a la ecuación (192) respecto de h .

$$\frac{dM}{dh} = \frac{d}{dh} \left(\frac{Q^2}{g \Omega} + \Omega y \right) = - \frac{Q^2}{g \Omega^2} \frac{d\Omega}{dh} + \frac{d(\Omega y)}{dh} = 0 \quad (193)$$

- Cálculo del segundo término $\frac{d(\Omega y)}{d h}$.

Se aplica la definición de derivada considerando que el producto (Ωy) es el momento estático de la sección respecto de un eje coincidente con la superficie libre.

Dando un pequeño incremento Δh en el tirante de la sección original Ω (ver *Figura 109*), el momento estático respecto a un eje que pasa por la nueva superficie libre será:

$$\Omega (y + \Delta h) + B \Delta h \frac{\Delta h}{2}$$

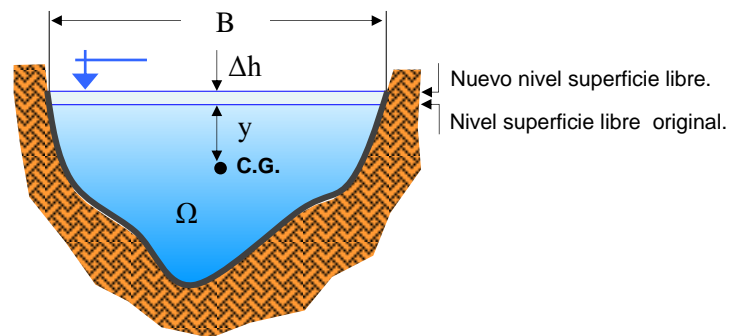


Figura 109 – Variación momento estático.

El incremento de la función momento estático es igual a la diferencia entre el correspondiente a la sección inicial al aumento Δh del tirante.

$$\Delta(\Omega y) = \left[\Omega (y + \Delta h) + \frac{1}{2} B \Delta h^2 \right] - (\Omega y)$$

$$\Delta(\Omega y) = \Omega \Delta h + \frac{1}{2} B \Delta h^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta(\Omega y)}{\Delta h} = \Omega + \frac{1}{2} B \Delta h \quad (194)$$

Diferenciando la ecuación (7-194):

$$\frac{d(\Omega y)}{d h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta(\Omega y)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\Omega + \frac{1}{2} B \Delta h \right)$$

$$\frac{d(\Omega y)}{d h} = \Omega \quad (195)$$

Reemplazando (195) en (193) y recordando que $\frac{d\Omega}{dh} = B$:

$$\frac{dM}{dh} = -\frac{Q^2}{g\Omega^2} \frac{d\Omega}{dh} + \frac{d(\Omega y)}{dh} = -\frac{Q^2}{g\Omega^2} B + \Omega = 0$$

Dividiendo por la sección Ω :

$$-\frac{Q^2 B}{g\Omega^3} + 1 = 0$$

Agrupando convenientemente se arriba mediante este otro razonamiento a la condición de escurrimiento crítico:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega^3}{B} \tag{196}$$

Como consecuencia de la anterior deducción se concluye que la mínima momenta M_{\min} se produce en correspondencia con el tirante crítico h_c .

c) Tirantes conjugados.

Primeramente se define a la *altura del resalto hidráulico* Δh_R como la diferencia entre las cotas de nivel superficial correspondientes a la secciones conjugadas Ω'' y Ω' . Si se cumple la hipótesis de fondo horizontal o pendiente muy pequeña, se fija su longitud haciendo simplemente la diferencia entre los tirantes conjugados h'' y h' . Ver *Figura 110*.

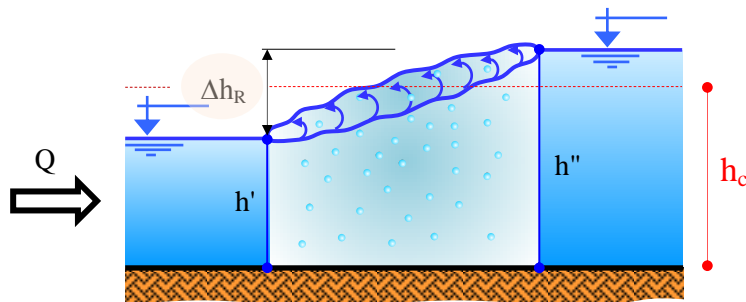


Figura 110 – Altura del resalto.

Los tirantes conjugados h' y h'' se determinan muy fácilmente, pero para ello se debe conocer a priori la función momenta $M = f(h)$ y los tirantes uniformes aguas arriba h_{u1} y aguas abajo h_{u2} . El cálculo se realiza siguiendo una regla práctica muy sencilla que conduce a una única solución, la cual es que se verifique una de las tres siguientes condiciones (ver *Figura 111*):

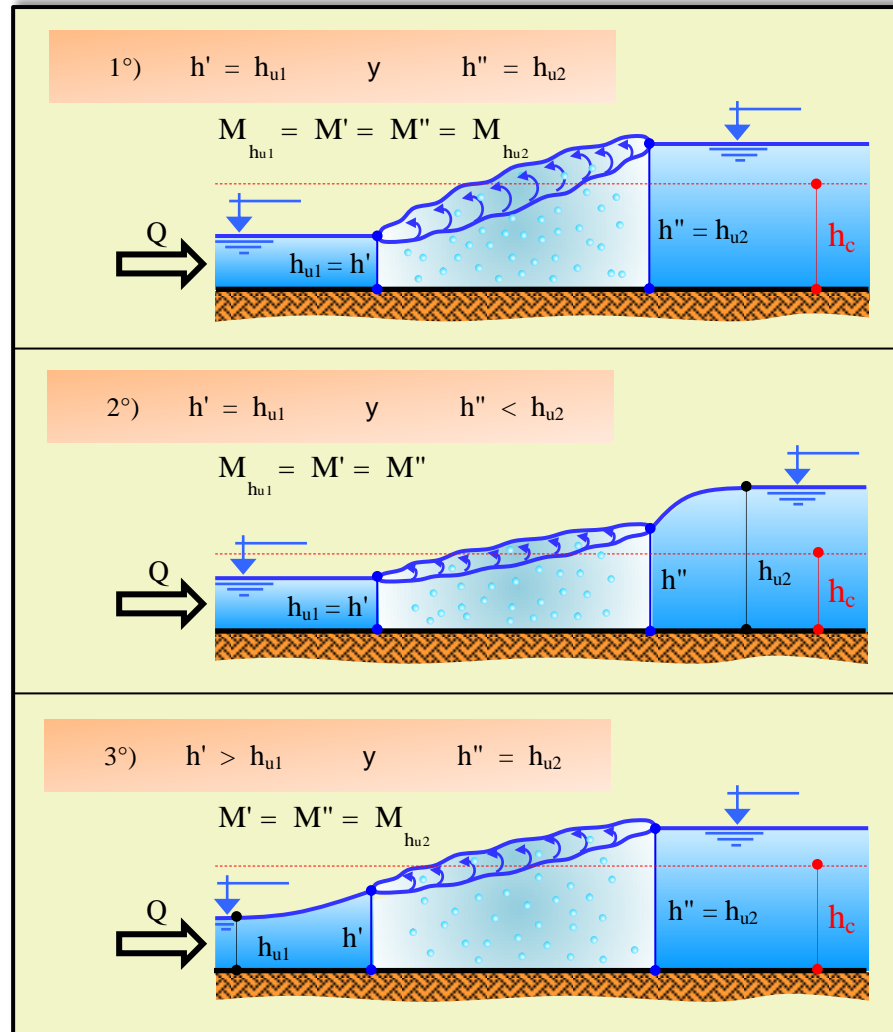


Figura 111 – Opciones de los tirantes conjugados en un resalto vivo.

Se puede apreciar en los gráficos, que en cualquiera de las posibles tres situaciones, el resalto está ubicado con las siguientes limitaciones de sus respectivos tirantes extremos:

- $h' \geq h_{u1}$
- $h'' \leq h_{u2}$

Por consiguiente se descarta la existencia de resaltos donde el tirante conjugado $h' < h_{u1}$ y/o $h'' > h_{u2}$.

Para un mejor entendimiento del procedimiento resolutivo se adopta, por ejemplo, un canal donde el tirante uniforme $h_{u1} < h_c$ (régimen veloz) pasa a otro $h_{u2} > h_c$ (régimen lento) mediante la generación de un resalto hidráulico intercalado. En la Figura 112 se ha graficado la curva $M - h$ correspondiente a este caso particular, donde se indica la delimitación que imponen los tirantes uniformes (zona coloreada) h_{u1} y h_{u2} entre los que se pueden ubicar solamente los tirantes conjugados h' y h'' .

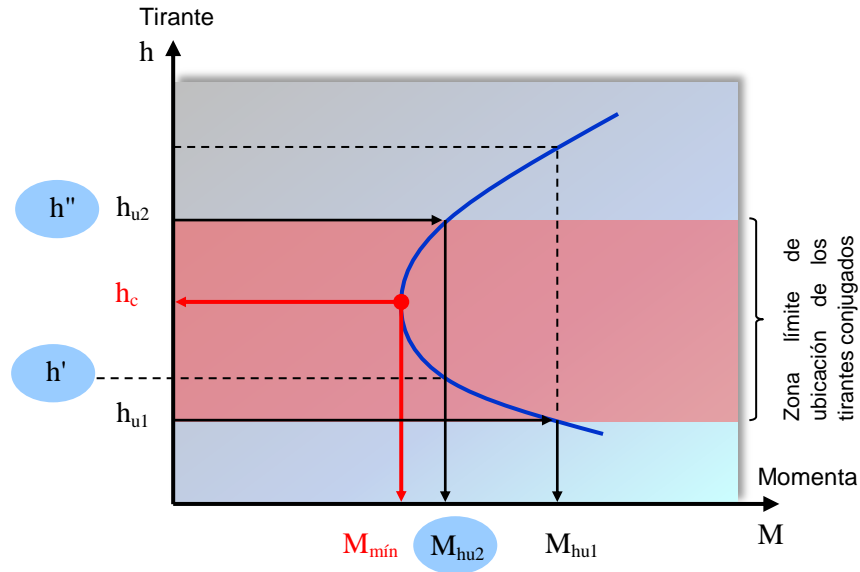


Figura 112 – Curva M – h para el cálculo de los tirantes conjugados.

Tal como se ha probado, las momentas de los tirantes conjugados deben ser iguales $M' = M''$ y en esta demostración se verifica con la ayuda de la curva M – h el cumplimiento o no de cada uno de los condicionantes detallados en la Figura 111:

1º) Condición.

De la curva M – h → $M_{hu1} \neq M_{hu2}$

Conclusión: No cumple.

2º) Condición.

De la curva M – h → para $M_{hu1} = M' = M''$

$$\Rightarrow \begin{cases} h' = h_{u1} \\ h'' > h_{u2} \end{cases}$$

Conclusión: No cumple.

3º) Condición.

De la curva M – h → para $M_{hu2} = M' = M''$

$$\Rightarrow \begin{cases} h' > h_{u1} \\ h'' = h_{u2} \end{cases}$$

Conclusión: **Sí cumple.**

La condición resolutive para el presente ejemplo corresponde al tercer condicionante, que es el único que cumple con la regla práctica y por lo tanto, en el escurrimiento, se va a generar previamente una curva de remanso entre los tirantes h_{u1} y h' para luego producirse el resalto hidráulico entre h' y h'' .

Si se trata de una sección rectangular en particular, la relación entre los tirantes conjugados h' y h'' depende exclusivamente del número de Froude Fr' en la sección entrante del resalto. En efecto, partiendo con el conocimiento que la función momenta es igual en las secciones conjugadas ($M' = M''$), se tiene de la ecuación (7-189):

$$\frac{Q^2}{g B h'} + B h' \frac{h'}{2} = \frac{Q^2}{g B h''} + B h'' \frac{h''}{2} \tag{197}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{g B} \left(\frac{U' B h'}{h'} - \frac{U'' B h''}{h''} \right) = \frac{1}{2} B (h''^2 - h'^2)$$

$$\Rightarrow \frac{U' B h'}{g B} (U' B - U'' B) = \frac{1}{2} B (h''^2 - h'^2)$$

$$\Rightarrow \frac{U' h'}{g} (U' - U'') = \frac{1}{2} (h''^2 - h'^2) \tag{198}$$

De la ecuación de continuidad:

$$U'' = U' \frac{h'}{h''} \tag{199}$$

Reemplazando (199) en (198):

$$\frac{U'^2 h'}{g} \left(1 - \frac{h'}{h''} \right) = \frac{1}{2} (h''^2 - h'^2) (h'' + h')$$

$$\Rightarrow \frac{U'^2 h'}{g} \frac{(h'' - h')}{h''} = \frac{1}{2} (h'' - h') (h'' + h')$$

$$\Rightarrow \frac{2 U'^2 h'}{g} = h'' (h'' + h')$$

$$\therefore \underbrace{1}_{a} h''^2 + \underbrace{h'}_{b} h'' - \underbrace{\frac{2 U'^2 h'}{g}}_{c} = 0 \tag{200}$$

La expresión (200) corresponde a una ecuación de segundo grado, cuyas raíces resolutorias se determinan aplicando la fórmula de Bhaskara.

$$h'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-h' \pm \sqrt{h'^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{-2 U'^2 h'}{g}\right)}}{2 \cdot 1}$$

Solo tiene sentido físico la raíz cuadrada positiva:

$$h'' = \frac{-h' + \sqrt{h'^2 + \frac{8 U'^2 h'}{g}}}{2} = \frac{-h' + h' \sqrt{1 + 8 \frac{U'^2}{g h'}}}{2}$$

Finalmente se obtiene la relación entre los tirantes conjugados de un resalto hidráulico en un canal de sección rectangular, conocida como la *ecuación de Belanger*.

$$\frac{h''}{h'} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 Fr'^2} - 1 \right] \quad (201)$$

8.3.2. Longitud del resalto.

Por su naturaleza aleatoria, la longitud de los resaltos hidráulicos Δl_R , hace que tenga que ser definida empíricamente en base a experiencias e investigaciones en laboratorio.

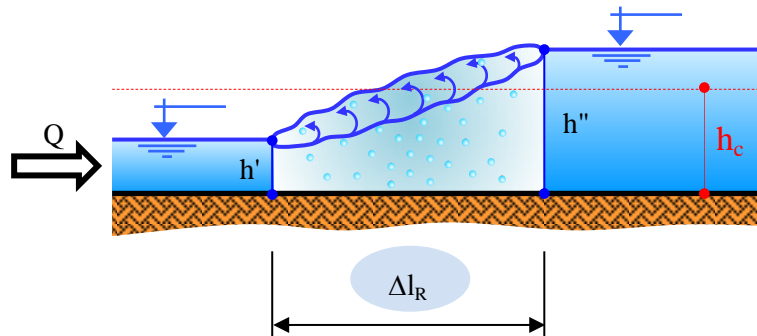


Figura 113 – Longitud del resalto.

En general son expresiones en función de los tirantes conjugados, que según distintos autores adoptan los siguientes valores:

- Enrique Becerril (España) $\Delta l_R = 6,0 (h'' - h')$
- Boris Bakhmeteff (Rusia - EEUU) $\Delta l_R = 4,5 (h'' - h')$
- Adolfo Ludin (Alemania) $4,0 (h'' - h') \leq \Delta l_R \leq 4,5 (h'' - h')$
- E. Wóycicki (Polonia) $\Delta l_R = (h'' - h') (8 - 0,05 h''/h')$

Otras experiencias vinculan la longitud del resalto Δl_R con el número de Froude en la sección entrante Fr' :

- Richard Silvester (Australia - EEUU) $\Delta l_R = 9,75 h' (Fr' - 1)^{1,01}$
- Kurt Safranez (Alemania) $\Delta l_R = 5,90 h' Fr'$
- Josef Einwachter (Alemania) $\Delta l_R = 8,30 h' (Fr' - 1)$
- Pavlovsky (México) $\Delta l_R = h' [2,375 (1 + 8 Fr'^2)^{1/2} - 4,875]$
- Chertusov (Rusia) $\Delta l_R = 10,30 h' (Fr' - 1)^{0,81}$

En la práctica, dada la divergencia de valores entre las distintas fórmulas por lo aleatorio del fenómeno, es recomendable adoptar como longitud de cálculo la que resulta de mayor magnitud, tomando además una revancha adicional a los efectos de estar situados del lado de la seguridad.

Lo expuesto se sustenta en la necesidad de prever los efectos nocivos del resalto a consecuencia de su naturaleza abrasiva y perjudicial, y también limitar claramente la posición en una zona donde, de ser necesario, se ejecutarán obras de revestimiento para contrarrestar su acción destructiva.

8.3.3. Localización del resalto.

El resalto hidráulico es un elemento que destruye energía (principalmente cinética) y en muchos casos es necesario provocarlo. Su presencia puede ocasionar socavación y para evitar ello es necesario prever tareas de sobrecubrimiento con materiales resistentes justamente en coincidencia con el mismo.

Esa circunstancia hace imprescindible conocer con precisión el emplazamiento donde se va a producir el resalto, para lo cual se debe saber lo que sucede tanto aguas arriba como aguas abajo del mismo.

Para una mejor comprensión del procedimiento, se muestran y detallan dos ejemplos genéricos:

- Ejemplo 1 - Paso de un canal con fuerte pendiente a otro con débil pendiente.
 - a) Se determinan los tirantes conjugados h' y h'' según lo indicado en el apartado 8.3.1. En este caso:
 - $h' = h_{u1}$
 - $h'' < h_{u2}$
 - b) Entre los tirantes h'' y h_{u2} se produce una curva de remanso. Dicha curva se traza siguiendo la metodología descrita en el apartado 9.5., partiendo desde el tirante h_{u2} hasta cortar el tirante h'' .
 - c) El punto de corte se corresponde con la sección saliente del resalto hidráulico.
 - d) Con la longitud Δl_R calculada según el apartado 8.3.2. se determina el comienzo del resalto, quedando ubicado definitivamente el mismo (ver *Figura 114*).

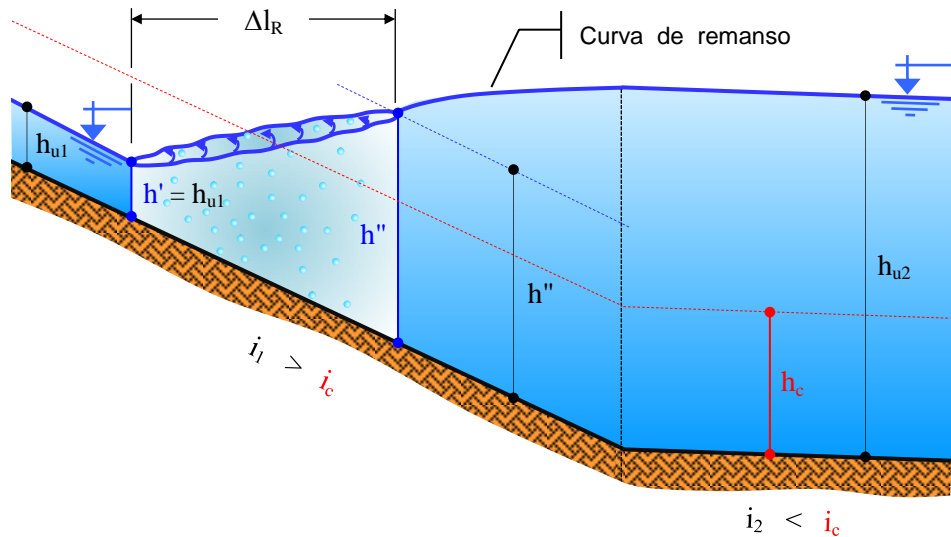


Figura 114 – Localización del resalto aguas arriba de la singularidad.

- Ejemplo 2 - Canal de débil pendiente con compuerta parcialmente abierta.
 - a) Se determinan los tirantes conjugados h' y h'' según las indicaciones señaladas en el punto 8.3.1. Particularmente en este ejemplo:
 - $h' > h_{u1}$
 - $h'' = h_{u2}$
 - b) Una curva de remanso se genera entre los tirantes h_{u1} y h' . Se grafica la misma de acuerdo al procedimiento expuesto en el apartado 7-9.5., comenzando en la sección 1 con el tirante h_{u1} hasta intersectar el tirante h' .
 - c) El punto de encuentro entre la curva de remanso y el tirante h'' , indica la posición donde comienza el resalto hidráulico.
 - d) Calculando separadamente la longitud Δl_R según se ha detallado en el punto 8.3.2., se define el final del resalto, determinando precisamente el emplazamiento del mismo (ver Figura 115).

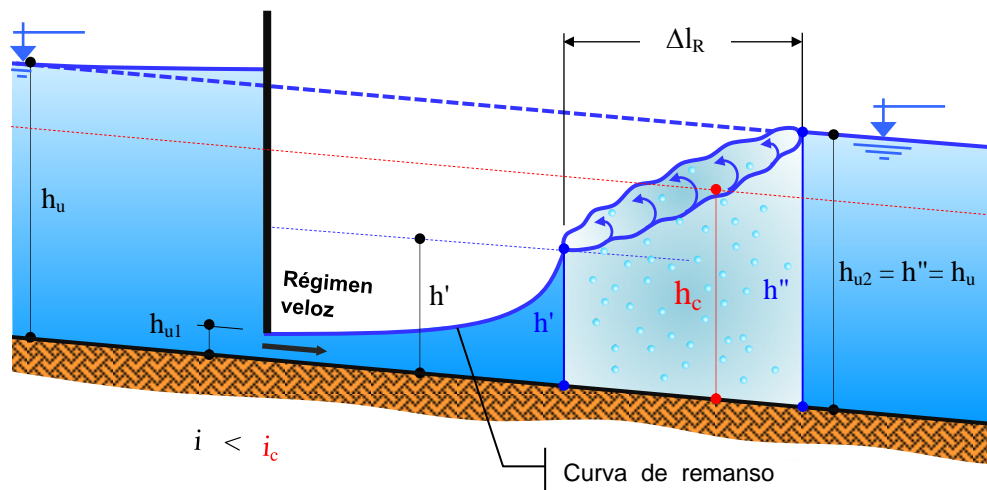


Figura 115 – Localización del resalto aguas abajo de la singularidad.

8.3.4. Pérdida de energía del resalto.

La pérdida de energía hidráulica que disipa un resalto se determina como la diferencia de las energías totales al comienzo y al final del mismo. Esa consideración resulta ser también igual a la diferencia de energías propia $H' - H''$ si el fondo del canal es horizontal o bien su pendiente longitudinal i es lo suficientemente pequeña para considerarse despreciable.

En efecto, si bien la ecuación de Bernoulli en el recorrido del resalto es inaplicable, sí se puede proceder al cálculo de las energías en los extremos, en coincidencia con los tirantes conjugados, las cuales por diferencia permitirán cuantificar la pérdida de energía total del salto hidráulico. Ver *Figura 116*.

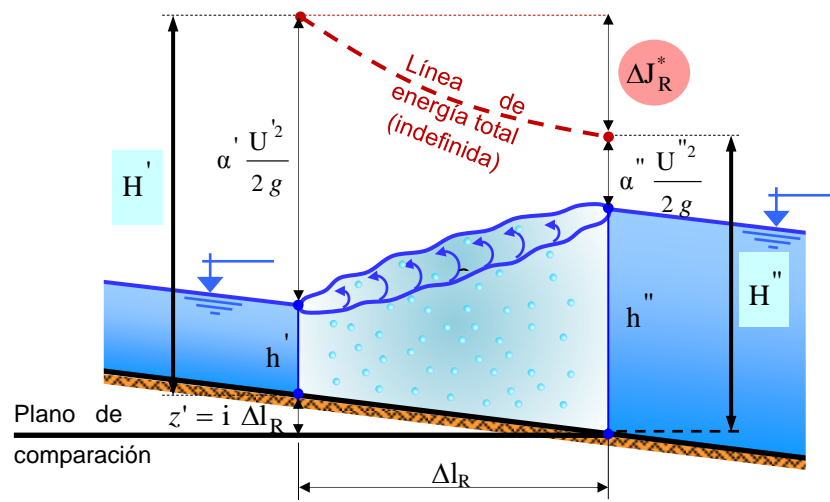


Figura 116 – Pérdida de energía del resalto hidráulico.

$$z' + \underbrace{h' + \alpha \frac{U'^2}{2g}}_{H'} = 0 + \underbrace{h'' + \alpha \frac{U''^2}{2g}}_{H''} + \Delta J_R^* \quad (202)$$

Asumiendo que en coincidencia con el resalto el canal es horizontal, o bien la pendiente es lo suficientemente pequeña tal que el término $i \Delta l_R$ se puede despreciar.

$$i \Delta l_R + H' = H'' + \Delta J_R^* \Rightarrow$$

se desprecia

Entonces la ecuación (202) se reduce a:

$$\Delta J_R^* \cong H' - H'' \quad (203)$$

En la *Figura 117* y a partir de la gráfico $H = f(h)$ se puede visualizar de forma directa la pérdida de energía del resalto hidráulico como la variación de la energía propia ΔH .

$$\Delta J_R^* \cong H' - H'' = \Delta H \quad (204)$$

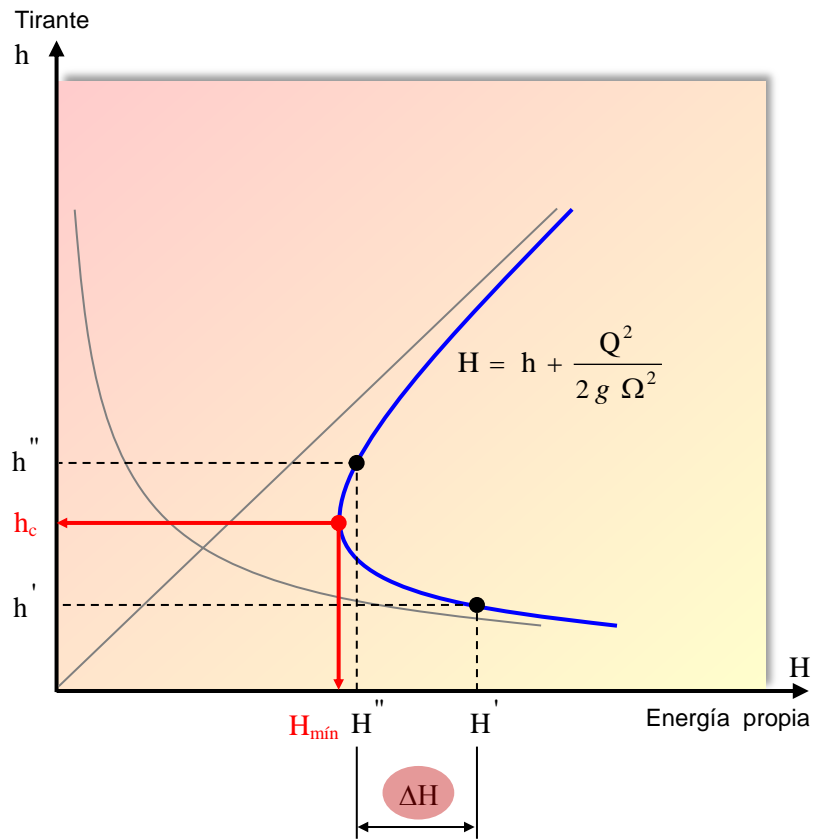


Figura 117 – Variación de la energía propia en el resalto hidráulico.

Independientemente de lo expresado y a los efectos de una mejor y más completa evaluación, se define como *eficiencia del resalto hidráulico* a la relación entre la energía propia posterior al mismo H'' y la anterior H' , la que a su vez generalmente esta expresada en porcentaje.

$$\text{Eficiencia} = \frac{H''}{H'} \tag{205}$$

Si el canal es de forma rectangular, la eficiencia se puede cuantificar sencillamente conociendo el número de Froude Fr' al inicio del resalto. Considerando el coeficiente de Coriolis muy próximo a la unidad en ambas secciones conjugadas $\alpha' \approx \alpha'' \approx 1$, se tiene:

$$H' = h' + \frac{U'^2}{2g} = h' + \frac{U'^2}{2g} \frac{h'}{h'} = h' \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2} Fr'^2 \right) =$$

$$H' = \frac{1}{2} h' (2 + Fr'^2) \tag{206}$$

$$H'' = h'' + \frac{U''^2}{2g} = h'' + \frac{U''^2}{2g} \frac{h'}{h'} \tag{207}$$

- De la ecuación de continuidad:

$$Q = U' h' B = U'' h'' B \quad \Rightarrow$$

$$U'' = U' \frac{h'}{h''} \quad (208)$$

Remplazando (208) en (207):

$$H'' = h'' + \frac{U'^2}{2g} \frac{h'}{h'} \left(\frac{h'}{h''} \right)^2 \quad (209)$$

- De la ecuación (201):

$$h'' = h' \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr'^2} - 1 \right) \quad (210)$$

$$\frac{h'}{h''} = \frac{2}{\sqrt{1 + 8Fr'^2} - 1} \quad (211)$$

Sustituyendo (210) y (211) en (209):

$$H'' = \frac{1}{2} h' \left[\sqrt{1 + 8Fr'^2} - 1 + \frac{4Fr'^2}{\left(\sqrt{1 + 8Fr'^2} - 1 \right)^2} \right] \quad (212)$$

Haciendo el cociente entre (212) y (206) se obtiene la eficiencia del resalto para un canal rectangular:

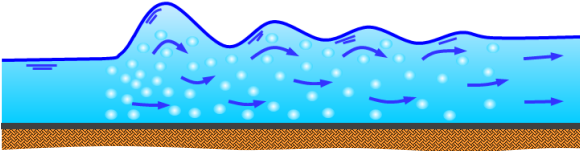
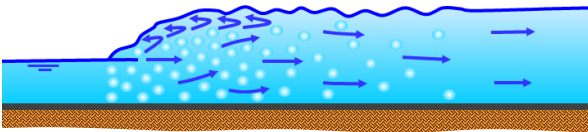
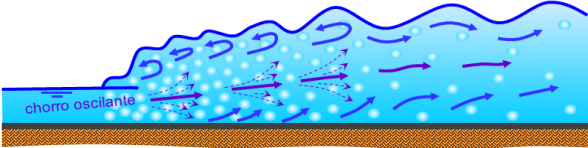
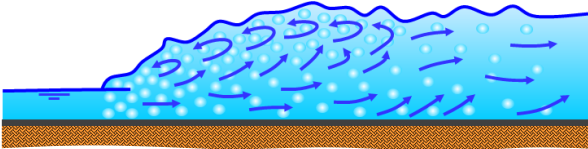
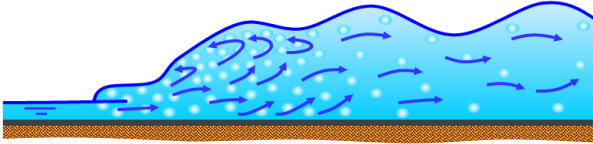
$$\text{Eficiencia} = \frac{H''}{H'} = \frac{\left(\sqrt{1 + 8Fr'^2} - 1 \right)^3 + 4Fr'^2}{\left(\sqrt{1 + 8Fr'^2} - 1 \right)^2 \left(2 + Fr'^2 \right)} \quad (213)$$

8.4. Criterio del U. S. Bureau of Reclamation.

La actual tendencia en el estudio de los resaltos hidráulicos los relacionan directamente con el número de Froude Fr , y más precisamente con el número de Froude Fr' , en coincidencia con el tirante conjugado h' al comienzo del mismo.

Particularmente y según investigaciones del U. S. Bureau of Reclamation, los resaltos hidráulicos se clasifican según se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 14 Clasificación de los resaltos hidráulicos según el Bureau of Reclamation.

DENOMINACIÓN	Nº de FROUDE Fr'	CARACTERÍSTICAS
Resalto ondulado.	entre 1,0 y 1,7.	<ul style="list-style-type: none"> Ondulaciones sobre la superficie.
		
Resalto débil.	entre 1,7 y 2,5.	<ul style="list-style-type: none"> Desarrollo de vórtices sobre la superficie. Superficie plana aguas abajo. Baja pérdida de energía.
		
Resalto oscilante.	entre 2,5 y 4,5.	<ul style="list-style-type: none"> Chorro oscilante a la entrada del resalto, del fondo hacia la superficie y viceversa, sin periodicidad. Se producen ondas superficiales que se trasladan grandes distancias aguas abajo, pudiendo dañar el cauce.
		
Resalto permanente.	entre 4,5 y 9,0.	<ul style="list-style-type: none"> Bien balanceado. La extremidad aguas abajo del rollizo superficial y el punto donde el chorro de alta velocidad deja la corriente, se produce prácticamente en la misma sección transversal. Buena disipación de energía (45 a 70%).
		
Resalto fuerte.	mayor de 9,0.	<ul style="list-style-type: none"> Superficie áspera. Presencia de ondas que se propagan aguas abajo. Excelente rendimiento en la disipación de energía ($\approx 85\%$).
		

Se hace notar que los límites entre cada tipo de los resaltos indicados en la tabla no deben interpretarse como valores fijos, sino aproximados. En algunos casos traspasan los rangos, dependiendo de las condiciones particulares del escurrimiento.

9. ESCURRIMIENTOS CON MOVIMIENTO GRADUALMENTE VARIADO.

Los canales prismáticos con movimiento uniforme se caracterizan por la constancia de la velocidad en el recorrido ($\partial U/\partial l = 0$), lo que implica simultáneamente la invariabilidad del tirante h_u y además el cumplimiento de las igualdades $i = j = j^*$ que indican matemáticamente la existencia de paralelismo en dirección longitudinal entre la solera del canal, la superficie libre y la línea de energía total.

En cambio en los movimientos variados, la velocidad se modifica sección a sección, alterándose progresivamente y de forma un tanto más tangible el tirante h . En los resaltos hidráulicos, dicha modificación, se realiza en un tramo relativamente pequeño, de ahí su denominación de movimiento bruscamente variado.

Para los casos en que debido a una singularidad en el recorrido las alteraciones de la velocidad respecto del camino resultan más suaves, se está en presencia de un *movimiento gradualmente variado*.

En la *Figura 118* se observa un canal de débil pendiente en el que se distingue un cambio de inclinación longitudinal, el cual origina una transición de la altura h desde el tirante h_{u1} (correspondiente al 1^{er} tramo de pendiente i_1) al tirante h_{u2} (correspondiente al 2^{do} tramo de pendiente i_2). En una zona intermedia, donde se realiza el pasaje paulatino del tirante desde h_{u1} hasta h_{u2} , es precisamente el lugar donde se produce un movimiento gradualmente variado, en el cual se puede constatar la evolución sucesiva y continua de la velocidad media en el camino de U_{u1} a U_{u2} .

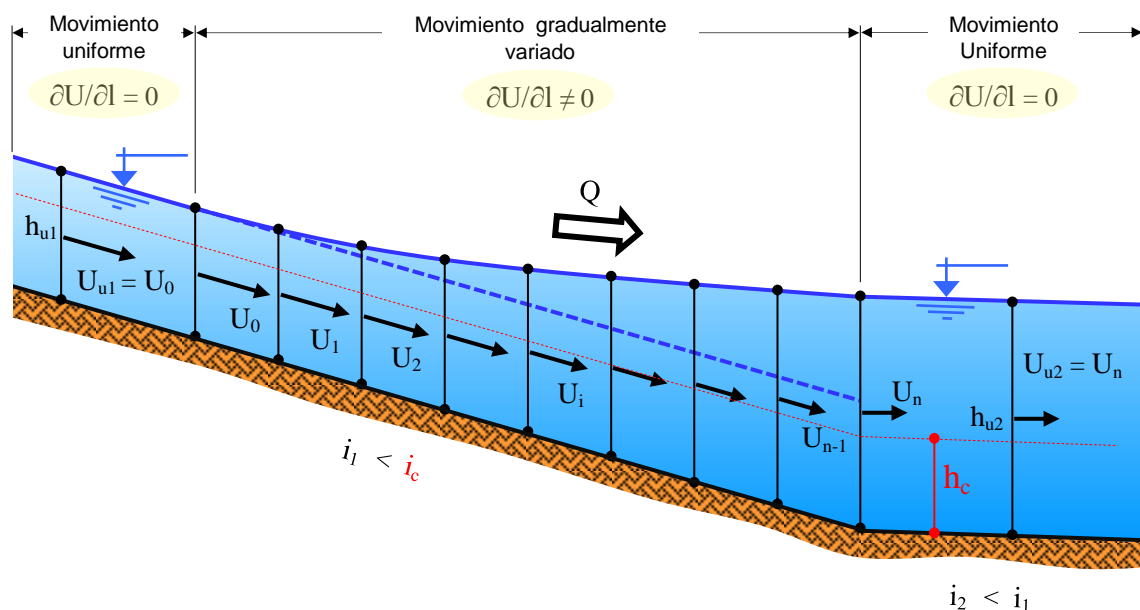


Figura 118 – Movimiento gradualmente variado.

9.1. Curva de remanso.

Se denomina *curva de remanso* a la línea superior que se forma en un perfil longitudinal de un movimiento gradualmente variado a superficie libre.

Cuando la hipótesis de uniformidad no se cumple, y los tirantes transforman su magnitud de manera paulatina por efecto de una singularidad, se genera una zona de remanso donde varían moderadamente tanto el tirante h como la velocidad media U para un caudal constante, por tratarse de un estudio con movimiento permanente ($Q = cte.$).

Si por ejemplo en un canal, originalmente con movimiento uniforme y permanente, se le interpone un vertedero en su recorrido, se genera una curva de remanso del tipo descrita en la *Figura 119*. Para esta situación particular, deja de ser paralelo el fondo de la solera y la línea coincidente con la superficie libre que representa a la energía piezométrica por unidad de peso.

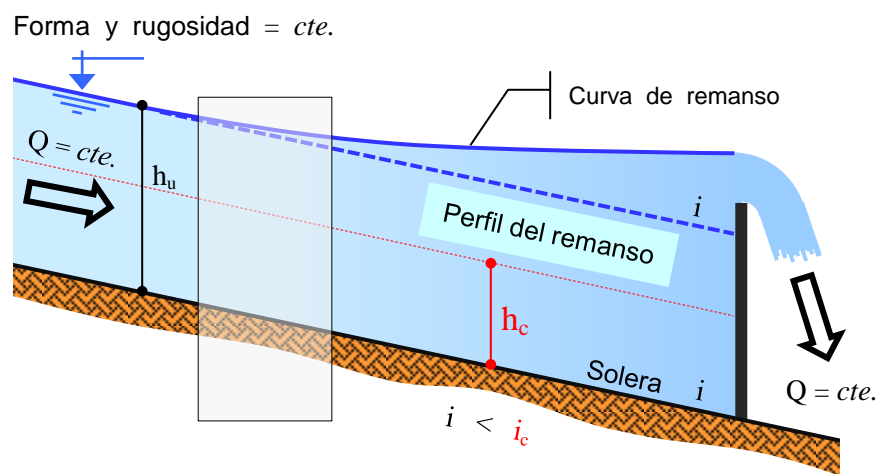


Figura 119 – Curva de remanso.

El objetivo principal de este análisis consiste en lograr determinar el perfil longitudinal del sector donde se ha formado el remanso, y más precisamente el nuevo nivel que adopta la superficie libre. De manera práctica y directa se necesita hallar el orden de variación del tirante h con respecto al recorrido l , es decir la función:

$$h = f(l)$$

Se acepta como válida, en este estudio de escurrimientos gradualmente variados sobre canales prismáticos, la ecuación de Chézy obtenida para movimientos uniformes, dado que las hipótesis que la conforman brindan resultados satisfactorios dentro de la aproximación tecnológica que el cálculo en cuestión requiere.

De acuerdo a lo precedentemente expresado, la velocidad media U se relaciona con la pérdida de energía total unitaria j^* de la siguiente manera, para lo que se sugiere observar previamente las ecuaciones (56) y (59):

$$U = c \sqrt{R i} = c \sqrt{R j^*} \Rightarrow$$

$$j^* = \frac{U^2}{c^2 R}$$

Siendo:

$$U = \frac{Q}{\Omega}$$

$$j^* = \frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R} \quad (214)$$

De la ecuación (214) se desprende que al ser $Q = cte.$ y $c = cte.$ para un mismo canal, y recordando además que el radio hidráulico R es función de la sección Ω , dicha ecuación indica clara e inequívocamente que al variar Ω también lo hace de forma simultánea y consecuente la pérdida de energía total unitaria j^* , por lo que se puede afirmar que:

$$j^* = f(\Omega)$$

9.2. Variación de la curva de remanso respecto a la longitud.

En la zona donde se produce un remanso, dentro de un escurrimiento a superficie libre con movimiento permanente ($Q = cte.$), surge a partir del cumplimiento de la ecuación de continuidad que la velocidad puede ir aumentando o disminuyendo respecto a la longitud del recorrido, según disminuyan o aumenten respectivamente las secciones consecutivas de aguas abajo.

En base a lo anteriormente expuesto se pueden distinguir dos distintas alternativas:

a) Curva de sobreelevación.

Se distingue por el crecimiento sistemático de las secciones aguas abajo (conjuntamente también se acrecientan los tirantes, ya que forman parte indefectible de las mismas) y la consecuente disminución de las velocidades medias respectivas.

Este caso admite dos posibilidades:

a₁) Curva de sobreelevación descendente.

Si bien, como en toda curva de sobreelevación el tirante va incrementando su magnitud, este caso particular se caracteriza por la disminución de la cota de nivel.

O bien, el mismo concepto pero expresado con un vocabulario más propio del ámbito hidráulico, se trata de una curva en la cual decrece la energía piezométrica por unidad de peso Z_h , la cual coincide en magnitud con la cota de la superficie libre referida al plano de comparación.

Ver *Figura 120*, en la cual se grafica una porción longitudinal Δl lo suficientemente pequeña como para lograr admitir que las líneas de energía total y piezométrica (coincidente con la línea de la superficie libre) son prácticamente de forma recta.

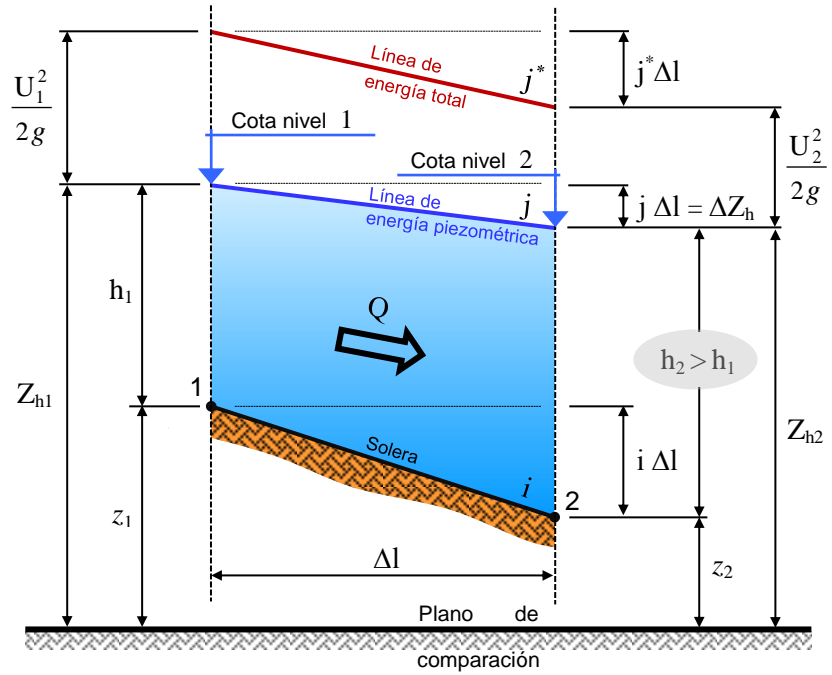


Figura 120 – Curva de sobreelevación descendente.

a2) Curva de sobreelevación ascendente.

Se produce cuando en una curva de sobreelevación, en la cual el tirante aumenta en el sentido del camino, a su vez también se acrecienta la cota de nivel, o lo que es lo mismo, la energía piezométrica por unidad de peso. Ver Figura 121.

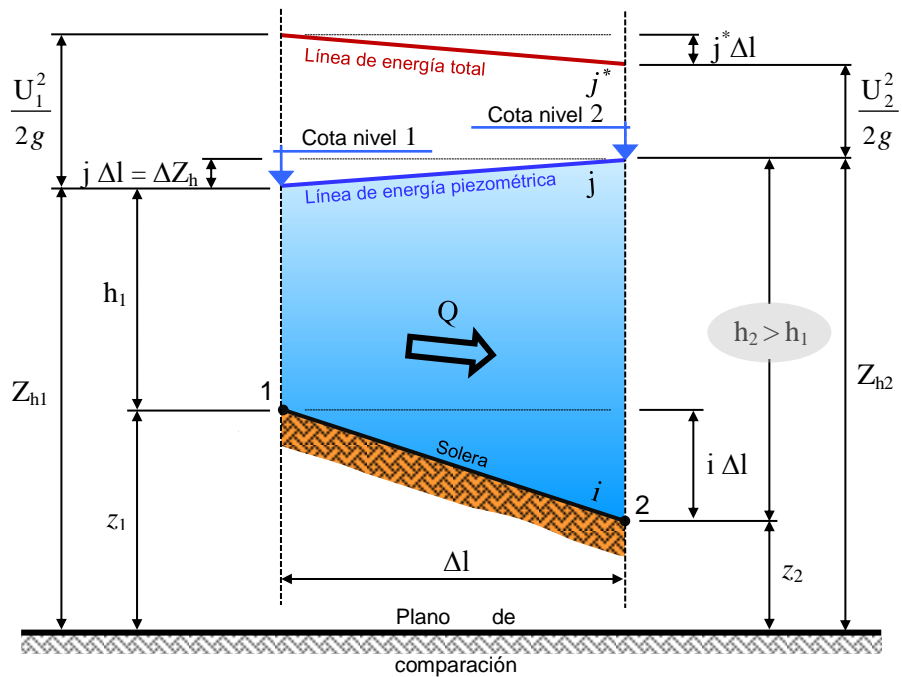


Figura 121 – Curva de sobreelevación ascendente.

b) Curva de depresión.

Se caracteriza porque las secciones, conjuntamente con los tirantes que las componen, se reducen en el sentido de aguas abajo, provocando en consecuencia y por aplicación de la ecuación de continuidad, el aumento de la velocidad media. Ver *Figura 122*.

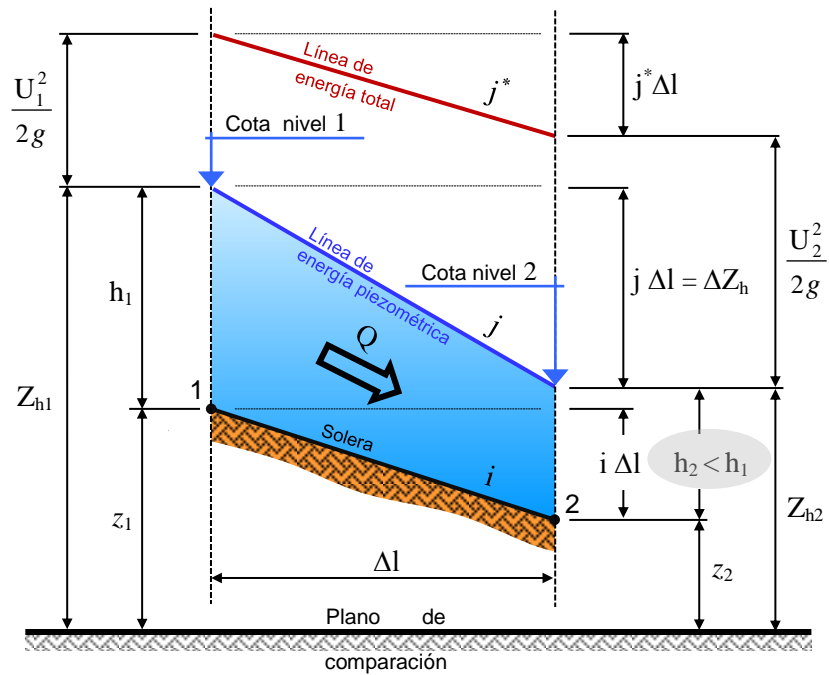


Figura 122 – Curva de depresión.

Las curvas de depresión no aceptan la posibilidad de ser simultáneamente ascendente, por lo que siempre son de tipo descendente.

Lo anteriormente expuesto se resume simbólicamente:

- Caso a)

$$\Omega_2 > \Omega_1 \Rightarrow h_2 > h_1 \rightarrow \text{Curva de sobreelevación. (aumenta el tirante } h)$$

De la ecuación de continuidad:

$$U_2 < U_1 \rightarrow \text{Corriente retardada. (disminuye la velocidad } U)$$

$$a_1) \text{ Cota nivel } 2 < \text{ Cota nivel } 1 \rightarrow \text{Curva descendente. (disminuye la cota de nivel)}$$

$$a_2) \text{ Cota nivel } 2 > \text{ Cota nivel } 1 \rightarrow \text{Curva ascendente. (aumenta la cota de nivel)}$$

- Caso b)

$$\Omega_2 < \Omega_1$$

$$\Rightarrow h_2 < h_1 \quad \rightarrow \quad \text{Curva de depresión.}$$

(disminuye el tirante h)

De la ecuación de continuidad:

$$U_2 > U_1 \quad \rightarrow \quad \text{Corriente acelerada.}$$

(aumenta la velocidad U)

9.3. Clasificación.

Las curvas de remanso se clasifican según cual sea la pendiente de la solera o fondo del canal donde se desarrollan las mismas.

Así se tienen los siguientes tipos de curvas de remanso:

- Tipo **D** en canales de pendiente débil.
- Tipo **F** en canales de pendiente fuerte.
- Tipo **C** en canales de pendiente crítica.
- Tipo **H** en canales de pendiente horizontal.
- Tipo **A** en canales de pendiente adversa.

A su vez, cada una de las curvas de remanso (según su tipo) se las designa con un subíndice (1, 2 o 3) que indica la zona donde están ubicadas. Dichas zonas se numeran según la posición de la curva de remanso, correspondiente con su propio tirante h , cumpla con uno de los siguientes dobles condicionantes:

- Zona 1 – *Corresponde al sector superior.*

$$h > h_u$$

y simultáneamente: $h > h_c$

- Zona 2 – *Corresponde al sector intermedio.*

. Si se trata de un canal de pendiente débil:

$$h < h_u$$

y simultáneamente: $h > h_c$

. Si se trata de un canal de pendiente fuerte:

$$h > h_u$$

y simultáneamente: $h < h_c$

- Zona 3 – Corresponde al sector inferior.

$$h < h_u$$

y simultáneamente: $h < h_c$

La misma individualización de zonas señaladas anteriormente, pero ahora indicadas de forma gráfica, se pueden visualizar en la *Figura 123*.

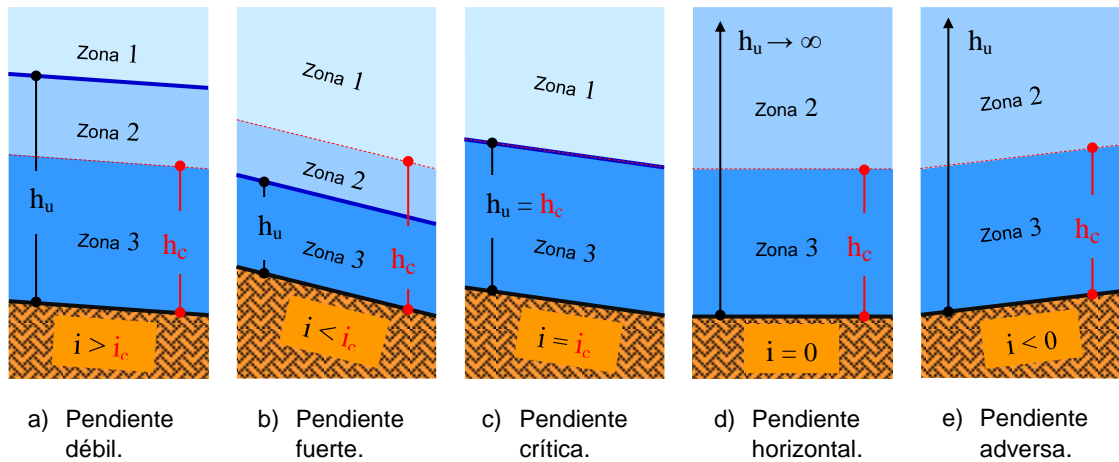


Figura 123 – Zonas de las curvas de remanso.

La clasificación general se puede resumir según se señala en la *Tabla 15*.

Tabla 15 Clasificación de las curvas de remanso.

DENOMINACIÓN	PENDIENTE	ZONA	RELACIÓN DE TIRANTES	RÉGIMEN
D	Débil. ($i < i_c$)	1	$h > h_u$ y $h > h_c$	Lento o subcrítico.
		2	$h < h_u$ y $h > h_c$	Lento o subcrítico.
		3	$h < h_u$ y $h < h_c$	Veloz o supercrítico.
F	Fuerte. ($i > i_c$)	1	$h > h_u$ y $h > h_c$	Lento o subcrítico.
		2	$h > h_u$ y $h < h_c$	Veloz o supercrítico.
		3	$h < h_u$ y $h < h_c$	Veloz o supercrítico.

Tabla 15 Clasificación de las curvas de remanso. (continuación)

DENOMINACIÓN	PENDIENTE	ZONA	RELACIÓN DE TIRANTES	RÉGIMEN
C	Crítica. ($i = i_c$)	1	$h > h_u$ y $h > h_c$	Lento o subcrítico.
		2	$h = h_u$ y $h = h_c$	Crítico.
		3	$h < h_u$ y $h < h_c$	Veloz o supercrítico.
H	Horizontal. ($i = 0$)	1	-----	-----
		2	$h < h_u \rightarrow \infty$ y $h > h_c$	Lento o subcrítico.
		3	$h < h_u \rightarrow \infty$ y $h < h_c$	Veloz o supercrítico.
A	Adversa. ($i < 0$)	1	-----	-----
		2	$h < h_u$ y $h > h_c$	Lento o subcrítico.
		3	$h < h_u$ y $h < h_c$	Veloz o supercrítico.

9.4. Ecuación diferencial de la curva de remanso.

Se consideran en este estudio y como primera aproximación, las curvas de remanso que se producen en canales prismáticos con movimiento permanente.

El propósito consiste en la determinación del perfil longitudinal, o sea el nuevo nivel de la superficie libre. Concretamente se pretende hallar la variación del tirante con respecto a la longitud del recorrido, o sea:

$$h = f(l)$$

Este problema es en la práctica de difícil solución, y dada la necesidad de conocer la conformación de la superficie libre, se puede plantear de la siguiente manera para deducir la ley de variación de la curva de remanso.

Para su análisis previo se adopta la pequeña porción longitudinal del remanso señalada en la Figura 119. Ver Figura 124.

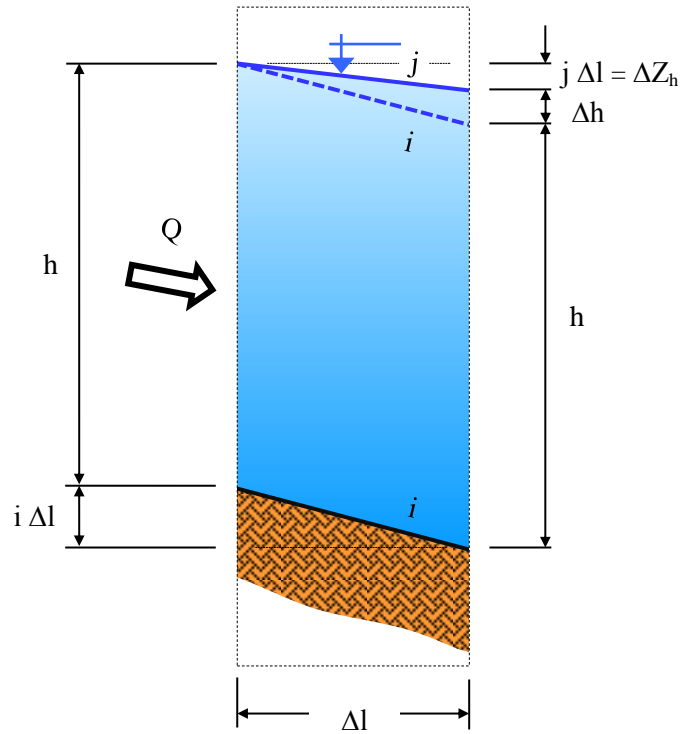


Figura 124 – Tramo de una curva de remanso.

$$i \Delta l + h = h + \Delta h + j \Delta l$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l} = i - j$$

O bien, en magnitudes diferenciales:

$$\frac{dh}{dl} = i - j \tag{215}$$

Si bien la ecuación (215) es correcta matemática y físicamente, su estructura no permite una aplicación práctica para la resolución del problema en cuestión, por lo que se recurre al siguiente artificio:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{dh}{dl} \frac{dH}{dH} = \frac{\frac{dH}{dl}}{\frac{dH}{dh}} = \frac{\text{variación de la energía propia con respecto al recorrido}}{\text{variación de la energía propia con respecto al tirante}}$$

Por consiguiente, la determinación del nivel de la superficie libre donde se desarrolla una curva de remanso se analiza como la relación entre la variación de la energía propia H con respecto al recorrido l y la variación de la misma pero con respecto al tirante h.

De esta manera queda definida la *ecuación diferencial de la curva de remanso*:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{\frac{dH}{dl}}{\frac{dH}{dh}} \quad (216)$$

9.4.1. Variación de la energía propia con respecto al recorrido.

Corresponde al estudio del término dH/dl que compone el numerador de la ecuación diferencial (216).

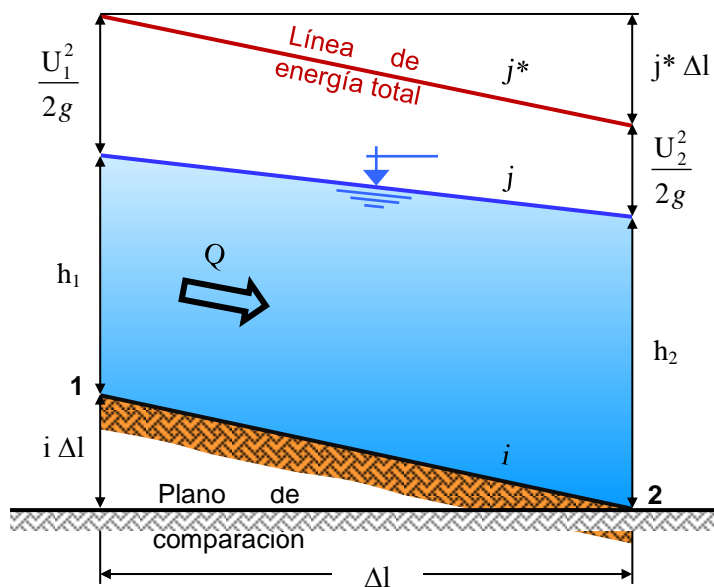


Figura 125 – Ecuación de Bernoulli aplicada a un tramo de un perfil de remanso.

A partir de la *Figura 125* se plantea la ecuación de Bernoulli a un pequeño tramo de un escurrimiento gradualmente variado, tal que la curva de remanso que se genera en la superficie libre pueda considerarse aproximadamente recta. Así mismo se adopta de expreso un plano de comparación que pasa por la solera del canal en coincidencia con la sección 2.

$$i \Delta l + \underbrace{h_1 + \frac{U_1^2}{2g}}_{H_1} = \underbrace{h_2 + \frac{U_2^2}{2g}}_{H_2} + j^* \Delta l$$

$$\Rightarrow i \Delta l = (H_2 - H_1) + j^* \Delta l$$

Dividiendo en ambos miembros por Δl y simplificando:

$$\therefore i \frac{\Delta l}{\Delta l} = \frac{\Delta H}{\Delta l} + j^* \frac{\Delta l}{\Delta l}$$

Si $\Delta l \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\frac{dH}{dl} = i - j^* \quad (217)$$

De la ecuación (217) se deduce que la variación de la energía propia H con respecto al camino l resulta igual a la diferencia entre la pendiente longitudinal i de la solera del canal y la pérdida de energía unitaria j^* .

Aplicando la expresión de Chézy:

- Para movimiento uniforme
Se utilizan subíndices "u" para su mejor identificación.

$$i = \frac{Q^2}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u} \quad (218)$$

Siendo:

$$\left. \begin{array}{l} c_u \\ \Omega_u \\ R_u \end{array} \right\} \rightarrow f(h_u)$$

- Para movimiento gradualmente variado.
Válido para secciones próximas.

$$j^* = \frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R} \quad (219)$$

Siendo:

$$\left. \begin{array}{l} c \\ \Omega \\ R \end{array} \right\} \rightarrow f(h)$$

Reemplazando (218) y (219) en (217):

$$\frac{dH}{dl} = i - j^* = \frac{Q^2}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u} - \frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R}$$

$$\frac{dH}{dl} = Q^2 \left(\frac{1}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u} - \frac{1}{\Omega^2 c^2 R} \right) \quad (220)$$

De la ecuación (220) se verifican los signos (positivo, nulo o negativo) de la variación dH/dl , según el valor que adopta el tirante h con respecto al tirante uniforme h_u . Ver *Tabla 16*.

Tabla 16 **Condicionantes del signo matemático de la variación dH/dl .**

- Si	$h = h_u$	\rightarrow	$\frac{dH}{dl} = 0$
- Si	$h > h_u$	\rightarrow	$\frac{dH}{dl} > 0$
- Si	$h < h_u$	\rightarrow	$\frac{dH}{dl} < 0$

Por lo tanto se constata que la variación de la energía propia H con respecto a la longitud del recorrido l es positiva (> 0) para remansos con tirantes h por sobre el tirante uniforme h_u y negativa (< 0) en caso contrario.

9.4.2. Variación de la energía propia con respecto al tirante.

Consiste en el análisis del término dH/dh correspondiente al denominador de la ecuación (216).

Recordando la fórmula que expresa el valor de la energía propia H :

$$H = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g \Omega^2}$$

Luego se deriva con respecto al tirante h :

$$\frac{dH}{dh} = 1 - \frac{2Q^2 \Omega}{2g \Omega^4} \frac{d\Omega}{dh} \Rightarrow$$

↓
B

$$\frac{dH}{dh} = 1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}$$

(221)

La expresión (221) igualada a cero corresponde a la *condición de escurrimiento crítico* (ver apartado 7.2.), la cual se cumple cuando el tirante de la corriente hidráulica es igual al tirante crítico h_c .

Por consiguiente, observando la ecuación (221) se desprende que pueden producirse tres alternativas que hacen al signo de la variación dH/dh según la magnitud que adquiera el tirante h de la curva de remanso respecto del tirante crítico h_c . Ver *Tabla 17*.

Tabla 17 Condicionantes del signo matemático de la variación dH/dh .

- Si	$h = h_c$ (Régimen crítico)	$\rightarrow \frac{dH}{dh} = 0$
- Si	$h > h_c$ (Régimen lento)	$\rightarrow \frac{dH}{dh} > 0$
- Si	$h < h_c$ (Régimen veloz)	$\rightarrow \frac{dH}{dh} < 0$

Consecuentemente se comprueba que la variación de la energía propia H con respecto al tirante h resulta positiva (> 0) si el tirante h es superior al tirante crítico h_c y negativa (< 0) en caso contrario.

9.4.3. Análisis y alternativas de la ecuación diferencial.

La ecuación diferencial de una curva de remanso se puede expresar de distintas formas a saber.

- a) En función de la pérdida de energía unitaria j^* .

Reemplazando (217) y (222) en (216):

$$\frac{dh}{dl} = \frac{\frac{dH}{dl}}{\frac{dH}{dh}} = \frac{i - j^*}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}} \quad (223)$$

Sacando factor común al término correspondiente a la pendiente longitudinal i :

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{j^*}{i}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}} \quad (224)$$

- b) En función de la expresión de Chézy.

Reemplazando (218) y (219) en (224):

$$\frac{dh}{dl} = \frac{\frac{dH}{dl}}{\frac{dH}{dh}} = i \frac{1 - \frac{j^*}{i}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}} = i \frac{1 - \frac{\frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R}}{\frac{Q^2}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega^2 c^2 R}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}} \quad (225)$$

c) En función del número de Froude Fr .

Colocando la sección Ω en función del tirante medio h_m dentro de la ecuación (223):

$$\frac{dh}{dl} = \frac{\frac{dH}{dl}}{\frac{dH}{dh}} = \frac{i - j^*}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^2 B h_m}} = \frac{i - j^*}{1 - \frac{U^2}{g h_m}} \rightarrow Fr^2$$

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - j^*}{1 - Fr^2} \quad (226)$$

d) En función de las dimensiones críticas.

Sustituyendo en (7-225) la condición de escurrimiento crítico $\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega_c^3}{B_c}$

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega^2 c^2 R}}{1 - \frac{\Omega_c^3 B}{\Omega^3 B_c}} \quad (227)$$

e) En función del tirante medio h_m .

Sabiendo que los tirantes medios de una sección cualquiera en estudio y la sección crítica se definen como:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_m = \frac{\Omega}{B} \\ h_{mc} = \frac{\Omega_c}{B_c} \end{array} \right.$$

Insertando esos tirantes medios en (7-227):

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega^2 c^2 R}}{1 - \frac{\Omega_c^2 h_{mc}}{\Omega^2 h_m}} \tag{228}$$

f) En función del gasto o caudal Q .

De la fórmula de Chézy se tiene:

$$\Omega_u^2 c_u^2 R_u = \frac{Q^2}{i}$$

Reemplazando en (7-225):

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R i}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}} \tag{229}$$

g) Referenciada a un plano horizontal.

El problema también consiste en conocer la variación de la superficie libre en el perfil longitudinal de la curva de remanso. Pero en este caso, en vez de hacer el estudio con respecto a la solera del canal (dh/dl), se lo hace con referencia a un plano comparativo horizontal (dZ_h/dl).

Por consiguiente, la ecuación diferencial que permite el análisis de la curva de remanso se convierte ahora en la variación de la energía piezométrica por unidad de peso con respecto al recorrido l . Si aumenta Z_h con l , la curva de remanso que se produce es de tipo ascendente y si disminuye, de tipo descendente (Ver *Figura 126*).

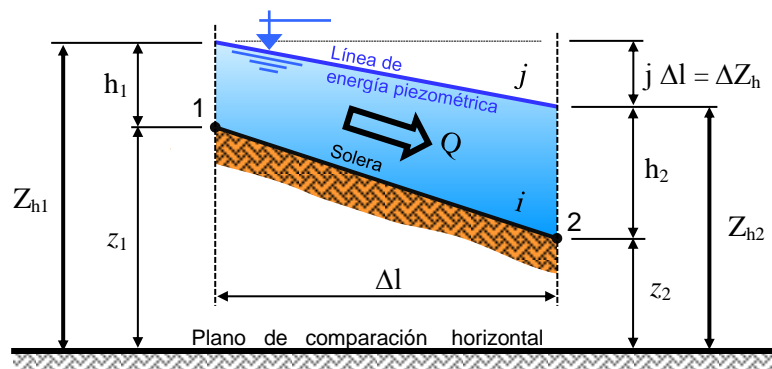


Figura 126 – Curva descendente.

De la *Figura 126*:

$$\begin{aligned}
 z_1 + h_1 &= z_2 + h_2 + j \Delta l \quad \Rightarrow \\
 \downarrow & \quad \quad \downarrow \\
 Z_{h1} & \quad \quad Z_{h2} \\
 Z_{h1} - Z_{h2} &= \Delta Z_h = j \Delta l \\
 \therefore \frac{\Delta Z_h}{\Delta l} &= j
 \end{aligned}$$

La misma relación anterior expresada en forma diferencial:

$$\frac{dZ_h}{dl} = j \tag{230}$$

Sustituyendo la ecuación (230) en (215):

$$\begin{aligned}
 \frac{dh}{dl} &= i - j = i - \frac{dZ_h}{dl} \quad \Rightarrow \\
 \frac{dZ_h}{dl} &= i - \frac{dh}{dl} \tag{231}
 \end{aligned}$$

Introduciendo (225) en (231):

$$\frac{dZ_h}{dl} = i - i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega^2 c^2 R}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}}$$

Sacando factor común a la pendiente longitudinal i :

$$\frac{dZ_h}{dl} = i \left(1 - \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega^2 c^2 R}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}} \right) \tag{232}$$

O bien, la misma ecuación expresada en función de los tirantes medios, se procede previamente reemplazando (228) en (231):

$$\frac{dZ_h}{dl} = i \left(1 - \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega^2 c^2 R}}{1 - \frac{\Omega_c^2 h_{mc}}{\Omega^2 h_m}} \right) \tag{233}$$

9.4.4. Signo de la variación del tirante con respecto al recorrido.

Se analizan con mayor detalle y de forma bastante meticulosa las curvas de remanso que se producen en los canales de pendiente débil y fuerte respectivamente, por ser las que se generan con más frecuencia en la práctica.

Para el análisis del signo de la variación del tirante h respecto a la longitud del recorrido l , o sea dh/dl , y correspondiente a cada una de las zonas en estudio, se procede ejecutando los siguientes pasos prácticos:

- 1º) Se comprueba si el tirante h de la curva de remanso es mayor o menor que el tirante uniforme h_u .

De la *Tabla 16* se verifica si la variación dH/dl es positiva o negativa.

$$\text{Alternativa a)} \quad \text{Si: } h > h_u$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dl} > 0$$

$$\text{Alternativa b)} \quad \text{Si: } h < h_u$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dl} < 0$$

- 2º) Se coteja si el tirante h de la curva de remanso es superior o inferior que el tirante crítico h_c .

De la *Tabla 17* se determina si la variación dH/dh es positiva o negativa.

$$\text{Alternativa a)} \quad \text{Si: } h > h_c$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dh} > 0$$

$$\text{Alternativa b)} \quad \text{Si: } h < h_c$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dh} < 0$$

- 3º) Se calcula el signo matemático (+) o (-) de la variación dh/dl a partir de la relación entre dH/dl y dH/dh con sus respectivos signos.

Así se tiene:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{(\pm) \frac{dH}{dl}}{(\pm) \frac{dH}{dh}} \quad (234)$$

Alternativa a) Si $\frac{dh}{dl}$ es positivo (+), o sea $\frac{dh}{dl} > 0$.

Se da en los casos en los cuales los signos del numerador y el denominador de la ecuación (7-234) son iguales:

$$\left(+\right) \frac{dh}{dl} = \frac{\left(+\right) \frac{dH}{dl}}{\left(+\right) \frac{dH}{dh}} \quad \text{o} \quad \left(+\right) \frac{dh}{dl} = \frac{\left(-\right) \frac{dH}{dl}}{\left(-\right) \frac{dH}{dh}}$$

El signo matemático positivo (+) indica físicamente que el tirante h aumenta con respecto al recorrido l :

⇒ Tirante creciente.

A consecuencia de ello, y aplicando de la ecuación de continuidad, se verifica que el escurrimiento disminuye su velocidad:

⇒ Corriente desacelerada.

Alternativa b) Si $\frac{dh}{dl}$ resulta negativo (-), o sea $\frac{dh}{dl} < 0$.

Se produce en las situaciones en las que los signos del numerador y el denominador de la expresión (7-234) son distintos:

$$\left(-\right) \frac{dh}{dl} = \frac{\left(-\right) \frac{dH}{dl}}{\left(+\right) \frac{dH}{dh}} \quad \text{o} \quad \left(-\right) \frac{dh}{dl} = \frac{\left(+\right) \frac{dH}{dl}}{\left(-\right) \frac{dH}{dh}}$$

El signo matemático negativo (-) señala físicamente que el tirante h disminuye con relación a la longitud l :

⇒ Tirante decreciente.

Como corolario de ello, y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, se comprueba que el escurrimiento incrementa su velocidad:

⇒ Corriente acelerada.

Aplicando la metodología precedentemente descrita, se determinan y analizan individualmente los signos matemáticos de la variación de dh/dl en canales de pendiente fuerte y débil para cada una de las respectivas zonas definidas como 1, 2 y 3. En la misma se indican si el valor de la pendiente de la curva de remanso resulta positivo o negativo, dando así una idea previa y aproximada de la forma que va a tomar en definitiva la superficie del remanso. Ver *Tablas 18 y 19* y *Figura 127*.

Tabla 18 Signo de la pendiente en curvas de remanso sitas en canales de pendiente débil.

CANAL DE PENDIENTE DÉBIL	
• Zona 1	
Se cumple simultáneamente:	$\left\{ \begin{array}{l} h > h_u \\ h > h_c \end{array} \right.$
Si: $h > h_u \rightarrow \frac{dH}{dL} > 0$	} $\therefore \frac{dh}{dL} = \frac{(+)\frac{dH}{dL}}{(+)\frac{dH}{dh}} > 0$
Si: $h > h_c \rightarrow \frac{dH}{dh} > 0$	
\Rightarrow corresponde	
- Tirante creciente.	\rightarrow Curva de sobreelevación.
- Corriente desacelerada.	
• Zona 2	
Se cumple simultáneamente:	$\left\{ \begin{array}{l} h < h_u \\ h > h_c \end{array} \right.$
Si: $h < h_u \rightarrow \frac{dH}{dL} < 0$	} $\therefore \frac{dh}{dL} = \frac{(-)\frac{dH}{dL}}{(+)\frac{dH}{dh}} < 0$
Si: $h > h_c \rightarrow \frac{dH}{dh} > 0$	
\Rightarrow corresponde	
- Tirante decreciente.	\rightarrow Curva de depresión.
- Corriente acelerada.	
• Zona 3	
Se cumple simultáneamente:	$\left\{ \begin{array}{l} h < h_u \\ h < h_c \end{array} \right.$
Si: $h < h_u \rightarrow \frac{dH}{dL} < 0$	} $\therefore \frac{dh}{dL} = \frac{(-)\frac{dH}{dL}}{(-)\frac{dH}{dh}} > 0$
Si: $h > h_c \rightarrow \frac{dH}{dh} < 0$	
\Rightarrow corresponde	
- Tirante creciente.	\rightarrow Curva de sobreelevación.
- Corriente desacelerada.	

Tabla 19 Signo de la pendiente en curvas de remanso sitas en canales de pendiente fuerte.

CANAL DE PENDIENTE FUERTE	
• Zona 1	
Se cumple simultáneamente:	$\begin{cases} h > h_u \\ h > h_c \end{cases}$
Si: $h > h_u \rightarrow \frac{dH}{dL} > 0$	} $\therefore \frac{dh}{dL} = \frac{(+)\frac{dH}{dL}}{(+)\frac{dH}{dh}} > 0$
Si: $h > h_c \rightarrow \frac{dH}{dh} > 0$	
\Rightarrow corresponde	
- Tirante creciente.	\rightarrow Curva de sobreelevación.
- Corriente desacelerada.	
• Zona 2	
Se cumple simultáneamente:	$\begin{cases} h > h_u \\ h < h_c \end{cases}$
Si: $h > h_u \rightarrow \frac{dH}{dL} > 0$	} $\therefore \frac{dh}{dL} = \frac{(+)\frac{dH}{dL}}{(-)\frac{dH}{dh}} < 0$
Si: $h < h_c \rightarrow \frac{dH}{dh} < 0$	
\Rightarrow corresponde	
- Tirante decreciente.	\rightarrow Curva de depresión.
- Corriente acelerada.	
• Zona 3	
Se cumple simultáneamente:	$\begin{cases} h < h_u \\ h < h_c \end{cases}$
Si: $h < h_u \rightarrow \frac{dH}{dL} < 0$	} $\therefore \frac{dh}{dL} = \frac{(-)\frac{dH}{dL}}{(-)\frac{dH}{dh}} > 0$
Si: $h > h_c \rightarrow \frac{dH}{dh} < 0$	
\Rightarrow corresponde	
- Tirante creciente.	\rightarrow Curva de sobreelevación.
- Corriente desacelerada.	

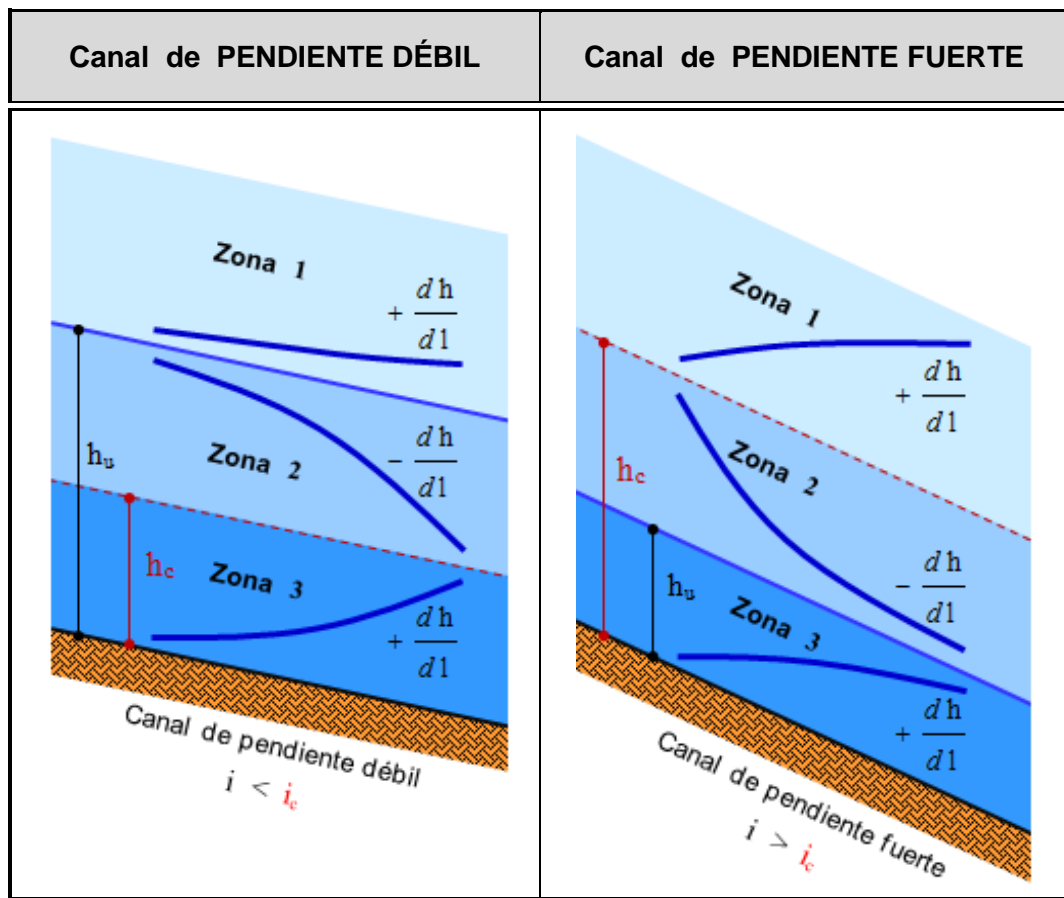


Figura 127 – Primera aproximación de la morfología de las curvas de remanso.

9.4.5. Condiciones de la curva de remanso en los límites.

Con el estudio del signo, ya se tiene una idea cercana pero todavía incierta del perfil longitudinal de un movimiento gradualmente variado. A continuación se analiza la ecuación diferencial de la curva de remanso para las situaciones en que el tirante h alcanza valores límites, de modo de conocer con mayor precisión la posición geométrica de la misma en los casos en que se producen las siguientes tendencias que contienen condicionantes de borde:

- | | |
|----|-------------------------|
| a) | $h \rightarrow \infty$ |
| b) | $h \rightarrow h_u$ |
| c) | $h \rightarrow h_c$ |
| d) | $h \rightarrow -\infty$ |

Reemplazando el tirante h por su valor límite en la ecuación diferencial de la curva de remanso según la versión dada por la expresión (225), se determina en cada caso la relación entre la variación del tirante con respecto al recorrido. Paralelamente también se realiza un análisis similar en los límites, pero aplicado a la ecuación diferencial referida a un

plano horizontal que mide la variación de Z_h (energía piezométrica por unidad de peso) mediante la aplicación de la ecuación (232).

Caso a) Tirante de la curva de remanso tendiendo a infinito ($h \rightarrow \infty$).

$$\bullet \frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\infty}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \infty}} = i \frac{1 - 0}{1 - 0} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow i \quad (235)$$

Prescindiendo en este análisis de la hipótesis simplificativa indicada en el apartado 1.3., y ateniéndonos con mayor precisión a la posición de los ejes de referencia, se puede apreciar en la *Figura 128* que cuando dh/dl tiende a i , se está indicando que la curva de remanso se dirige a una posición horizontal. En otras palabras, la superficie libre tiende a disponerse con una inclinación igual a la pendiente i , pero como la solera del canal posee esa misma pendiente, se concluye que la misma se ubica de forma horizontal.

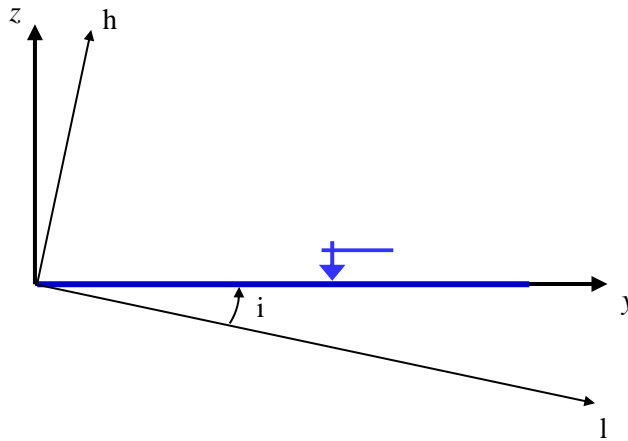


Figura 128 – Ejes de referencia.

$$\bullet \frac{dZ_h}{dl} = i \left(1 - \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\infty}}{1 - \frac{Q^2 B}{g \infty}} \right) = i \left(1 - \frac{1 - 0}{1 - 0} \right) = i(1 - 1) \Rightarrow$$

$$\frac{dZ_h}{dl} \rightarrow 0 \quad (236)$$

Conclusión: para un tirante h de la curva de remanso que crece a un valor tendiente a infinito, la superficie libre se dispone de manera horizontal.

Caso b) Tirante de la curva de remanso tendiendo al tirante uniforme ($h \rightarrow h_u$).

$$\bullet \frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}}{1 - \frac{Q^2 B_u}{g \Omega_u^3}} = i \frac{1 - 1}{1 - \frac{Q^2 B_u}{g \Omega_u^3}} = i \frac{0}{1 - \frac{Q^2 B_u}{g \Omega_u^3}} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow 0 \quad (237)$$

$$\bullet \frac{dZ_h}{dl} = i \left(1 - \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}}{1 - \frac{Q^2 B_u}{g \Omega_u^3}} \right) = i \left(1 - \frac{1 - 1}{1 - \frac{Q^2 B_u}{g \Omega_u^3}} \right) = i (1 - 0) \Rightarrow$$

$$\frac{dZ_h}{dl} \rightarrow i \quad (238)$$

Conclusión: cuando el tirante h se aproxima al tirante uniforme h_u , la variación de dicho tirante h perteneciente a la curva de remanso con respecto al camino tiende a cero, por lo que la misma se dispone asintóticamente como es fácil interpretar matemática y físicamente.

Caso c) Tirante de la curva de remanso tendiendo al tirante crítico ($h \rightarrow h_c$).

$$\bullet \frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega_c^2 c_c^2 R_c}}{1 - \frac{Q^2 B_c}{g \Omega_c^3}} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega_c^2 c_c^2 R_c}}{0} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \infty \quad (239)$$

$$\bullet \frac{dZ_h}{dl} = i \left(1 - \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega_c^2 c_c^2 R_c}}{1 - \frac{Q^2 B_c}{g \Omega_c^3}} \right) = i \left(1 - \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{\Omega_c^2 c_c^2 R_c}}{0} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dZ_h}{dl} \rightarrow \infty \quad (240)$$

Conclusión: si el tirante h se encamina al tirante crítico h_c , la variación del tirante con respecto al recorrido dh/dl tiende a infinito, es decir que la superficie libre tiende a disponerse perpendicularmente al tirante crítico.

Caso d) Tirante de la curva de remanso tendiendo a menos infinito ($h \rightarrow -\infty$).

Es un caso particular utilizado al solo efecto de contribuir a una mejor interpretación de la configuración geométrica del conjunto de la curva de remanso mediante el uso del análisis matemático puro. Así mismo, no se debe perder la

visión de la realidad, ya que en la práctica solo son válidos los tirantes $h > 0$, puesto que con valores negativos es físicamente imposible lograr la circulación de un caudal Q .

$$\bullet \frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{(-\infty)}}{1 - \frac{Q^2 B}{g(-\infty)}} = i \frac{1+0}{1+0} \Rightarrow \frac{dh}{dl} \rightarrow i \quad (241)$$

$$\bullet \frac{dZ_h}{dl} = i \left(1 - \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{(-\infty)}}{1 - \frac{Q^2 B}{g(-\infty)}} \right) = i \left(1 - \frac{1+0}{1+0} \right) = i(1-1) \Rightarrow \frac{dZ_h}{dl} \rightarrow 0 \quad (242)$$

Conclusión: al igual que en el caso a), pero teniendo en cuenta que ahora el tirante h tiende a menos infinito, también se demuestra que la superficie libre se torna horizontal.

Los cuatro casos límites anteriormente mencionados permiten establecer la forma de la curva de remanso de manera global y descriptiva, los cuales se resumen en la *Tabla 20*.

Tabla 20 Posición de las curvas de remanso para tirantes límites.

TENDENCIA LÍMITE DEL TIRANTE	TENDENCIA DE LAS VARIACIONES	POSICIÓN
$h \rightarrow \infty$	$\frac{dh}{dl} \rightarrow i$ $\frac{dZ_h}{dl} \rightarrow 0$	Horizontal.
$h \rightarrow h_u$	$\frac{dh}{dl} \rightarrow 0$ $\frac{dZ_h}{dl} \rightarrow i$	Asintótica a h_u .
$h \rightarrow h_c$	$\frac{dh}{dl} \rightarrow \infty$ $\frac{dZ_h}{dl} \rightarrow \infty$	Perpendicular a h_c .
$h \rightarrow -\infty$	$\frac{dh}{dl} \rightarrow i$ $\frac{dZ_h}{dl} \rightarrow 0$	Horizontal.

Como caso particular se analiza la situación en la cual el tirante h de la curva de remanso es muy pequeño, pero sin perder de vista que no puede llegar a ser precisamente nulo puesto que no se permitiría el escurrimiento del caudal Q considerado. O sea cuando:

$$h \rightarrow 0$$

Utilizando nuevamente la ecuación (225) para el estudio de la variación del tirante con relación al recorrido, se tiene:

$$\bullet \frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{\Omega_u^2 c_u^2 R_u}{0}}{1 - \frac{Q^2 B}{g 0}} = i \frac{1 - \infty}{1 - \infty} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} = \frac{\infty}{\infty}$$

En el fondo, para $h = 0$, se obtiene una indeterminación del tipo ∞/∞ pero en su límite la misma puede resolverse a través del análisis matemático. Tomando como ejemplo de referencia simplificado a un canal rectangular donde la longitud del ancho B es claramente preponderante sobre la del tirante h , se puede calcular sin mucho error optando por la siguiente aproximación aplicada al radio hidráulico R (ver *Figura 129*):



Figura 129 – Canal rectangular con ancho prevaleciente sobre el tirante.

$$R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{B h}{B + 2 h} \cong \frac{B h}{B} \Rightarrow$$

$$R \cong h \tag{243}$$

Además, por ser una sección rectangular se cumple:

$$B = B_c = B_u \tag{244}$$

De la expresión (227) y utilizando una de las siguientes dos alternativas propuestas:

- Ecuación de Chézy.

Asumiendo previamente la simplificación de considerar el valor del coeficiente de Chézy c muy próximo al correspondiente con el tirante uniforme c_u , se tiene:

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{B_u^2 h_u^2 c_u^2 h_u}{B^2 h^2 c^2 h}}{1 - \frac{B_c^3 h_c^3 B}{B^3 h^3 B_c}} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \left(\frac{h_u}{h}\right)^3}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1 - \left(\frac{h_u}{h}\right)^3}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3} = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 - h_u^3}{h^3}}{\frac{h^3 - h_c^3}{h^3}}$$

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow i \left(\frac{h_u}{h_c}\right)^3 \quad (245)$$

La solución en el límite $h \rightarrow 0$ es de tipo finita, de valor: $i (h_u/h_c)^3$.

Si bien en este caso el resultado corresponde particularmente para la sección especialmente seleccionada, se saca como conclusión que la curva de remanso en las inmediaciones de la solera tiene una pendiente de magnitud finita. Dicha magnitud será distinta según las características geométricas de la sección considerada.

Por lo tanto, la curva se alinea formando un cierto ángulo respecto a la línea del fondo. Ver *Figura 130*.

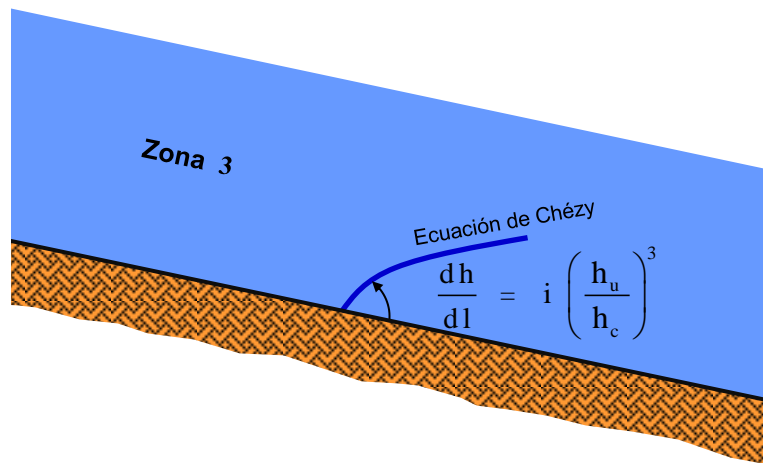


Figura 130 – Curva de remanso próxima al fondo según la ecuación de Chézy.

- Ecuación de Chézy - Manning.

Se adopta la hipótesis de estimar el coeficiente de rugosidad de Manning n similar al del tirante uniforme u , recordando que:

$$c = \frac{1}{n} \sqrt[6]{R} = \frac{1}{n} R^{1/6} \cong \frac{1}{n} h^{1/6} \quad (246)$$

Así se tiene:

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{B_u^2 h_u^2}{B^2 h^2} \frac{h_u^{2/6}}{h^{2/6}} \frac{n^2}{h} \frac{h_u}{h}}{1 - \frac{B_c^3 h_c^3}{B^3 h^3}} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \left(\frac{h_u}{h}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3}$$

En el límite para el tirante h tendiendo a un valor mínimo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1 - \left(\frac{h_u}{h}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3} = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^{10/3} - h_u^{10/3}}{h^{10/3}}}{\frac{h^3 - h_c^3}{h^3}} =$$

$$= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 (h^{10/3} - h_u^{10/3})}{h^{10/3} (h^3 - h_c^3)} = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{19/3} - h_u^{10/3} h^3}{h^{19/3} - h_c^3 h^{10/3}} =$$

$$= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{19/3} (1 - h_u^{10/3} h^{-10/3})}{h^{19/3} (1 - h_c^3 h^{-3})}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital y desarrollando:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dh}{dl} = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{10}{3} h_u^{10/3} h^{-13/3}}{3 h_c^3 h^{-4}} = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10}{9} \frac{h_u^{10/3}}{h_c^3} \frac{h^{12/3}}{h^{13/3}} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dh}{dl} = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10}{9} \frac{h_u^{10/3}}{h_c^3} \frac{1}{h^{1/3}}$$

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \infty \tag{247}$$

La solución en el límite para $h \rightarrow 0$ deriva en valor infinito ∞ .

El resultado indica concretamente que la curva de remanso se alinea ortogonalmente con la solera del canal. Ver *Figura 131*.

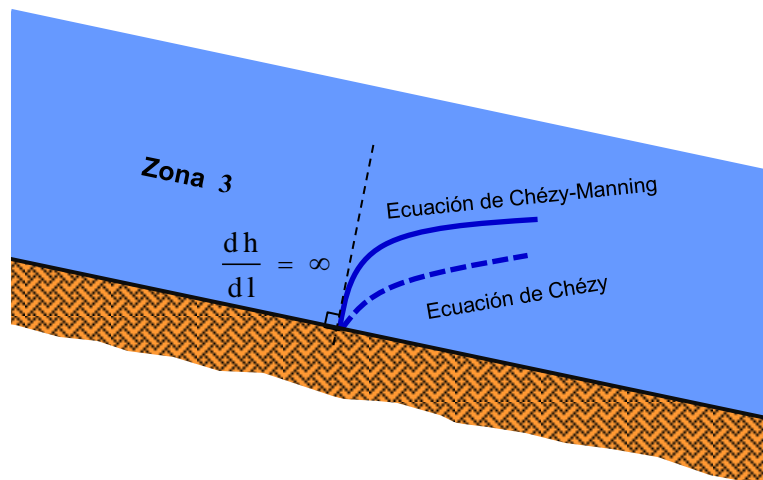


Figura 131 – Curva de remanso próxima al fondo según la ecuación de Chézy-Manning.

De las dos opciones desarrolladas, se recomienda el uso de la correspondiente a la ecuación de Chézy - Manning por ser más precisa y acorde con la realidad. La misma corresponde al trazo indicado en las *Figuras 133, 134, 135, 136 y 137* en las adyacencias del fondo del canal desde $h \rightarrow 0$ hasta una determinada altura.

La presencia de esa curva a partir de $h \rightarrow 0$ implica la presencia de un *punto de inflexión* en las curvas de remanso que se generan en la **Zona 3**, según cada tipo de pendiente en los canales analizados. En efecto, investigaciones desarrolladas por Dwight Francis Gunder (Estadounidense 1905-1964) y Georges Mouret (Francés 1850-1930) prueban que dicho punto se ubica a una distancia muy próxima a la solera del canal.

De esta forma, una línea de remanso correspondiente a la **Zona 3** resulta ser de tipo compuesta y se conforma de dos partes con distintas curvaturas separadas por el punto de inflexión. Ver *Figura 132*.

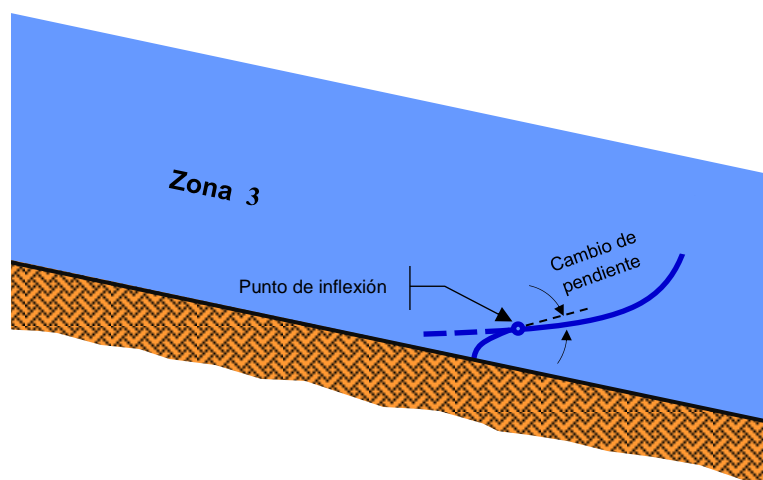


Figura 132 – Curva de remanso en zona 3 del tipo compuesta.

9.4.6. Características de las curvas de remanso tipo **D** y **F**.

Sabiendo de antemano la disposición aproximada de las curvas de remanso a partir del conocimiento del signo de las variaciones dh/dl (Ver *Figura 127*), se procede a complementar la definición de su geometría adicionando los condicionantes correspondientes a los tirantes límites. Así se logra, con las ayudas y conclusiones establecidas en las *Tablas 21* y *22*, un trazado un tanto más preciso y minucioso, aunque siempre analizado y desarrollado desde un aspecto puramente cualitativo (Ver *Figuras 133* y *134* para canales de pendiente débil y fuerte respectivamente).

Además, dentro de las tablas se clasifican las curvas de remanso según sus curvaturas, las que pueden ser:

- Cóncavas: el centro del radio de curvatura se ubica fuera de la masa líquida.
- Convexas: viceversa.

Tabla 21 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente débil.

CANAL DE PENDIENTE DÉBIL	
a) Curva tipo D_1	
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Ubicación:</i> Zona 1 <i>corresponde</i> Régimen lento o subcrítico. • <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Tirante: $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. <ul style="list-style-type: none"> - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada. ▪ Energía piezométrica: .. $\frac{dZ_h}{dl} < 0 \Rightarrow$ Curva descendente. ▪ Energía propia: $\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de energía propia. • <i>En los límites:</i> $h \rightarrow h_u \Rightarrow$ Asintótica a h_u. $h \rightarrow \infty \Rightarrow$ Horizontal. • <i>Curvatura:</i> Cóncava. 	
b) Curva tipo D_2	
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Ubicación:</i> Zona 2 <i>corresponde</i> Régimen lento o subcrítico. • <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Tirante: $\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ Tirante decreciente. <ul style="list-style-type: none"> - Curva de depresión. - Corriente acelerada. ▪ Energía piezométrica: .. $\frac{dZ_h}{dl} < 0 \Rightarrow$ Curva descendente. ▪ Energía propia: $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia. • <i>En los límites:</i> $h \rightarrow h_u \Rightarrow$ Asintótica a h_u. $h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c. • <i>Curvatura:</i> Convexa. 	

Tabla 21 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente débil. (continuación)

CANAL DE PENDIENTE DÉBIL	
d) Curva tipo D₃	
• Ubicación:	Zona 3 corresponde Régimen veloz o supercrítico.
• Variaciones con respecto al recorrido:	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} > 0 \Rightarrow$ Curva ascendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia.
• En los límites:	$h \rightarrow -\infty \Rightarrow$ Horizontal. $h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c .
• Curvatura:	Cóncava.

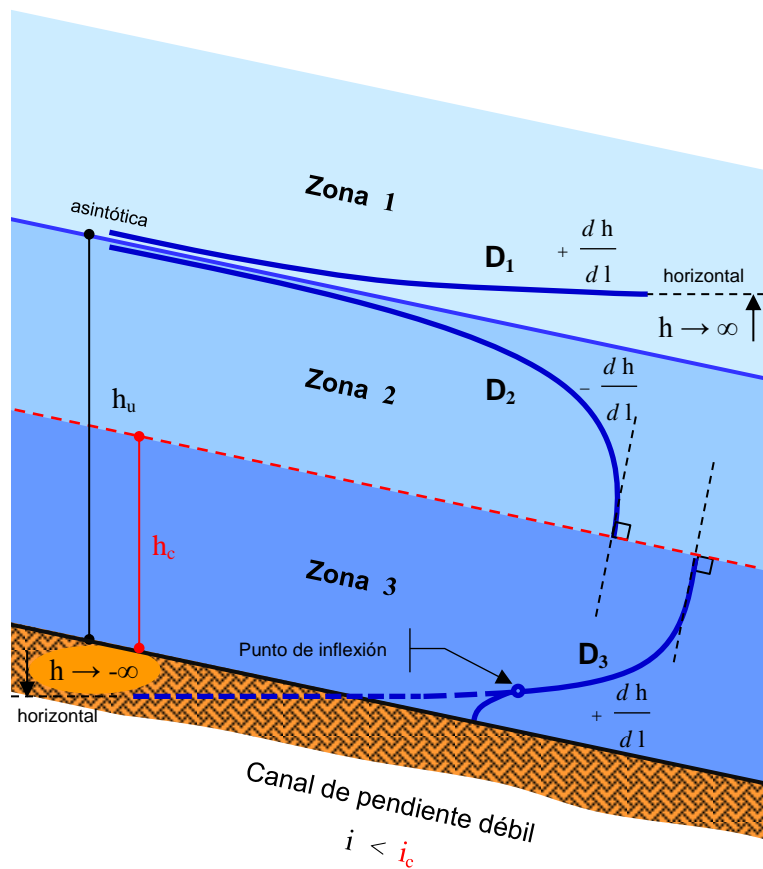


Figura 133 – Curvas de remanso tipo en canales de pendiente débil.

Tabla 22 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente fuerte.

CANAL DE PENDIENTE FUERTE	
a) Curva tipo F₁	
• <i>Ubicación:</i>	Zona 1 <i>corresponde</i> Régimen lento o subcrítico.
• <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i>	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} > 0 \Rightarrow$ Curva ascendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de energía propia.
• <i>En los límites:</i>	$h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c . $h \rightarrow \infty \Rightarrow$ Horizontal.
• <i>Curvatura:</i>	Convexa.
b) Curva tipo F₂	
• <i>Ubicación:</i>	Zona 2 <i>corresponde</i> Régimen veloz o supercrítico.
• <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i>	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ Tirante decreciente. - Curva de depresión. - Corriente acelerada.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} < 0 \Rightarrow$ Curva descendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de energía propia.
• <i>En los límites:</i>	$h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c . $h \rightarrow h_u \Rightarrow$ Asintótica a h_u .
• <i>Curvatura:</i>	Cóncava.
c) Curva tipo F₃	
• <i>Ubicación:</i>	Zona 3 <i>corresponde</i> Régimen veloz o supercrítico.
• <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i>	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} < 0 \Rightarrow$ Curva descendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia.
• <i>En los límites:</i>	$h \rightarrow -\infty \Rightarrow$ Horizontal. $h \rightarrow h_u \Rightarrow$ Asintótica a h_u .
• <i>Curvatura:</i>	Convexa.

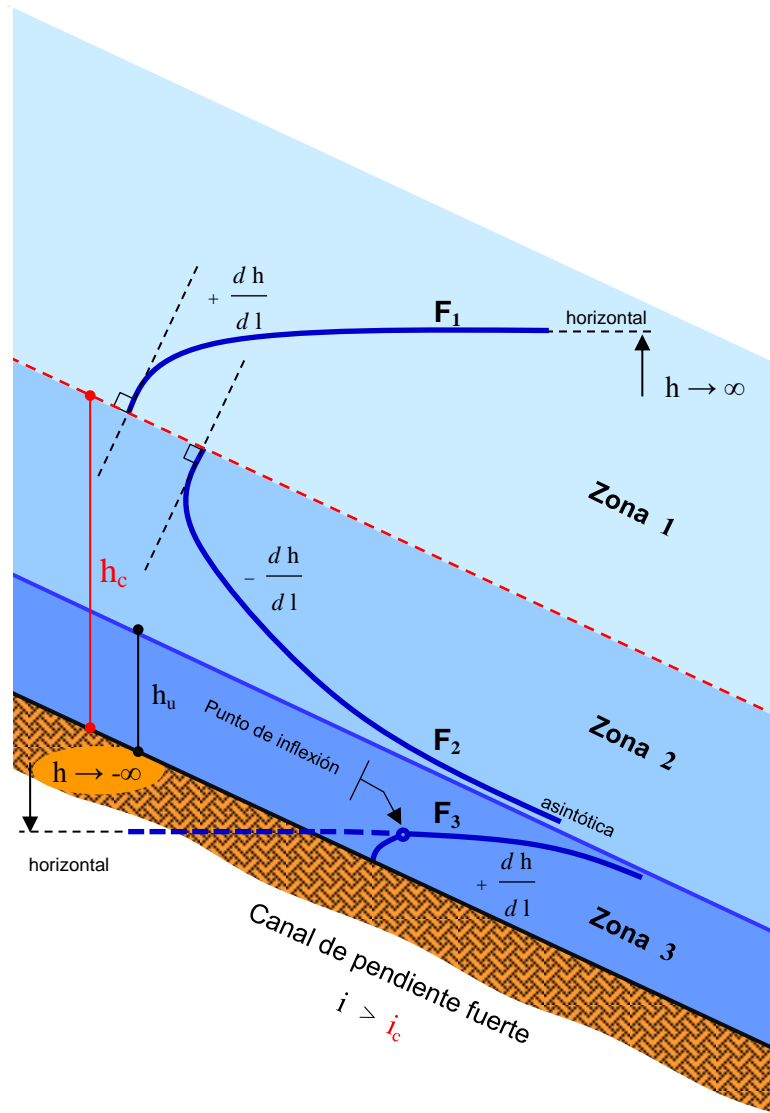


Figura 134 – Curvas de remanso tipo en canales de pendiente fuerte.

Tabla 23 Características de las curvas de remanso en canales de pendiente débil y fuerte.

CARACTERÍSTICAS FÍSICAS Y GEOMÉTRICAS	CURVAS DE REMANSO		
	Canal de pendiente		
	Débil	Fuerte	
Variación tirante $\frac{dh}{dl}$	- Sobreelevación.	D₁ y D₃	F₁ y F₃
	- Depresión.	D₂	F₂
Variación energía piezométrica $\frac{dZ_h}{dl}$	- Ascendente.	D₃	F₁
	- Descendente.	D₁ y D₂	F₂ y F₃
Variación energía propia $\frac{dH}{dl}$	- Ganancia.	D₁	F₁ y F₂
	- Pérdida.	D₂ y D₃	F₃
Curvatura.	- Cóncava.	D₁ y D₃	F₂
	- Convexa.	D₂	F₁ y F₃

Mediante un apropiado reordenamiento y resumen de las *Tablas 21 y 22* se confecciona la *Tabla 23*, en la cual se indican las curvas de remanso que corresponden a cada una de las características físicas y geométricas estudiadas. La misma es de una especial utilidad a los efectos de la determinación del tipo de curva de remanso que se producen en los escurrimientos a superficie libre como consecuencia de la interposición de singularidades en su recorrido.

9.4.7. Características de las curvas de remanso tipo **C**, **H** y **A**.

1º) Canal de pendiente crítica (ver resumen gráfico en la *Figura 135*).

Son curvas de interés teórico, ya que como se ha fundamentado anteriormente, es por demás recomendable diseñar los canales lejos de los parámetros críticos.

Tabla 24 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente crítica.

CANAL DE PENDIENTE CRÍTICA	
a) Curva tipo C₁	
• <i>Ubicación:</i>	Zona 1 <i>corresponde</i> Régimen lento o subcrítico.
• <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i>	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} > 0 \Rightarrow$ Curva ascendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de energía propia.
• <i>En los límites:</i>	
h →	$\begin{cases} h_u \\ h_c \end{cases} \Rightarrow$ Pendiente de valor finito.
h →	$\infty \Rightarrow$ Horizontal.
• <i>Curvatura:</i>	Convexa.
b) Curva tipo C₂	
• <i>Ubicación:</i>	Zona 2 <i>corresponde</i> Régimen crítico.
• <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i>	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} = 0 \Rightarrow$ Tirante constante. - Corriente constante.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} < 0 \Rightarrow$ Curva descendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} = 0 \Rightarrow$ Energía propia constante.
• <i>Curvatura:</i>	Línea recta (sin curvatura).

Tabla 24 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente crítica. (continuación)

CANAL DE PENDIENTE CRÍTICA	
c) Curva tipo C₃	
• Ubicación:	Zona 3 corresponde Régimen lento o subcrítico.
• Variaciones con respecto al recorrido:	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} > 0 \Rightarrow$ Curva ascendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia.
• En los límites:	
$h \rightarrow -\infty$	\Rightarrow Horizontal.
$h \rightarrow \begin{cases} h_u \\ h_c \end{cases}$	\Rightarrow Pendiente de valor finito.
• Curvatura:	Cóncava.

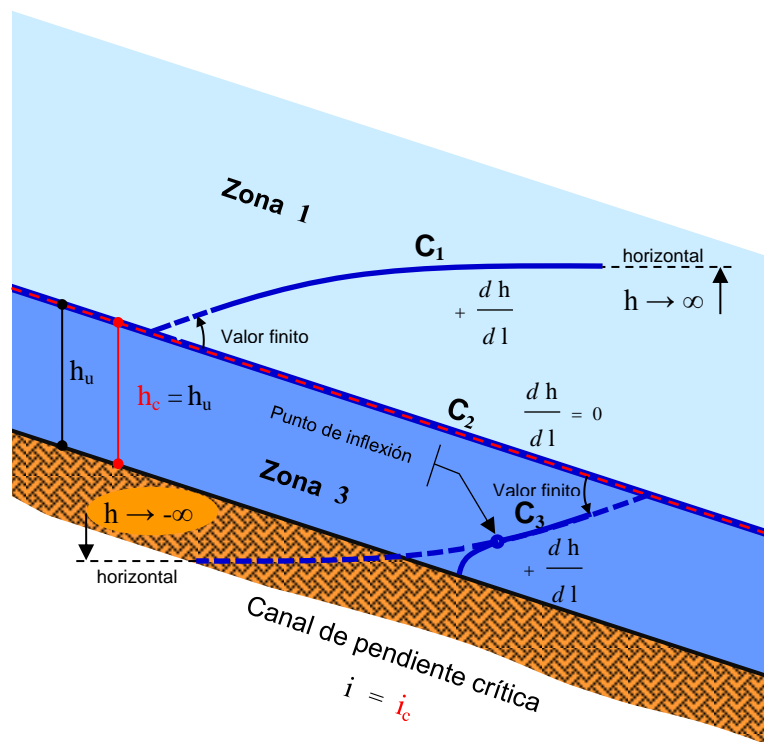


Figura 135– Curvas de remanso tipo en canales de pendiente crítica.

- Curva **C₁**: tirante creciente.
- **Límite aguas abajo:** En esta situación se produce una dualidad en la cual el tirante h tiende simultáneamente al tirante uniforme h_u y al tirante crítico h_c por ser ambos coincidentes. La relación dh/dl que representa la tangente trigonométrica del ángulo entre la curva de remanso y la línea del

perfil longitudinal correspondiente al movimiento uniforme, resulta ser un valor finito como se prueba a continuación:

Primeramente se modifica la forma de la ecuación (225) introduciendo la pendiente i por su magnitud equivalente en función de los valores característicos correspondientes al tirante uniforme:

$$i = \frac{Q^2}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dl} = \frac{Q^2 \left(\frac{1}{\Omega_u^2 c_u^2 R_u} - \frac{1}{\Omega^2 c^2 R} \right)}{1 - \frac{Q^2 B}{g \Omega^3}}$$

$\xrightarrow{\text{Condición de tirante crítico}}$
 $\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega_c^3}{B_c}$

Suponiendo un canal rectangular de similares características al descrito en la *Figura 129*, se hacen las siguientes simplificaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} R \cong h \\ R_u \cong h_u \\ \Omega = B h \\ \Omega_c = B_c h_c \\ B = B_c \end{array} \right.$$

Reemplazando:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{Q^2 \left(\frac{1}{B_u^2 h_u^2 c_u^2 h_u} - \frac{1}{B^2 h^2 c^2 h} \right)}{1 - \frac{B_c^2 h_c^3}{B^2 h^3}} \tag{248}$$

La ecuación (248) muestra el mismo valor que la (225) pero expresada con otras magnitudes. Ahora se considera que el escurrimiento se produce con una pendiente particularmente igual a la pendiente crítica ($i = i_c$), por lo que el tirante uniforme h_u resulta ser igual al tirante crítico h_c .

Por esa razón y coincidencia a continuación se modifica el subíndice u de la expresión (248) correspondiente al movimiento uniforme sustituyéndolo por el subíndice c relativo al movimiento crítico. Entonces:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{Q^2 \left(\frac{1}{B_c^2 h_c^2 c_c^2 h_c} - \frac{1}{B^2 h^2 c^2 h} \right)}{1 - \frac{B_c^2 h_c^3}{B^2 h^3}} \tag{249}$$

Desarrollando la (249):

$$\frac{dh}{dl} = \frac{Q^2 \left(\frac{1}{B^2 c_c^2 h_c^3} - \frac{1}{B^2 c^2 h^3} \right)}{\frac{h^3 - h_c^3}{h^3}} =$$

$$\frac{dh}{dl} = \frac{Q^2 h^3 \left(\frac{c^2 h^3 - c_c^2 h_c^3}{B^2 h_c^3 h^3 c_c^2 c^2} \right)}{h^3 - h_c^3} =$$

$$\frac{dh}{dl} = \frac{Q^2 h^3}{B^2 h_c^3 h^3 c_c^2 c^2} \frac{c^2 h^3 - c_c^2 h_c^3}{h^3 - h_c^3}$$

Asumiendo que el valor del coeficiente de Chézy c es c_c en el límite cuando $h \rightarrow h_c$, se procede al cálculo de dh/dl en coincidencia con el tirante crítico h_c :

$$\lim_{h \rightarrow h_c} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow h_c} \left[\frac{Q^2}{B^2 h_c^3 c_c^2 c^2} \frac{c^2 h^3 - c_c^2 h_c^3}{h^3 - h_c^3} \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow h_c} \frac{dh}{dl} = \frac{Q^2}{B^2 h_c^3 c_c^2 c^2} \frac{c_c^2 h_c^3 - c_c^2 h_c^3}{h_c^3 - h_c^3} = \frac{0}{0}$$

El resultado es indeterminado del tipo $0/0$ cuando $h = h_c$, pero en el límite el valor de dh/dl es un valor finito como se prueba a continuación:

$$\lim_{h \rightarrow h_c} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow h_c} \frac{Q^2}{B^2 h_c^3 c_c^2 c^2} \lim_{h \rightarrow h_c} \frac{c^2 h^3 - c_c^2 h_c^3}{h^3 - h_c^3} =$$

Aplicando la regla de L'Hôpital sobre el 2° término y resolviendo:

$$\lim_{h \rightarrow h_c} \frac{dh}{dl} = \frac{Q^2}{B^2 h_c^3 c_c^2} \lim_{h \rightarrow h_c} \frac{1}{c^2} \lim_{h \rightarrow h_c} \frac{3 c^2 h^2}{3 h^2} =$$

$$\lim_{h \rightarrow h_c} \frac{dh}{dl} = \frac{Q^2}{B^2 h_c^3 c_c^2} \frac{1}{c_c^2} c_c^2$$

Finalmente en el límite de $h \rightarrow h_c$ la pendiente de la curva de remanso resulta ser:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{Q^2}{B^2 h_c^3 c_c^2} \quad (250)$$

- *Límite aguas arriba:* $h \rightarrow \infty$ y la superficie se posiciona horizontalmente.

Curva **C₂**: $h = cte.$, por lo que la curva de remanso resulta ser una recta que copia la superficie libre correspondiente a h_u y coincide simultáneamente con h_c .

Curva **C₃**: tirante creciente.

- *Límite aguas abajo*: $h \rightarrow -\infty$ y la superficie se hace horizontal.
- *Límite aguas arriba*: al igual que en la curva **C₁**, cuando $h \rightarrow h_u$ y simultáneamente $h \rightarrow h_c$, la curva de remanso se orienta a la del movimiento uniforme con una pendiente finita.

2º) Canal de pendiente horizontal (ver resumen gráfico en la *Figura 136*).

Tabla 25 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente horizontal.

CANAL DE PENDIENTE HORIZONTAL	
a) Curva tipo H₁	No es posible su formación.
b) Curva tipo H₂	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Ubicación</i>: Zona 2 corresponde Régimen lento o subcrítico. • <i>Variaciones con respecto al recorrido</i>: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Tirante: $\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ Tirante decreciente. <ul style="list-style-type: none"> - Curva de depresión. - Corriente acelerada. ▪ Energía piezométrica: .. $\frac{dZ_h}{dl} < 0 \Rightarrow$ Curva descendente. ▪ Energía propia: $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia. • <i>En los límites</i>: $h \rightarrow \infty \Rightarrow$ Horizontal. $h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c. • <i>Curvatura</i>: Convexa.
c) Curva tipo H₃	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Ubicación</i>: Zona 3 corresponde Régimen veloz o supercrítico. • <i>Variaciones con respecto al recorrido</i>: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Tirante: $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. <ul style="list-style-type: none"> - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada. ▪ Energía piezométrica: .. $\frac{dZ_h}{dl} > 0 \Rightarrow$ Curva ascendente. ▪ Energía propia: $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia. • <i>En los límites</i>: $h \rightarrow -\infty \Rightarrow$ Horizontal. $h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c. • <i>Curvatura</i>: Cóncava.

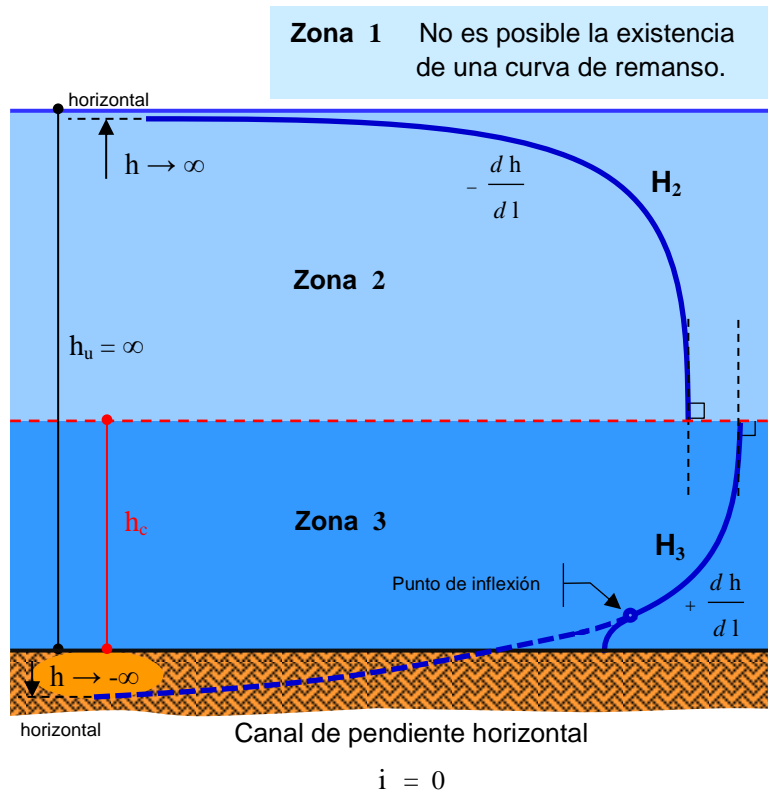


Figura 136 – Curvas de remanso tipo en canales de pendiente horizontal.

3º) Canal de pendiente adversa (ver resumen gráfico en la Figura 137).

Tabla 26 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente adversa.

CANAL DE PENDIENTE ADVERSA	
a) Curva tipo A₁	No es posible su formación.
b) Curva tipo A₂	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Ubicación:</i> Zona 2 corresponde Régimen lento o subcrítico. • <i>Variaciones con respecto al recorrido:</i> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Tirante: $\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ Tirante decreciente. <ul style="list-style-type: none"> - Curva de depresión. - Corriente acelerada. ▪ Energía piezométrica: .. $\frac{dZ_h}{dl} < 0 \Rightarrow$ Curva descendente. ▪ Energía propia: $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia. • <i>En los límites:</i> <ul style="list-style-type: none"> $h \rightarrow \infty \Rightarrow$ Horizontal. $h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c. • <i>Curvatura:</i> Convexa.

Tabla 26 Estudio de las curvas de remanso en canales de pendiente adversa. (continuación)

CANAL DE PENDIENTE ADVERSA	
c) Curva tipo A₃	
• Ubicación:	Zona 3 corresponde Régimen veloz o supercrítico.
• Variaciones con respecto al recorrido:	
▪ Tirante:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Tirante creciente. - Curva de sobreelevación. - Corriente desacelerada.
▪ Energía piezométrica: ..	$\frac{dZ_h}{dl} > 0 \Rightarrow$ Curva ascendente.
▪ Energía propia:	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia.
• En los límites:	$h \rightarrow -\infty \Rightarrow$ Horizontal. $h \rightarrow h_c \Rightarrow$ Perpendicular a h_c .
• Curvatura:	Cóncava.

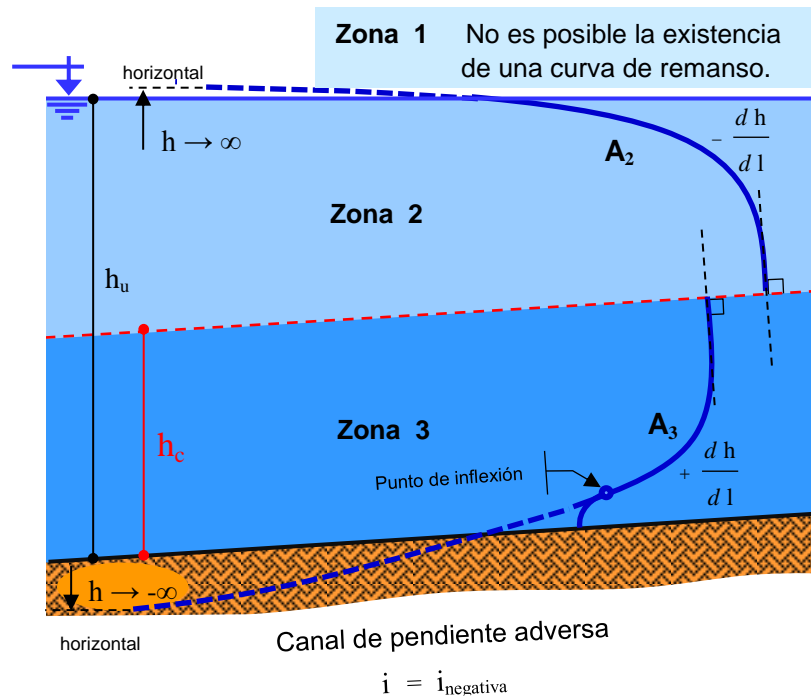


Figura 137 – Curvas de remanso tipo en canales de pendiente adversa.

9.5. Ejemplos.

9.5.1. Singularidades generadoras de curvas de remanso tipo **D**.

a) Curva de remanso tipo D_1 .

Si en un escurrimiento con movimiento uniforme a través de un canal con pendiente débil se interpone un obstáculo que ocasiona un nuevo perfil más elevado de la superficie libre, el mismo se dispone según una curva de remanso de tipo D_1 .

Tal obstáculo puede ser una presa-vertedero o azud, como en el caso de la *Figura 138*, o bien la retención por medio de una compuerta o también un cambio de pendiente longitudinal de débil a más débil entre los más comunes.

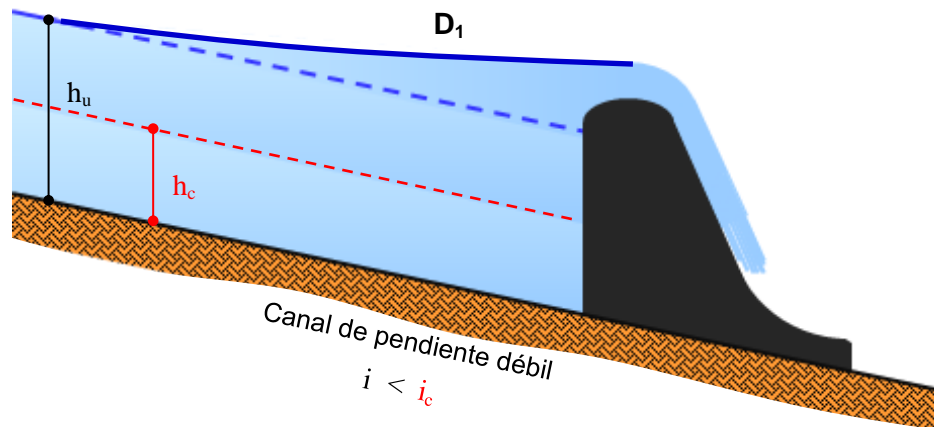


Figura 138 – Ejemplo de curva de remanso tipo D_1 .

b) Curva de remanso tipo D_2 .

Cuando en un canal prismático de pendiente débil con movimiento uniforme se interrumpe dicha uniformidad mediante una singularidad que implique la disminución de los tirantes, el perfil de la superficie libre se sitúa según una curva de remanso tipo D_2 .

Son ejemplos de ello, los saltos (ver *Figura 139*) y los ensanchamientos prolongados de la sección entre otros.

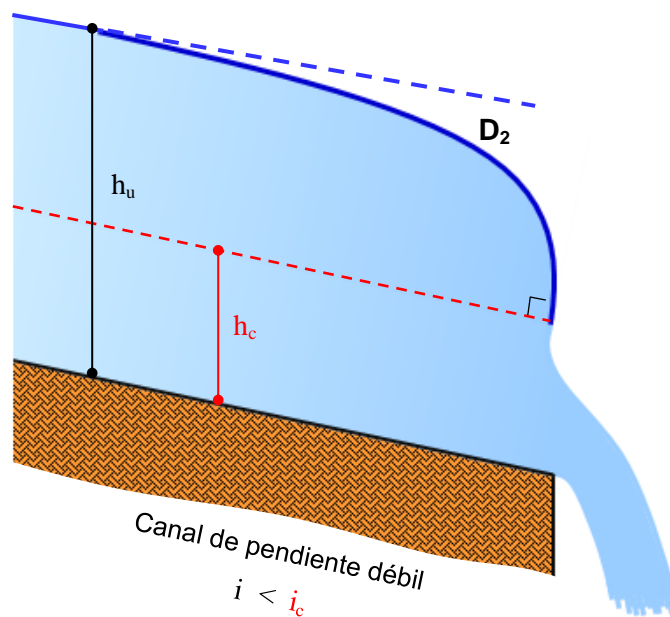
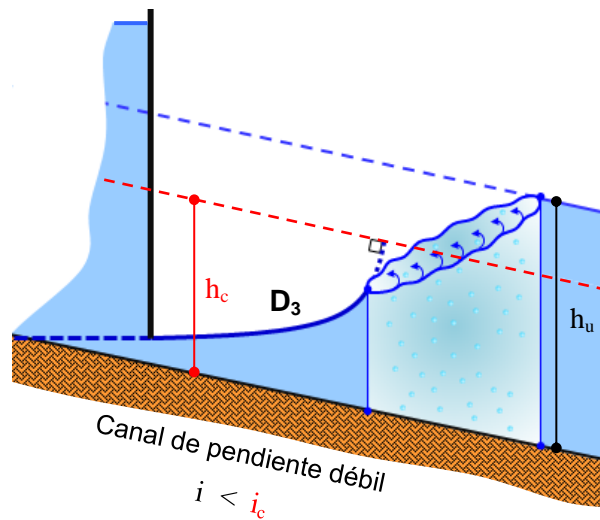


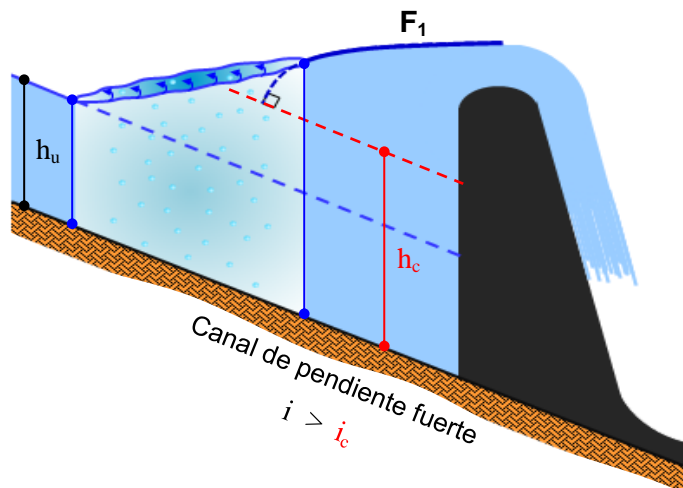
Figura 139 – Ejemplo de curva de remanso tipo D_2 .

c) Curva de remanso tipo D_3 .

Siempre que una compuerta eroga por el fondo un gasto Q en un canal de pendiente débil, con altura en la sección contraída menor que el tirante crítico h_c , a los efectos de retomar las condiciones del escurrimiento uniforme se forma una curva de remanso tipo D_3 desde la singularidad hasta las proximidades de dicho tirante crítico. Además se hace notar que invariablemente, cuando tiene lugar una curva D_3 , se produce un resalto hidráulico asociado como consecuencia de tratarse del encuentro entre un régimen veloz con uno lento.

Figura 140 – Ejemplo de curva de remanso tipo D_3 .9.5.2. Singularidades generadoras de curvas de remanso tipo F .a) Curva de remanso tipo F_1 .

Se produce cuando un caudal Q que escurre por un canal de pendiente fuerte, con un tirante uniforme h_u menor que el tirante crítico h_c , pasa a circular con un tirante que se incrementa por sobre dicho tirante crítico ($h > h_c$) por causa de la presencia de un obstáculo interpuesto en el camino (ver Figura 141) o debido a un quiebre de la pendiente longitudinal. Esta situación implica de manera ineludible el pasaje de un escurrimiento veloz a otro lento, razón por la cual se origina primeramente un resalto hidráulico que luego se acopla a una curva de remanso de tipo F_1 .

Figura 141 – Ejemplo de curva de remanso tipo F_1 .

b) Curva de remanso tipo F_2 .

Una curva de remanso que se desarrolla en la zona 2 de un escurrimiento veloz necesariamente debe ser del tipo F_2 . Aguas abajo el tirante tiende asintóticamente al tirante uniforme h_u y aguas arriba al tirante crítico h_c en forma normal.

La *Figura 142* esquematiza un ejemplo en el que se puede apreciar la existencia real de esa clase de curva. Se trata de un depósito que obliga escurrir a la corriente por encima del tirante uniforme h_u a consecuencia de la salida por un orificio de altura superior a este.

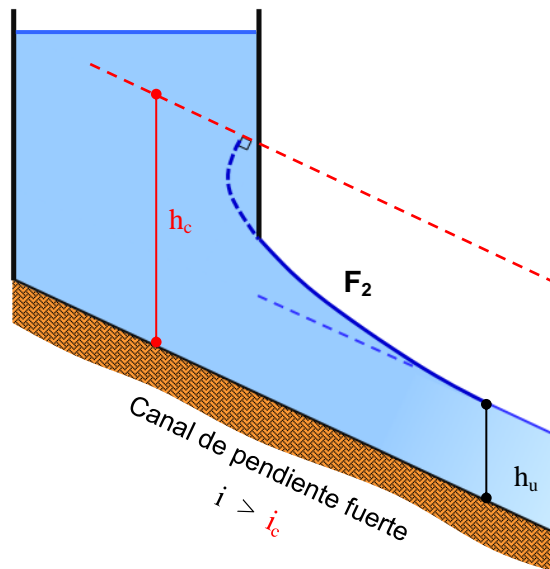


Figura 142 – Ejemplo de curva de remanso tipo F_2 .

c) Curva de remanso tipo F_3 .

Si una compuerta como la de la *Figura 143* se interpone en un canal de pendiente fuerte, la misma provoca que el tirante de la vena líquida a la salida sea menor que el tirante uniforme y el crítico ($h < h_u < h_c$), formándose una curva de remanso tipo F_3 . Aguas abajo es tangente al tirante uniforme h_u y aguas arriba queda definida por el borde inferior del obstáculo que perturba al movimiento uniforme.

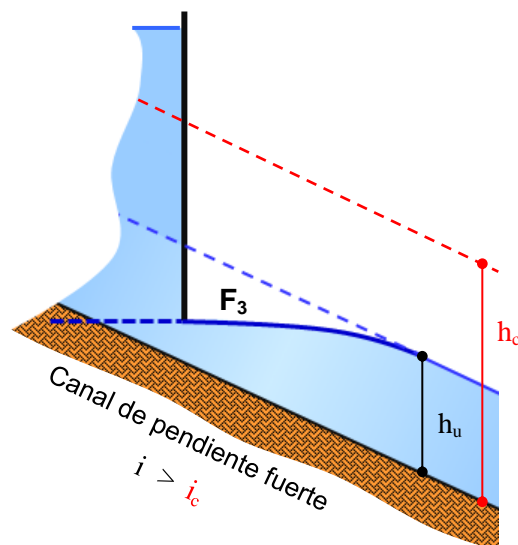


Figura 143 – Ejemplo de curva de remanso tipo F_3 .

9.6. Casos prácticos.

A continuación se desarrollan algunas situaciones prácticas que suelen producirse frecuentemente en los escurrimientos a superficie libre con movimiento gradualmente variado. Una vez planteado el problema, el objetivo principal en esta primera instancia consiste en la determinación cualitativa del tipo de curva de remanso originada por motivo de:

- Modificación de la pendiente longitudinal.
 - Canal de pendiente débil a más débil.
 - Canal de pendiente débil a menos débil.
 - Canal de pendiente fuerte a más fuerte.
 - Canal de pendiente fuerte a menos fuerte.
 - Canal de pendiente débil a fuerte.
 - Canal de pendiente fuerte a débil.
- Interposición de una compuerta plana parcialmente abierta en el extremo inferior.
 - Sobre un canal de pendiente débil.
 - Sobre un canal de pendiente fuerte.

9.6.1. Modificación de la pendiente longitudinal.

A – Canal de pendiente débil ($i_1 < i_c$) cambia a más débil ($i_2 < i_1$).

- Ver *Figura 144*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte.*

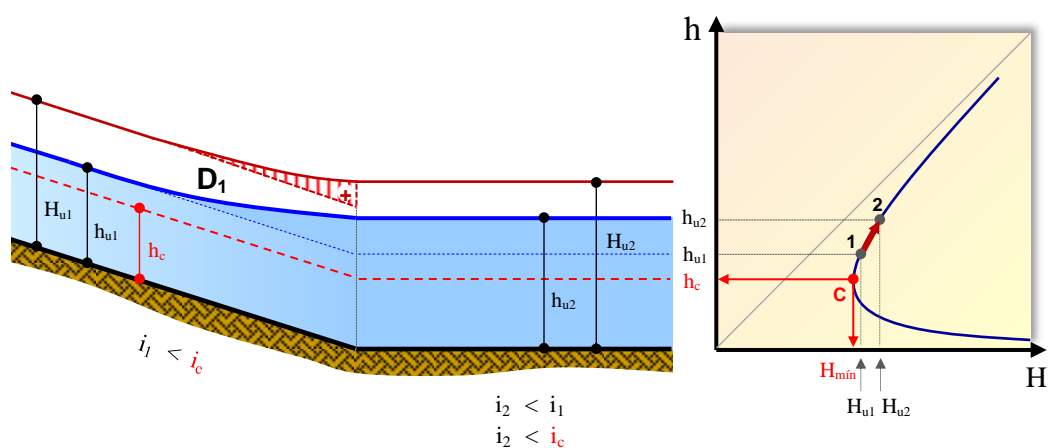


Figura 144 – Canal de pendiente débil pasa a más débil.

Resolución:

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l .	
a)	1 ^{er} tramo de pendiente i_1 <i>corresponde</i> → Tirante h_{u1} . Ver <i>Figura 44</i> .
b)	2 ^{do} tramo de pendiente i_2 <i>corresponde</i> → Tirante h_{u2} . Ver <i>Figura 44</i> .
c)	Se verifica: $h_{u2} > h_{u1}$ (incremento del tirante) Ver <i>Figura 144</i> .
d)	Conclusión: $\frac{dh}{dl} > 0$ ⇒ Ganancia de tirante h respecto al camino l .
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .	
a)	Al tirante h_{u1} <i>corresponde</i> → Energía propia H_{u1} . Ver <i>Figura 144</i> .
b)	Al tirante h_{u2} <i>corresponde</i> → Energía propia H_{u2} . Ver <i>Figura 144</i> .
c)	Se verifica: $H_{u2} > H_{u1}$ (aumento de energía propia) Ver <i>Figura 144</i> .
d)	Conclusión: $\frac{dH}{dl} > 0$ ⇒ Ganancia de e. propia H respecto al camino l .
3- Determinación del tipo de curva de remanso.	
a)	A ambos tramos de la singularidad el canal es de pendiente débil. <i>Corresponde</i> → curva Tipo D
b)	Del punto 1- d): $\frac{dh}{dl} > 0$ ⇒ <i>conforma una curva de Sobreelevación</i> . Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo D₁ o D₃ .
c)	Del punto 2- d): $\frac{dH}{dl} > 0$ ⇒ Ganancia de energía propia. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo D₁ .
d)	Conclusión: Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo D₁ . Ver las características de la curva en la <i>Figura 133</i> .
4- Ubicación.	
a)	En ambos tramos del canal el régimen es lento o subcrítico.
b)	Las velocidades de perturbación son menores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
c)	Conclusión: La curva de remanso se propaga <u>de la singularidad hacia aguas arriba</u> .

B – Canal de pendiente débil ($i_1 < i_c$) cambia a menos débil ($i_1 < i_2 < i_c$).

- Ver *Figura 145*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte*.

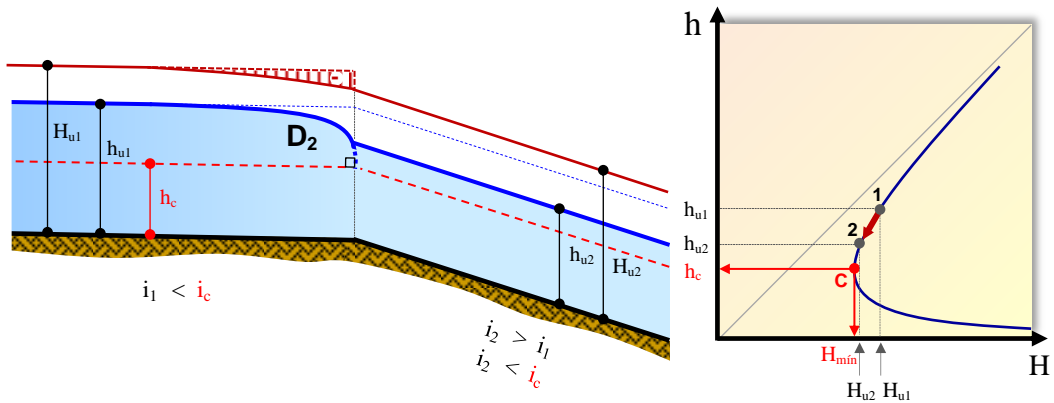


Figura 145 – Canal de pendiente débil pasa a menos débil.

Resolución:

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l.	
a)	1 ^{er} tramo de pendiente i_1 corresponde → Tirante h_{u1} . Ver Figura 44.
b)	2 ^{do} tramo de pendiente i_2 corresponde → Tirante h_{u2} . Ver Figura 44.
c)	Se verifica: $h_{u2} < h_{u1}$ (disminución del tirante) Ver Figura 145.
d)	Conclusión: $\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de tirante h respecto al camino l.
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l.	
a)	Al tirante h_{u1} corresponde → Energía propia H_{u1} . Ver Figura 145.
b)	Al tirante h_{u2} corresponde → Energía propia H_{u2} . Ver Figura 145.
c)	Se verifica: $H_{u2} < H_{u1}$ (reducción de energía propia) Ver Figura 145.
d)	Conclusión: $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de e. propia H respecto al camino l.
3- Determinación del tipo de curva de remanso.	
a)	A ambos tramos de la singularidad el canal es de pendiente débil. Corresponde → curva Tipo D
b)	Del punto 1- d): $\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ conforma una curva de Depresión. Según Tabla 23 corresponde → curva Tipo D₂ .
c)	Del punto 2- d): $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de energía propia. Según Tabla 23 corresponde → curva Tipo D₂ o D₃ .
d)	Conclusión: Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo D₂ . Ver las características de la curva en la Figura 133.

4- Ubicación.
a) En ambos tramos del canal el régimen es lento o subcrítico.
b) Las velocidades de perturbación son menores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
c) Conclusión: La curva de remanso se propaga <u>de la singularidad hacia aguas arriba</u> .

C – Canal de pendiente fuerte ($i_1 > i_c$) cambia a más fuerte ($i_2 > i_1$).

- Ver *Figura 146*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte.*

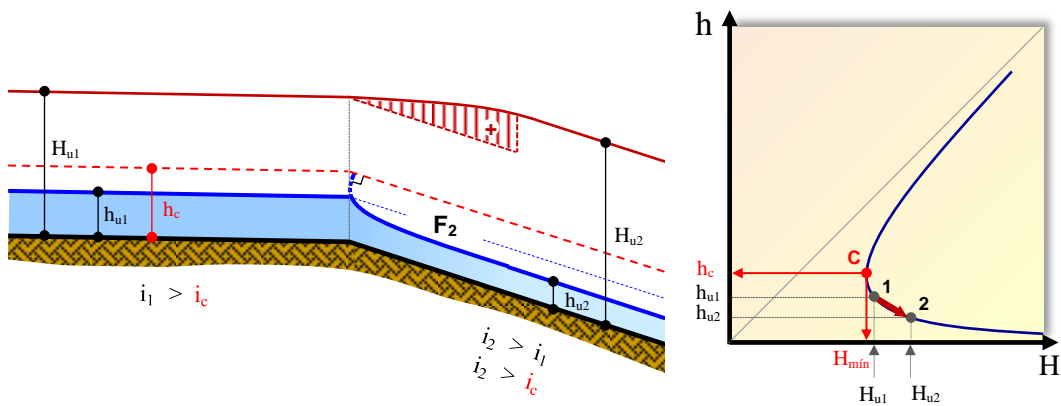


Figura 146 – Canal de pendiente fuerte pasa a más fuerte.

Resolución:

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l .			
a)	1 ^{er} tramo de pendiente i_1	corresponde → Tirante h_{u1} .	Ver <i>Figura 44</i> .
b)	2 ^{do} tramo de pendiente i_2	corresponde → Tirante h_{u2} .	Ver <i>Figura 44</i> .
c)	Se verifica:	$h_{u2} < h_{u1}$ (disminución del tirante)	Ver <i>Figura 146</i> .
d)	Conclusión:	$\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de tirante h respecto al camino l .	
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .			
a)	Al tirante h_{u1}	corresponde → Energía propia H_{u1} .	Ver <i>Figura 146</i> .
b)	Al tirante h_{u2}	corresponde → Energía propia H_{u2} .	Ver <i>Figura 146</i> .
c)	Se verifica:	$H_{u2} > H_{u1}$ (aumento de energía propia)	Ver <i>Figura 146</i> .
d)	Conclusión:	$\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de e. propia H respecto al camino l .	

3- Determinación del tipo de curva de remanso.

a) A ambos tramos de la singularidad el canal es de pendiente fuerte.

Corresponde → curva Tipo **F**

b) Del punto 1- d): $\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ conforma una curva de Depresión.

Según Tabla 23 corresponde → curva Tipo **F₂**.

c) Del punto 2- d): $\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de energía propia.

Según Tabla 23 corresponde → curva Tipo **F₁** o **F₂**.

d) Conclusión: Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una **curva de remanso Tipo F₂**.

Ver las características de la curva en la Figura 134.

4- Ubicación.

a) En ambos tramos del canal el régimen es veloz o supercrítico.

b) Las velocidades de perturbación son mayores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .

c) Conclusión:

La curva de remanso se propaga de la singularidad hacia aguas abajo.

D – Canal de pendiente fuerte ($i_1 > i_c$) cambia a menos fuerte ($i_c < i_2 < i_1$).

- Ver Figura 147.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = $cte.$

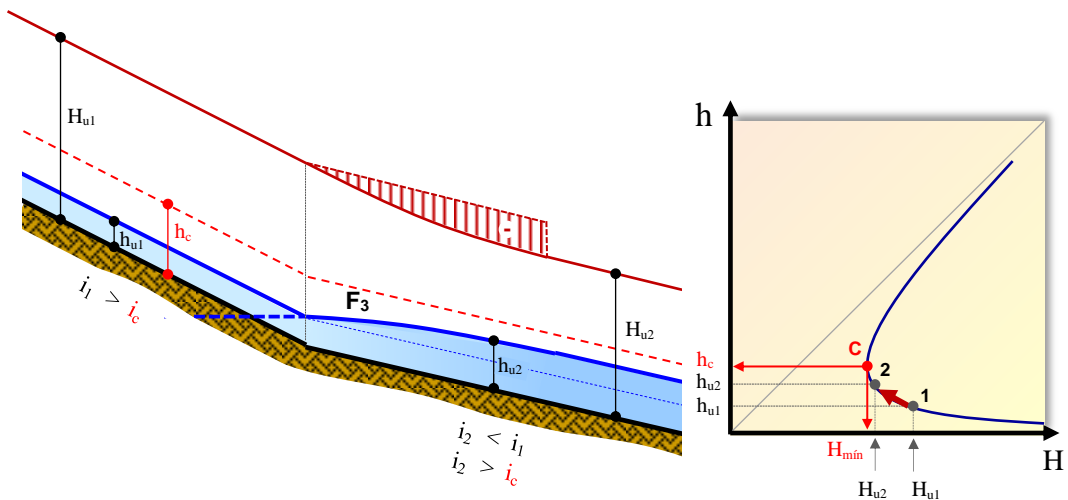


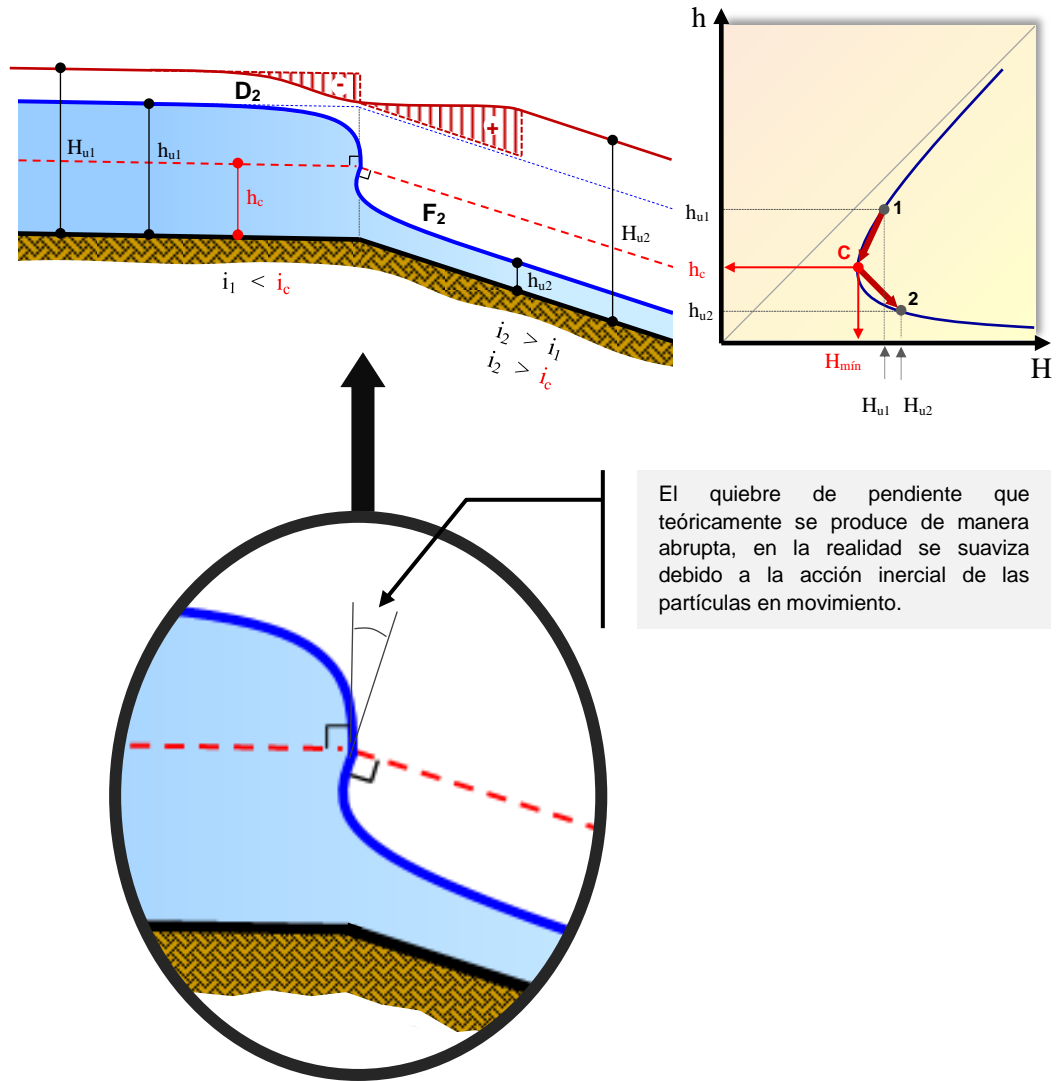
Figura 147 – Canal de pendiente fuerte pasa a menos fuerte.

Resolución:

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l .
<p>a) 1^{er} tramo de pendiente i_1 <i>corresponde</i> → Tirante h_{u1}. Ver <i>Figura 44</i>.</p> <p>b) 2^{do} tramo de pendiente i_2 <i>corresponde</i> → Tirante h_{u2}. Ver <i>Figura 44</i>.</p> <p>c) Se verifica: $h_{u2} > h_{u1}$ (incremento del tirante) Ver <i>Figura 147</i>.</p> <p>d) Conclusión: $\frac{dh}{dl} > 0$ ⇒ Ganancia de tirante h respecto al camino l.</p>
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .
<p>a) Al tirante h_{u1} <i>corresponde</i> → Energía propia H_{u1}. Ver <i>Figura 147</i>.</p> <p>b) Al tirante h_{u2} <i>corresponde</i> → Energía propia H_{u2}. Ver <i>Figura 147</i>.</p> <p>c) Se verifica: $H_{u2} < H_{u1}$ (reducción de energía propia) Ver <i>Figura 147</i>.</p> <p>d) Conclusión: $\frac{dH}{dl} < 0$ ⇒ Pérdida de e. propia H respecto al camino l.</p>
3- Determinación del tipo de curva de remanso.
<p>a) A ambos tramos de la singularidad el canal es de pendiente fuerte. <i>Corresponde</i> → curva Tipo F</p> <p>b) Del punto 1- d): $\frac{dh}{dl} > 0$ ⇒ <i>conforma una curva de Sobreelevación</i>. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo F₁ o F₃.</p> <p>c) Del punto 2- d): $\frac{dH}{dl} < 0$ ⇒ Pérdida de energía propia. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo F₃.</p> <p>d) Conclusión: Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo F₃. Ver las características de la curva en la <i>Figura 134</i>.</p>
4- Ubicación.
<p>a) En ambos tramos del canal el régimen es veloz o supercrítico.</p> <p>b) Las velocidades de perturbación son mayores que la velocidad media crítica U_c, correspondiente con el tirante crítico h_c.</p> <p>c) Conclusión: La curva de remanso se propaga <u>de la singularidad hacia aguas abajo</u>.</p>

E – Canal de pendiente débil ($i_1 < i_c$) cambia a fuerte ($i_2 > i_c$).

- Ver *Figura 148*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte*.



El quiebre de pendiente que teóricamente se produce de manera abrupta, en la realidad se suaviza debido a la acción inercial de las partículas en movimiento.

Figura 148 – Canal de pendiente débil pasa a fuerte.

En este caso es necesario dividir el estudio del remanso en dos partes bien definidas:

- Sector de pendiente débil – Aguas arriba del cambio de pendiente.
 - . Se genera una curva de remanso tipo **D**.
 - . El tirante pasa del tirante uniforme h_{u1} al tirante crítico h_c .
 - . La curva se desarrolla de la singularidad hacia aguas arriba.

- Sector de pendiente fuerte – Aguas abajo del cambio de pendiente.
 - . Se produce una curva de remanso tipo **F**.
 - . El tirante pasa del tirante crítico h_c al tirante uniforme h_{u2} .
 - . La curva se localiza de la singularidad hacia aguas abajo.

Resolución del sector de pendiente débil.

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l .	
a) 1 ^{er} tramo de pendiente i_1	<i>corresponde</i> → tirante h_{u1} . Ver <i>Figura 44</i> .
b) Singularidad - i_c intermedia	<i>corresponde</i> → tirante h_c . Ver <i>Figura 44</i> .
c) Se verifica:	$h_c < h_{u1}$ (disminución del tirante) Ver <i>Figura 148</i> .
d) Conclusión:	$\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de tirante h respecto al camino l .
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .	
a) Al tirante h_{u1}	<i>corresponde</i> → energía propia H_{u1} . Ver <i>Figura 148</i> .
b) Al tirante h_c	<i>corresponde</i> → energía propia $H_{mín}$. Ver <i>Figura 148</i> .
c) Se verifica:	$H_{mín} < H_{u1}$ (reducción de energía propia) Ver <i>Figura 148</i> .
d) Conclusión:	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de e. propia H respecto al camino l .
3- Determinación del tipo de curva de remanso.	
a)	El tramo analizado se sitúa sobre un canal es de pendiente débil. <i>Corresponde</i> → curva Tipo D
b) Del punto 1- d):	$\frac{dh}{dl} < 0 \Rightarrow$ conforma una curva de depresión. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo D₂
c) Del punto 2- d):	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ pérdida de energía propia. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo D₂ o D₃ .
d) Conclusión:	Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo D₂ . Ver las características de la curva en la <i>Figura 133</i> .
4- Ubicación.	
a)	El régimen del canal es lento o subcrítico.
b)	Las velocidades de perturbación son menores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
c) Conclusión:	La curva de remanso se propaga <u>de la singularidad hacia aguas arriba</u> .

Resolución del sector de pendiente fuerte.

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l .	
a) Singularidad - i_c intermedia	<i>corresponde</i> → tirante h_c . Ver <i>Figura 44</i> .
b) 2 ^{do} tramo de pendiente i_2	<i>corresponde</i> → tirante h_{u2} . Ver <i>Figura 44</i> .
c) Se verifica:	$h_{u2} < h_c$ (disminución del tirante) Ver <i>Figura 148</i> .
d) Conclusión:	$\frac{dh}{dl} < 0$ ⇒ Pérdida de tirante h respecto al camino l .
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .	
a) Al tirante h_c	<i>corresponde</i> → energía propia H_{\min} . Ver <i>Figura 148</i> .
b) Al tirante h_{u2}	<i>corresponde</i> → energía propia H_{u2} . Ver <i>Figura 148</i> .
c) Se verifica:	$H_{u2} > H_{\min}$ (aumento de energía propia) Ver <i>Figura 148</i> .
d) Conclusión:	$\frac{dH}{dl} > 0$ ⇒ Ganancia de e. propia H respecto al camino l .
3- Determinación del tipo de curva de remanso.	
a) El tramo en estudio corresponde a un canal de pendiente fuerte.	<i>Corresponde</i> → curva Tipo F
b) Del punto 1- d):	$\frac{dh}{dl} < 0$ ⇒ conforma una curva de depresión. Según <i>Tabla 7-23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo F₂
c) Del punto 2- d):	$\frac{dH}{dl} > 0$ ⇒ ganancia de energía propia. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo F₁ o F₂ .
d) Conclusión:	Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo F₂ . Ver las características de la curva en la <i>Figura 134</i> .
4- Ubicación.	
a) El régimen del canal es veloz o supercrítico.	
b) Las velocidades de perturbación son mayores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .	
c) Conclusión:	La curva de remanso se propaga <u>de la singularidad hacia aguas abajo</u> .

F – Canal de pendiente fuerte ($i_1 > i_c$) cambia a débil ($i_2 < i_c$).

Es una situación en la cual se verifica el pasaje de un régimen veloz a otro lento, ocurriendo invariablemente la formación de un resalto hidráulico que disipa una cierta cantidad de energía propia ΔH_R .

Como la energía propia H_{u2} aguas abajo de la singularidad puede ser menor, mayor o igual que la energía propia H_{u1} aguas arriba ($H_{u2} <, > \text{ o } = H_{u1}$), se pueden presentar tres posibilidades relacionadas con la energía consumida por el resalto ΔH_R .

1^{er} Caso –

Cumple la condición: $H_{u2} < H_{u1} - \Delta H_R$

- Ver *Figura 149*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte.*

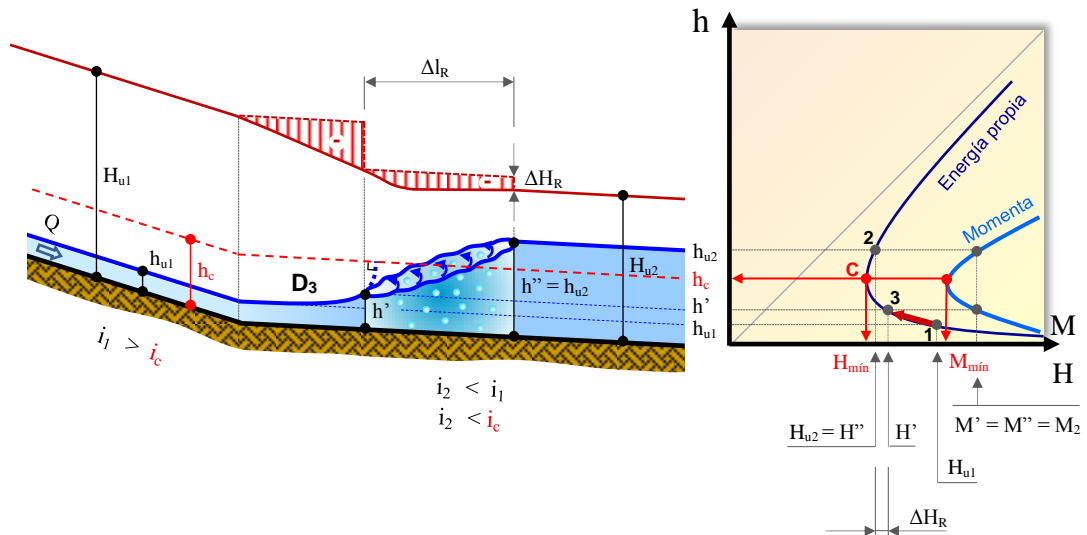


Figura 149 – Canal de pendiente fuerte pasa a débil – Caso 1.

Resolución:

1- Análisis del resalto hidráulico. Cálculo de los tirantes conjugados h' y h'' .

a) Del diagrama $M = f(h)$ sito en la *Figura 149*, se verifica el cumplimiento de la regla práctica descrita en el punto 8.3.1.:

- $h' = h_{u1}$ y $h'' = h_{u2}$ → No cumple.
- $h' = h_{u1}$ y $h'' < h_{u2}$ → No cumple.
- $h' > h_{u1}$ y $h'' = h_{u2}$ → **Sí cumple.**

b) Conclusión:

entre el tirante uniforme h_{u1} y el tirante conjugado h' se desarrolla una curva de remanso.

c) Se calcula la longitud del resalto Δl_R según lo señalado en el apartado 8.3.2.

2- Variación del tirante h con relación al recorrido l .

- a) Inicio curva de remanso *corresponde* → tirante h_{u1} . Ver *Figura 149*.
- b) Final curva de remanso *corresponde* → tirante h' . Ver *Figura 149*.
- c) Se verifica: $h' > h_{u1}$ (incremento del tirante) Ver *Figura 149*.
- d) Conclusión: $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de tirante h respecto al camino l .

3- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .

- a) Al tirante h_{u1} *corresponde* → energía propia H_{u1} . Ver *Figura 149*.
- b) Al tirante h' *corresponde* → energía propia H' . Ver *Figura 149*.
- c) Se verifica: $H' < H_{u1}$ (reducción de energía propia) Ver *Figura 149*.
- d) Conclusión: $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de e. propia H respecto al camino l .

4- Ubicación.

- a) La curva de remanso se desarrolla con tirantes variables entre h_{u1} y h' , por debajo del tirante crítico h_c .
- b) Las velocidades de perturbación en el remanso son mayores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
- c) La curva de remanso se propaga de la singularidad hacia aguas abajo.
- d) La ubicación de la curva de remanso se concreta de la singularidad hacia aguas abajo, sector que corresponde al tramo del canal con pendiente débil.

5- Determinación del tipo de curva de remanso.

- a) La curva de remanso se localiza sobre el tramo del canal con pendiente débil.
Corresponde → curva Tipo **D**
- b) Del punto 2- d): $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ conforma una curva de sobreelevación.
Según *Tabla 23* *corresponde* → curva Tipo **D₁** o **D₃**.
- c) Del punto 3- d): $\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ pérdida de energía propia.
Según *Tabla 23* *corresponde* → curva Tipo **D₂** o **D₃**.
- d) Conclusión: Del análisis de los puntos 5- b) y 5- c) se concluye que la solución al problema es una **curva de remanso Tipo D₃**.
Ver las características de la curva en la *Figura 133*.

2^{do} Caso –

Cumple la condición: $H_{u2} > H_{u1} - \Delta H_R$

- Ver *Figura 150*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte.*

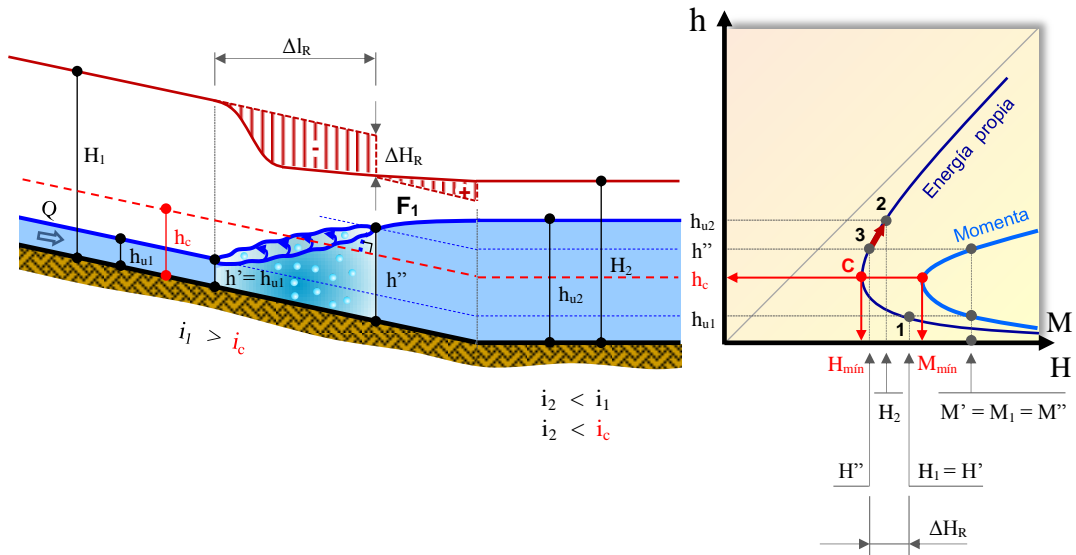


Figura 150 – Canal de pendiente fuerte pasa a débil – Caso 2.

Resolución:

1- Análisis del resalto hidráulico. Cálculo de los tirantes conjugados h' y h'' .		
a)	Del diagrama $M = f(h)$ sito en la <i>Figura 150</i> , se verifica el cumplimiento de la regla práctica descrita en el punto 8.3.1.:	
	<ul style="list-style-type: none"> • $h' = h_{u1}$ y $h'' = h_{u2}$ → No cumple. • $h' = h_{u1}$ y $h'' < h_{u2}$ → Sí cumple. • $h' > h_{u1}$ y $h'' = h_{u2}$ → No cumple. 	
b)	Conclusión:	entre el tirante conjugado h'' y el tirante uniforme h_{u2} se desarrolla una curva de remanso.
c)	Se calcula la longitud del resalto Δl_R según lo señalado en el apartado 8.3.2.	
2- Variación del tirante h con relación al recorrido l .		
a)	Inicio curva de remanso	corresponde → tirante h'' . Ver <i>Figura 150</i> .
b)	Final curva de remanso	corresponde → tirante h_{u2} . Ver <i>Figura 150</i> .
c)	Se verifica: $h_{u2} > h''$	(incremento del tirante) Ver <i>Figura 150</i> .
d)	Conclusión:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de tirante h respecto al camino l .

3- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .	
a)	Al tirante h'' <i>corresponde</i> \rightarrow energía propia H'' . Ver <i>Figura 150</i> .
b)	Al tirante h_{u2} <i>corresponde</i> \rightarrow energía propia H_{u2} . Ver <i>Figura 150</i> .
c)	Se verifica: $H_{u2} > H''$ (aumento de energía propia) Ver <i>Figura 150</i> .
d)	Conclusión: $\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de e. propia H respecto al camino l .
4- Ubicación.	
a)	La curva de remanso se desarrolla con tirantes variables entre h'' y h_{u2} , por encima del tirante crítico h_c .
b)	Las velocidades de perturbación en el remanso son menores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
c)	La curva de remanso se propaga de la singularidad hacia aguas arriba.
d)	La ubicación de la curva de remanso se concreta de la singularidad hacia aguas arriba, sector que corresponde al tramo del canal con pendiente fuerte.
5- Determinación del tipo de curva de remanso.	
a)	La curva de remanso se localiza sobre el tramo del canal con pendiente fuerte. <i>Corresponde</i> \rightarrow curva Tipo F
b)	Del punto 2- d): $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ conforma una curva de sobreelevación. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> \rightarrow curva Tipo F₁ o F₃ .
c)	Del punto 3- d): $\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ ganancia de energía propia. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> \rightarrow curva Tipo F₁ o F₂ .
d)	Conclusión: Del análisis de los puntos 5- b) y 5- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo F₁ . Ver las características de la curva en la <i>Figura 133</i> .

3^{er} Caso –

Cumple la condición: $H_{u2} = H_{u1} - \Delta H_R$

La energía propia H_{u2} en el tramo de canal con pendiente débil, aguas abajo del quiebre, es igual a la energía propia H_{u1} en el otro tramo con pendiente fuerte, aguas arriba de la singularidad, menos la energía ΔH_R consumida por el resalto hidráulico.

En esta circunstancia, en que la corriente hidráulica no debe recuperar ni ceder energía propia, no se genera ninguna curva de remanso. Solo se produce el resalto localizado en concordancia con la singularidad, entre los tirantes uniformes h_{u1} y h_{u2} , los que a su vez coinciden respectivamente con los tirantes conjugados h' y h'' , satisfaciendo este tercer caso particular.

9.6.2. Interposición de compuerta plana.

Si en un escurrimiento a superficie libre, con movimiento permanente y uniforme, se intercala una compuerta plana vertical, parcialmente abierta en su borde inferior y de espesor despreciable, se modifica sustancialmente el perfil de la corriente líquida, tanto aguas arriba como aguas debajo de la singularidad.

Para el estudio del paso de la corriente a través de la compuerta se aplica la ecuación de Bernoulli entre las secciones correspondientes a la entrada y salida de la misma. Ver *Figura 151*.

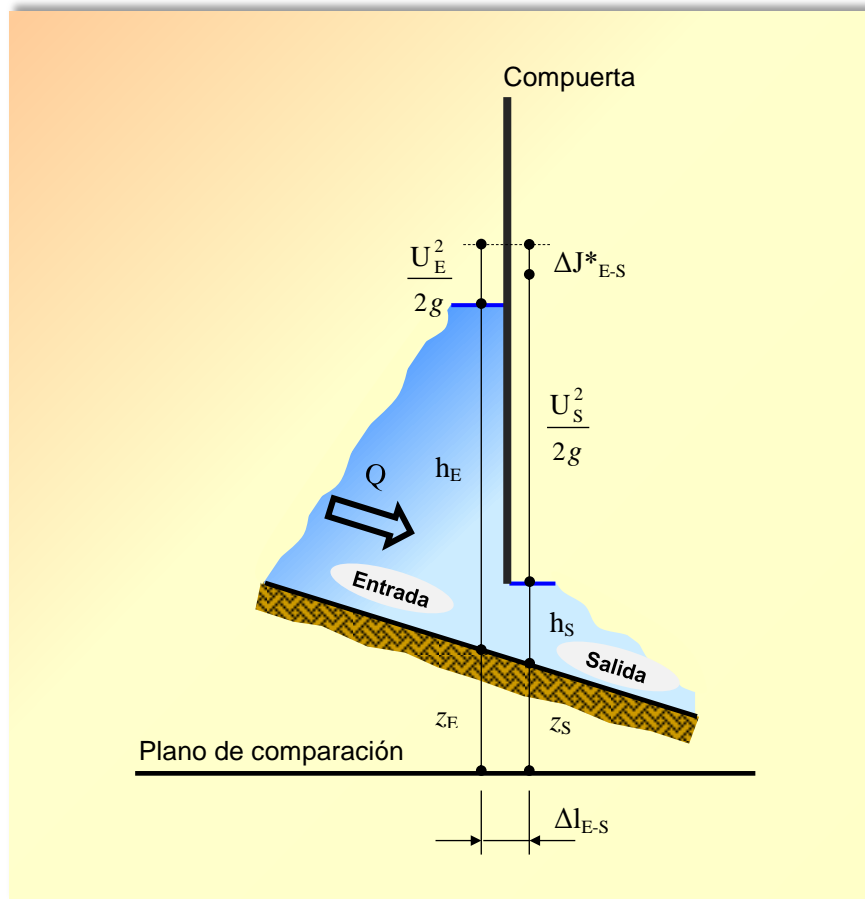


Figura 151 – Compuerta parcialmente abierta en un canal.

$$z_E + h_E + \frac{U_E^2}{2g} = z_S + h_S + \frac{U_S^2}{2g} + \Delta J^*_{E-S} \quad (251)$$

En estas condiciones se acepta:

$$\begin{cases} \Delta J^*_{E-S} \cong 0 \\ \Delta l_{E-S} \cong 0 \end{cases} \Rightarrow z_E = z_S$$

Reemplazando en (251) y simplificando el término \$z_E\$ con \$z_S\$:

$$h_E + \frac{U_E^2}{2g} = h_S + \frac{U_S^2}{2g}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$H_E \qquad \qquad H_S$$

$$H_E = H_S \quad (252)$$

Así se prueba que si la compuerta es plana y de dimensión insignificante referente a su espesor, la energía propia en la entrada es prácticamente la misma que la de la salida.

A partir de esa igualdad se puede determinar el tirante en la entrada h_e , ya que se conoce el tirante a la salida h_s y consecuentemente se puede calcular de forma sencilla la energía propia a la salida H_s . En efecto, se tiene que:

$$H_S = h_S + \frac{U_S^2}{2g} = h_S + \frac{Q^2}{2g \Omega_S^2} \quad (253)$$

Donde:

- h_s Dato. Igual a la longitud de apertura de la compuerta.
- Q Dato. Valor constante si se considera movimiento permanente.
- Ω_s Se calcula en función de h_s y la forma de la sección.

En el caso particular de un canal rectangular, de ancho B y movimiento permanente ($Q = cte.$), el cálculo se simplifica significativamente. Para ello se determina previamente la energía propia a la salida de la compuerta:

$$H_S = h_S + \frac{Q^2}{2g \Omega_S^2} = h_S + \frac{Q^2}{2g B^2 h_S^2} \quad (254)$$

De la expresión (252) y conociendo el valor de H_s a partir de (254), se comienza con el cálculo del tirante en la entrada h_e :

$$H_E = H_S = h_E + \frac{Q^2}{2g \Omega_E^2} = h_S + \frac{Q^2}{2g B^2 h_E^2}$$

Despejando, se obtiene una ecuación cúbica incompleta con una sola incógnita (h_e), fácilmente resoluble mediante cualquier método iterativo, como por ejemplo, aproximaciones sucesivas:

$$h_E^3 + H_S h_E^2 + \frac{Q^2}{2g B^2} = 0 \quad (255)$$

Así queda definido el tirante en la entrada de la compuerta h_E en función de la energía propia en la salida H_s , el caudal Q y el ancho del canal B , independientemente que la pendiente longitudinal sea débil o fuerte.

A – Compuerta parcialmente abierta en un canal de pendiente débil ($i < i_c$).

- Ver *Figura 152*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte.*

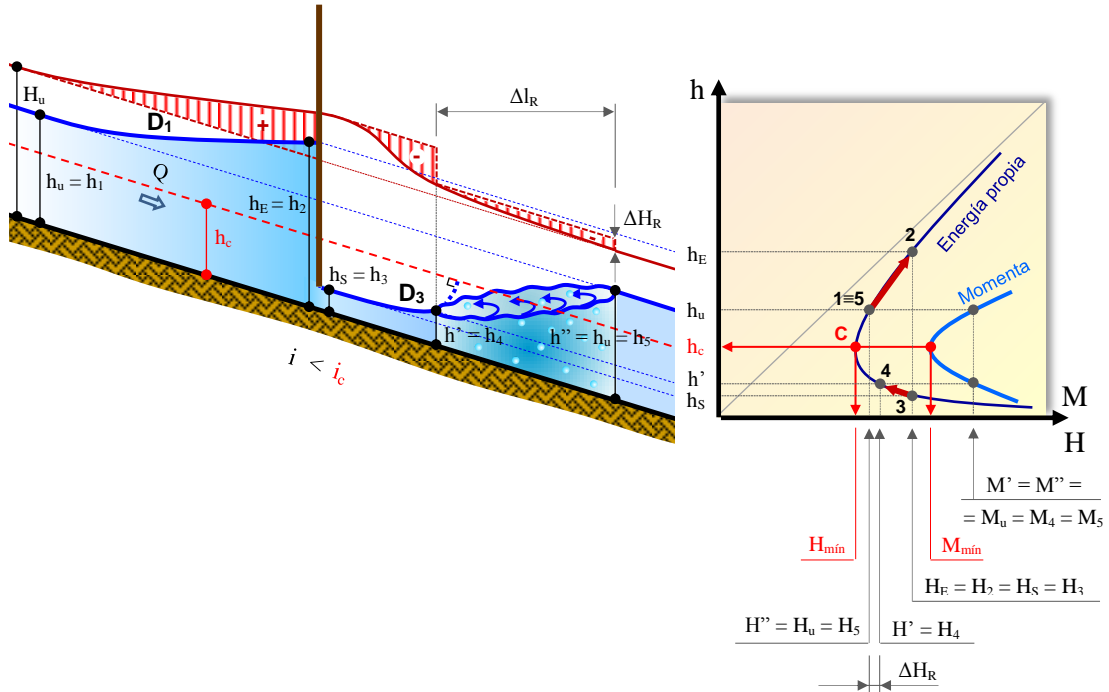


Figura 152 – Compuerta parcialmente abierta en un canal de pendiente débil.

Resolución aguas arriba de la compuerta.

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l .			
a)	Inicio curva de remanso	corresponde \rightarrow tirante h_u .	Ver <i>Figura 152</i> .
b)	Final curva de remanso	corresponde \rightarrow tirante h_E .	Ver <i>Figura 152</i> .
c)	Se verifica:	$h_E > h_u$ (incremento del tirante)	Ver <i>Figura 152</i> .
d)	Conclusión:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de tirante h respecto al camino l .	
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .			
a)	Al tirante h_u	corresponde \rightarrow energía propia H_u .	Ver <i>Figura 152</i> .
b)	Al tirante h_E	corresponde \rightarrow energía propia H_E .	Ver <i>Figura 152</i> .
c)	Se verifica:	$H_E > H_u$ (aumento de energía propia)	Ver <i>Figura 152</i> .
d)	Conclusión:	$\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de e. propia H respecto al camino l .	

3- Determinación del tipo de curva de remanso.

- a) La curva de remanso se localiza sobre un canal de pendiente débil.
Corresponde → curva Tipo **D**
- b) Del punto 1- d): $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ conforma una curva de sobreelevación.
Según *Tabla 23* corresponde → curva Tipo **D₁** o **D₃**.
- c) Del punto 2- d): $\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ ganancia de energía propia.
Según *Tabla 23* corresponde → curva Tipo **D₁**.
- d) Conclusión: Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una **curva de remanso Tipo D₁**.
Ver las características de la curva en la *Figura 133*.

4- Ubicación.

- a) La curva de remanso se desarrolla con tirantes variables entre h_u y h_E por encima del tirante crítico h_c .
- b) Las velocidades de perturbación en el remanso son menores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
- c) Conclusión:
La curva de remanso se propaga de la compuerta hacia aguas arriba, concentrándose en ese sector su ubicación. Ver *Figura 152*.

Resolución aguas abajo de la compuerta.

El tirante pasa de la altura de apertura de la compuerta $h_S < h_c$ hasta retomar el tirante $h_u > h_c$ correspondiente con la pendiente longitudinal i . Por consiguiente, la corriente atraviesa de un tipo de régimen veloz a otro lento, el cual se realiza mediante la formación de un resalto hidráulico, con una curva de remanso asociada en este caso.

1- Análisis del resalto hidráulico. Cálculo de los tirantes conjugados h' y h'' .

- a) Del diagrama $M = f(h)$ sito en la *Figura 152*, se verifica el cumplimiento de la regla práctica descrita en el punto 7-8.3.1.:
- $h' = h_S$ y $h'' = h_u$ → No cumple.
 - $h' = h_S$ y $h'' < h_u$ → No cumple.
 - $h' > h_S$ y $h'' = h_u$ → **Sí cumple.**
- b) Conclusión:
entre el tirante h_S a la salida de la compuerta y el tirante conjugado h' se desarrolla una curva de remanso y luego se produce un resalto hidráulico hasta retomar el tirante uniforme h_u .
- c) Se calcula la longitud del resalto Δl_R según lo señalado en el apartado 8.3.2.

2- Variación del tirante h con relación al recorrido l.			
a)	Inicio curva de remanso	corresponde → tirante h_s .	Ver Figura 152.
b)	Final curva de remanso	corresponde → tirante h' .	Ver Figura 152.
c)	Se verifica:	$h' > h_s$ (incremento del tirante)	Ver Figura 152.
d)	Conclusión:	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de tirante h respecto al camino l.	
3- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l.			
a)	Al tirante h_s	corresponde → energía propia H_s .	Ver Figura 152.
b)	Al tirante h'	corresponde → energía propia H' .	Ver Figura 152.
c)	Se verifica:	$H' < H_s$ (reducción de energía propia)	Ver Figura 152.
d)	Conclusión:	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ Pérdida de e. propia H respecto al camino l.	
4- Determinación del tipo de curva de remanso.			
a)	La curva de remanso se ubica sobre un canal de pendiente débil. Corresponde → curva Tipo D		
b)	Del punto 2- d):	$\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ conforma una curva de sobreelevación.	
	Según Tabla 23	corresponde → curva Tipo D₁ o D₃ .	
c)	Del punto 3- d):	$\frac{dH}{dl} < 0 \Rightarrow$ pérdida de energía propia.	
	Según Tabla 23	corresponde → curva Tipo D₂ o D₃ .	
d)	Conclusión: Del análisis de los puntos 4- b) y 4- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo D₃ . Ver las características de la curva en la Figura 133.		
5- Ubicación.			
a)	La curva de remanso se desarrolla con tirantes variables entre h_s y h' por debajo del tirante crítico h_c .		
b)	Las velocidades de perturbación en el remanso son mayores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .		
c)	Conclusión: La curva de remanso se propaga <u>de la compuerta hacia aguas abajo</u> , concretándose su ubicación en ese sector. Ver Figura 152.		
d)	Nota: posterior a la curva de remanso se localiza el resalto hidráulico, después del cual el canal retoma el tirante uniforme h_u .		

B – Compuerta parcialmente abierta en un canal de pendiente fuerte ($i > i_c$).

- Ver *Figura 153*.
- $Q = cte.$ (movimiento permanente).
- Forma transversal = *cte.*

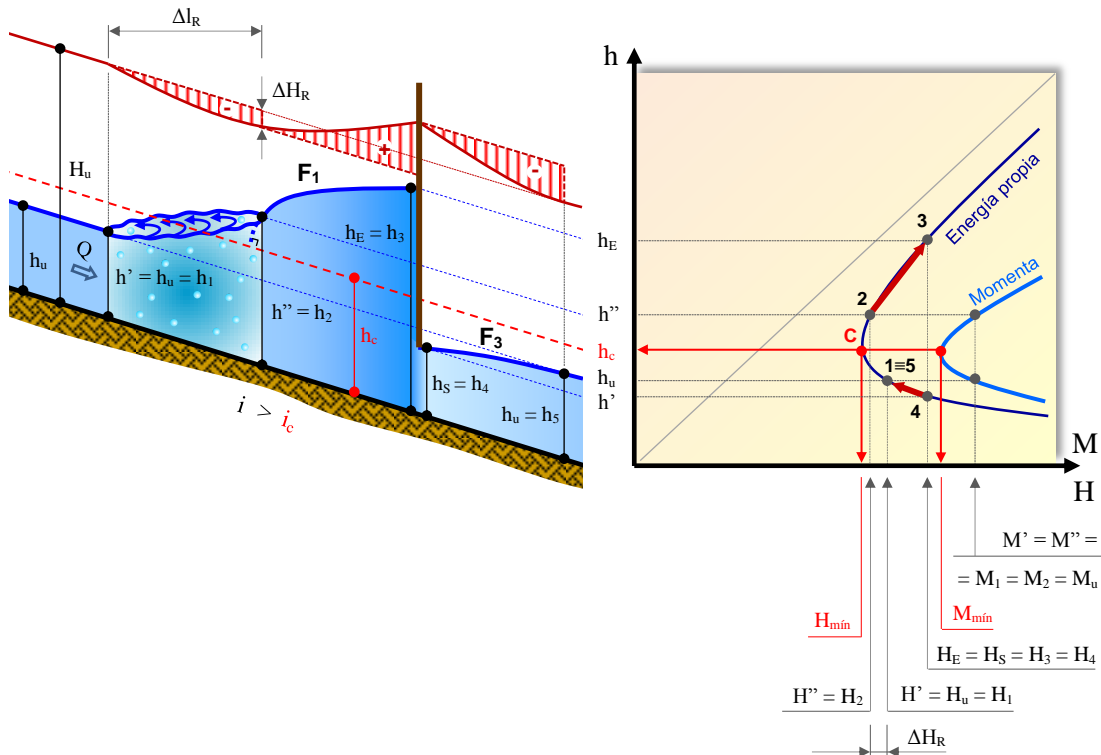


Figura 153 – Compuerta parcialmente abierta en un canal de pendiente fuerte.

Resolución aguas arriba de la compuerta.

El tirante pasa de una altura igual al tirante uniforme $h_u < h_c$ a otro superior $h_E > h_c$ en coincidencia con el borde lateral de entrada a la compuerta. Por lo tanto, la corriente líquida inevitablemente traspasa de un régimen veloz a otro lento, mediante el cual se produce un resalto hidráulico con una curva de remanso asociada en este ejemplo particular.

1- Análisis del resalto hidráulico. Cálculo de los tirantes conjugados h' y h'' .	
a)	Del diagrama $M = f(h)$ sito en la <i>Figura 153</i> , se verifica el cumplimiento de la regla práctica descrita en el punto 8.3.1.:
	<ul style="list-style-type: none"> • $h' = h_u$ y $h'' = h_E$ → No cumple. • $h' = h_u$ y $h'' < h_E$ → Sí cumple. • $h' > h_u$ y $h'' = h_E$ → No cumple.
b)	Conclusión:
	entre el tirante uniforme h_u y el tirante conjugado h'' se forma un resalto hidráulico, y luego asociado al mismo, entre los tirantes h'' y h_E se desarrolla una curva de remanso.
c)	Se calcula la longitud del resalto Δl_R según lo señalado en el apartado 8.3.2.

2- Variación del tirante h con relación al recorrido l .

- a) Inicio curva de remanso *corresponde* → tirante h'' . Ver *Figura 153*.
- b) Final curva de remanso *corresponde* → tirante h_E . Ver *Figura 153*.
- c) Se verifica: $h_E > h''$ (incremento del tirante) Ver *Figura 153*.
- d) Conclusión: $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de tirante h respecto al camino l .

3- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .

- a) Al tirante h'' *corresponde* → energía propia H'' . Ver *Figura 153*.
- b) Al tirante h_E *corresponde* → energía propia H_E . Ver *Figura 153*.
- c) Se verifica: $H_E > H''$ (aumento de energía propia) Ver *Figura 153*.
- d) Conclusión: $\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ Ganancia de e. propia H respecto al camino l .

4- Determinación del tipo de curva de remanso.

- a) La curva de remanso se ubica sobre un canal de pendiente fuerte.
Corresponde → curva Tipo **F**
- b) Del punto 2- d): $\frac{dh}{dl} > 0 \Rightarrow$ conforma una curva de sobreelevación.
Según *Tabla 23* *corresponde* → curva Tipo **F₁** o **F₃**.
- c) Del punto 3- d): $\frac{dH}{dl} > 0 \Rightarrow$ ganancia de energía propia.
Según *Tabla 23* *corresponde* → curva Tipo **F₁** o **F₂**.
- d) Conclusión: Del análisis de los puntos 4- b) y 4- c) se concluye que la solución al problema es una **curva de remanso Tipo F₁**.
Ver las características de la curva en la *Figura 134*.

5- Ubicación.

- a) La curva de remanso se desarrolla con tirantes variables entre h'' y h_E por encima del tirante crítico h_c .
- b) Las velocidades de perturbación en el remanso son menores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
- c) Conclusión:
La curva de remanso se propaga de la compuerta hacia aguas arriba, concretándose su ubicación en ese sector. Ver *Figura 153*.
- d) Nota: anterior a la curva de remanso se localiza el resalto hidráulico, haciendo de nexo entre el tirante uniforme h_u y el inicio de dicha curva de remanso.

Resolución aguas abajo de la compuerta.

1- Variación del tirante h con relación al recorrido l .	
a)	Inicio curva de remanso <i>corresponde</i> → tirante h_s . Ver <i>Figura 153</i> .
b)	Final curva de remanso <i>corresponde</i> → tirante h_u . Ver <i>Figura 153</i> .
c)	Se verifica: $h_u > h_s$ (incremento del tirante) Ver <i>Figura 153</i> .
d)	Conclusión: $\frac{dh}{dl} > 0$ ⇒ Ganancia de tirante h respecto al camino l .
2- Variación de la energía propia H con relación al recorrido l .	
a)	Al tirante h_s <i>corresponde</i> → energía propia H_s . Ver <i>Figura 153</i> .
b)	Al tirante h_u <i>corresponde</i> → energía propia H_u . Ver <i>Figura 153</i> .
c)	Se verifica: $H_u < H_s$ (reducción de energía propia) Ver <i>Figura 153</i> .
d)	Conclusión: $\frac{dH}{dl} < 0$ ⇒ Pérdida de e. propia H respecto al camino l .
3- Determinación del tipo de curva de remanso.	
a)	La curva de remanso se ubica sobre un canal de pendiente fuerte. <i>Corresponde</i> → curva Tipo F
b)	Del punto 1- d): $\frac{dh}{dl} > 0$ ⇒ conforma una curva de sobreelevación. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo F₁ o F₃ .
c)	Del punto 2- d): $\frac{dH}{dl} < 0$ ⇒ pérdida de energía propia. Según <i>Tabla 23</i> <i>corresponde</i> → curva Tipo F₃ .
d)	Conclusión: Del análisis de los puntos 3- b) y 3- c) se concluye que la solución al problema es una curva de remanso Tipo F₃ . Ver las características de la curva en la <i>Figura 134</i> .
4- Ubicación.	
a)	La curva de remanso se desarrolla con tirantes variables entre h_s y h_u por debajo del tirante crítico h_c .
b)	Las velocidades de perturbación en el remanso son mayores que la velocidad media crítica U_c , correspondiente con el tirante crítico h_c .
c)	Conclusión: La curva de remanso se propaga <u>de la compuerta hacia aguas abajo</u> , concentrándose en ese sector su ubicación. Ver <i>Figura 153</i> .

9.7. Trazado analítico - Integración de la curva de remanso.

La integración de la ecuación diferencial de la curva de remanso respecto a su recorrido ha sido planteada por una importante cantidad de autores, distinguiéndose sus metodologías resolutorias por la aplicación de simplificaciones y transformaciones que hacen posible el cálculo para determinar el resultado de la misma con suficiente aproximación.

Una forma práctica, racional y sencilla de interpretar consiste en resolver analíticamente la forma de la curva de remanso $h = f(l)$ en un movimiento gradualmente variado aplicando el *método de las diferencias finitas*, el cual admite a su vez dos opciones de cálculo:

- Alternativa I:

En la *Figura 154* se resume gráficamente una plantilla de cálculo para la determinación de cada uno de los tirantes que componen la curva de remanso, cuya resolución se realiza paso a paso y de manera progresiva manteniendo la modalidad que se indica a continuación:

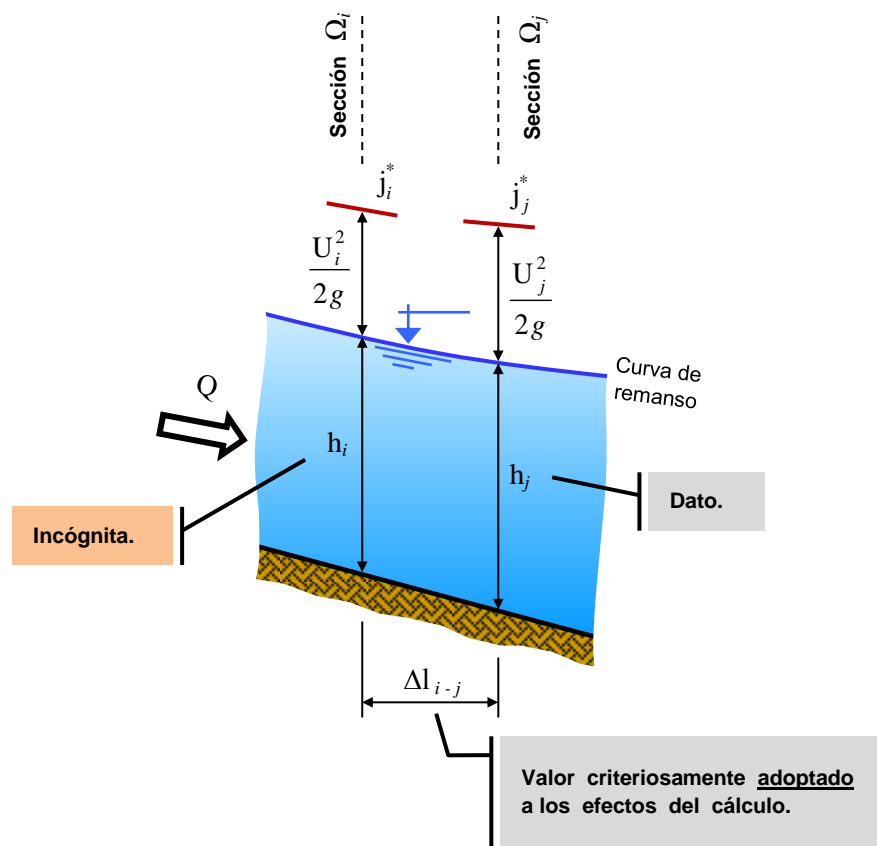


Figura 154 – Cálculo de la curva de remanso - Alternativa I.

- Se parte conociendo fehacientemente la altura de un tirante h_j de la curva de remanso.
- Se fija convenientemente una longitud de tramo Δl_{i-j} del elemento finito considerado entre la sección conocida de tirante h_j y otra adyacente desconocida cuyo tirante se indica en primera instancia como h_i .
- Se determina la longitud del tirante incógnita h_i , según el procedimiento que se indica más adelante en el punto 9.7.1. 3°).

- d) Se reitera el proceso con otro elemento finito contiguo, partiendo ahora como dato del tirante h_i calculado en el paso precedente c), pero que en esta instancia posterior de cálculo pasará a denominarse h_j (nuevo dato de partida). Siguiendo el mismo desarrollo descrito en los pasos anteriores, se obtiene un nuevo tirante h_i componente de la curva de remanso.
- e) De esta manera se continúan determinando los sucesivos tirantes h_i hasta conformar la totalidad de la curva de remanso en toda su longitud.
- Alternativa II:

En la *Figura 155* se observa la plantilla de cálculo que se utiliza para precisar cada una de las longitudes parciales Δl_{i-j} entre secciones de la curva de remanso, cuya solución también se efectúa por pasos de forma sucesiva practicando la modalidad indicada a continuación:

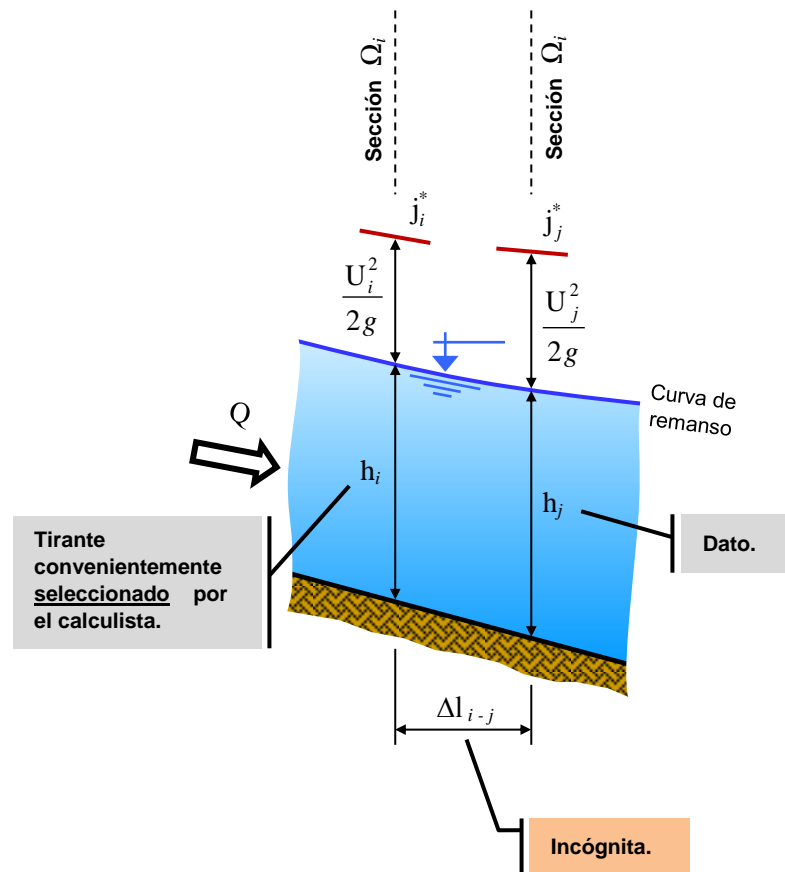


Figura 155 – Cálculo de la curva de remanso - Alternativa II.

- Se inicia el cálculo sobre un elemento finito, teniendo calculado de antemano como dato del problema el valor de un tirante h_j de la curva de remanso.
- Se fija convenientemente la altura del tirante h_i correspondiente con la sección Ω_i y adyacente a la sección Ω_j .
- Se determina la separación Δl_{i-j} entre los tirantes h_i y h_j según la metodología señalada en el apartado 9.7.2. 3°).

- d) Se reitera el proceso, partiendo ahora con el tirante h_i adoptado como dato en el paso anterior c), pero que en esta nueva etapa del cálculo se denominará h_j (nuevo dato de partida). Siguiendo el mismo desarrollo descrito en los pasos precedentes, se obtiene un nuevo tramo de separación entre tirantes Δl_{i-j} componente de la longitud total de la curva de remanso.
- e) De esta manera se continúa adoptando tirantes h_i y calculando las separaciones Δl_{i-j} respectivas hasta plasmar la configuración final de la curva de remanso.

A los efectos de una mejor y más clara explicación de ambos procedimientos resolutivos, se propone analizar un ejemplo concreto consistente en este caso en un canal de pendiente débil, en el que la uniformidad del escurrimiento se encuentra alterada ante la interposición de un obstáculo tipo presa-vertedero. De un análisis cualitativo previo y no desarrollado particularmente en esta instancia, resulta la formación de una curva de remanso del tipo D_1 (ver Figura 156).

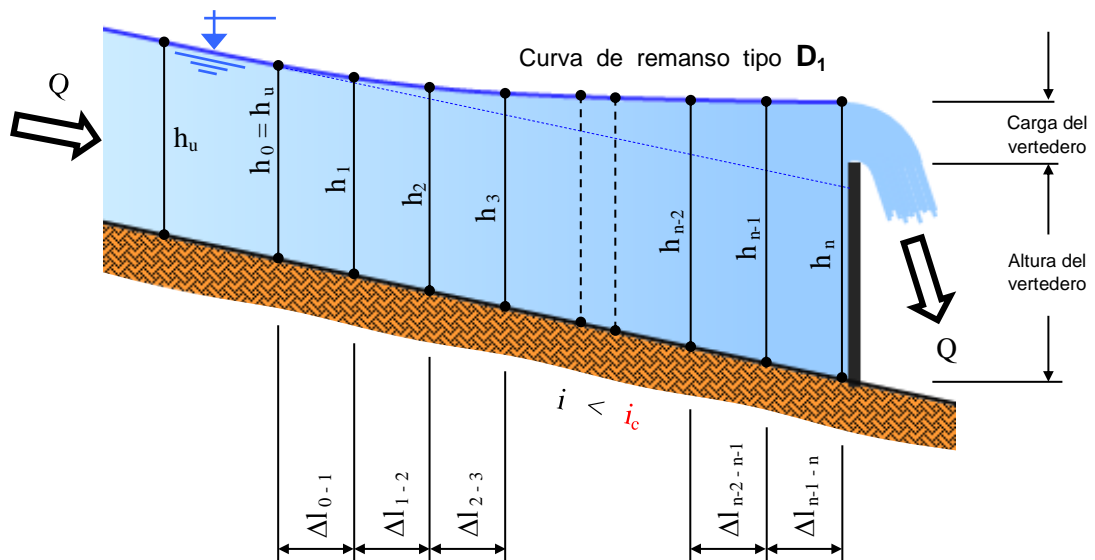


Figura 156 – Remanso por interposición de una presa-vertedero en un canal de pendiente débil.

Son datos del mismo:

- $Q = cte.$ movimiento permanente.
- Forma de la sección transversal.
- Tipo de la curva de remanso.
 D_1 para el presente ejemplo.
- Tirante h_n .
Tirante final de la curva de remanso, correspondiente con una sección muy próxima al vertedero, la cual resulta igual a la suma de la altura del vertedero más la carga que permite un escurrimiento de caudal Q .
- Tirante h_1 .
Tirante inicial de la curva de remanso e igual a h_u .

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre dos secciones genéricas Ω_i y Ω_j , próximas entre sí (ver *Figura 157*):

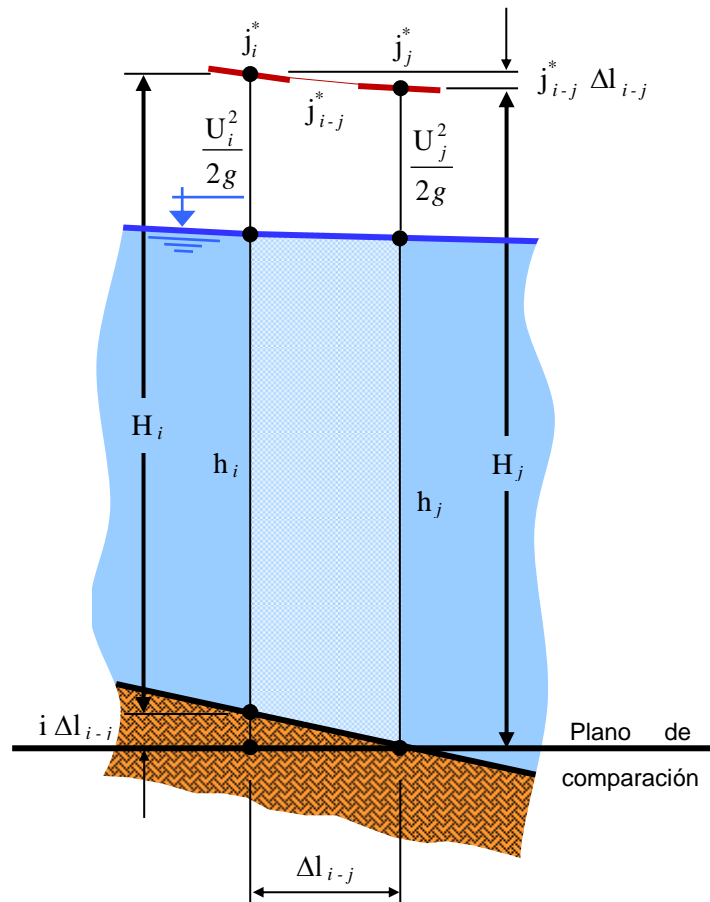


Figura 157 – Aplicación de la ecuación de Bernoulli entre dos secciones próximas de un remanso.

$$i \Delta l_{i-j} + H_i = H_j + j_{i-j}^* \Delta l_{i-j}$$

$$\Rightarrow H_j - H_i = \Delta H = (i - j_{i-j}^*) \Delta l_{i-j}$$

$$\therefore \frac{\Delta H}{\Delta l_{i-j}} = (i - j_{i-j}^*) \quad (256)$$

La ecuación (256) resulta ser la interpretación en diferencias finitas de la ecuación diferencial (217) que expresa la variación de la energía propia H respecto al recorrido l .

Así se tiene:

$$H_i = H_j - (i - j_{i-j}^*) \Delta l_{i-j} \quad (257)$$

Además, para el correcto uso de la expresión (257), se debe calcular primeramente y con la mayor precisión posible, la pérdida de energía unitaria media j_{i-j}^* entre las secciones Ω_i y

Ω_j . A tal fin se puede optar por una de las dos siguientes hipótesis, válidas solamente cuando se cumple que las secciones son lo suficientemente próximas:

- Criterio de Bélanger. (*Jean-Baptiste Bélanger Francés 1790-1874*)

Considera una pérdida de energía unitaria en el tramo Δl_{i-j} igual a la media aritmética entre las pérdidas de energía unitarias correspondientes con cada una de las secciones Ω_i y Ω_j .

$$j_{i-j}^* = \frac{j_i^* + j_j^*}{2} \quad (258)$$

- Criterio de Merriman. (*Mansfield Merriman Estadounidense 1848-1925*)

Partiendo de la deducción de la ecuación de Chézy, define la pérdida de energía unitaria media j_{i-j}^* en el tramo Δl_{i-j} considerando individualmente los promedios de los radios hidráulicos, los promedios cuadráticos de las secciones y los coeficientes de Chézy extremos.

$$j_{i-j}^* = \frac{Q^2}{\Omega_{i-j}^2 c_{i-j}^2 R_{i-j}} = \frac{Q^2}{\frac{\Omega_i^2 + \Omega_j^2}{2} \frac{c_i^2 + c_j^2}{2} \frac{R_i + R_j}{2}} =$$

$$j_{i-j}^* = \frac{8 Q^2}{(\Omega_i^2 + \Omega_j^2) (c_i^2 + c_j^2) (R_i + R_j)} \quad (259)$$

Por consiguiente, el proceso resolutivo para el presente caso particular, se comienza desde aguas arriba (con el tirante h_n conocido de antemano) hacia aguas abajo, siguiendo la alternativa de cálculo adoptada.

9.7.1. Procedimiento resolutivo - Alternativa I.

- 1°) Determinar el tirante h_n , como la suma de la altura y la carga del vertedero. Esta última se calcula sabiendo el valor del caudal y aplicando la fórmula del vertedero que corresponda. Ese valor de h_n pasa a ser un dato significativo y punto de partida para la resolución del problema.
- 2°) Dividir el perfil longitudinal de la curva de remanso en tramos iguales Δl_{i-j} , cuya distancia se adopta de acuerdo con la precisión deseada. A los fines prácticos se aconseja respetar los siguientes límites máximos:
 - Para curvas tipo **D₁**: tramos hasta cinco veces el ancho superficial.
($\Delta l_{i-j} < 5 B$)
 - Para todas las demás curvas: tramos hasta tres veces el ancho superficial.
($\Delta l_{i-j} < 3 B$)

- 3°) Calcular los tirantes h_i que componen y definen la forma de la curva de remanso en toda su longitud, partiendo del extremo donde se conoce precisamente la ubicación del tirante respecto al recorrido. En este caso los tirantes extremos son h_0 y h_n (ambos conocidos en esta instancia del cálculo), pero de los dos solo se sabe la ubicación de h_n , razón por la cual se inicia la resolución en esa sección inmediata al vertedero. Para ello se procede de la siguiente manera:

a – Definir y trazar la curva de energía propia en función del tirante $H = f(h)$. Ver

Figura 158.

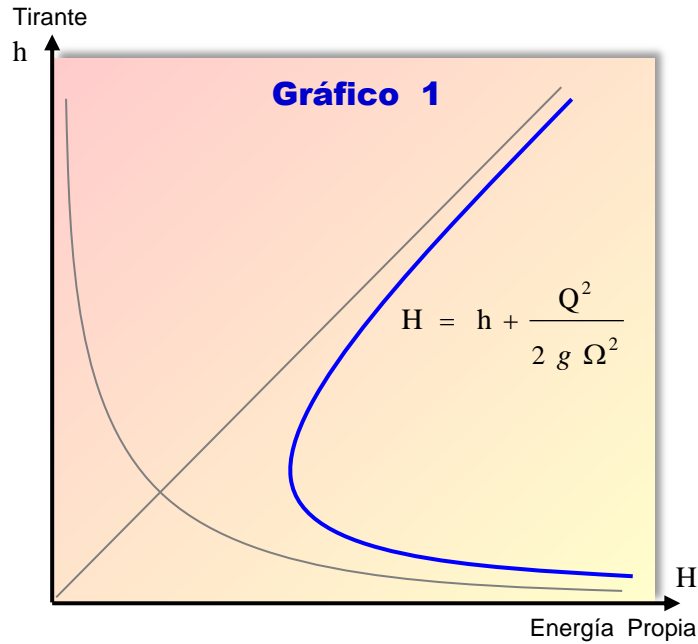


Figura 158 – Gráfico 1 - Curva H - h.

Si la sección es variable en su recorrido, se deben trazar tantas curvas $H - h$ como la cantidad de tramos en las que se ha dividido la curva de remanso.

b – Definir y representar la curva correspondiente a la pérdida de energía unitaria en función del tirante $j^* = f(h)$. Ver *Figura 159.*

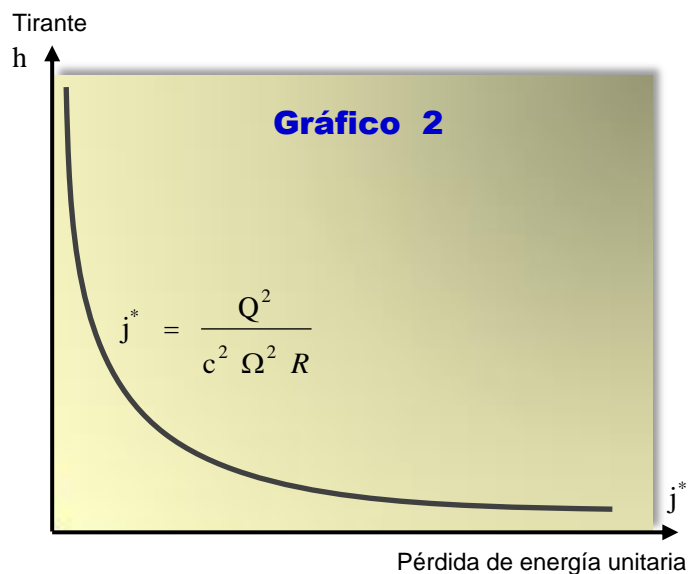


Figura 159 – Gráfico 2 - Curva $j^ - h$.*

c – Determinar el tirante h_{n-1} conociendo el valor del tirante h_n .

Previo al proceso de cálculo, se observa la plantilla graficada en la *Figura 150*, y se deben definir los valores particulares que toman los tirantes genéricos h_i y h_j indicados en la misma. Para el presente ejemplo (ver *Figura 160*):

$$\begin{cases} h_i = h_{n-1} & \rightarrow \text{Incógnita.} \\ h_j = h_n & \rightarrow \text{Dato. Se determinó en el paso 1}^\circ. \end{cases}$$

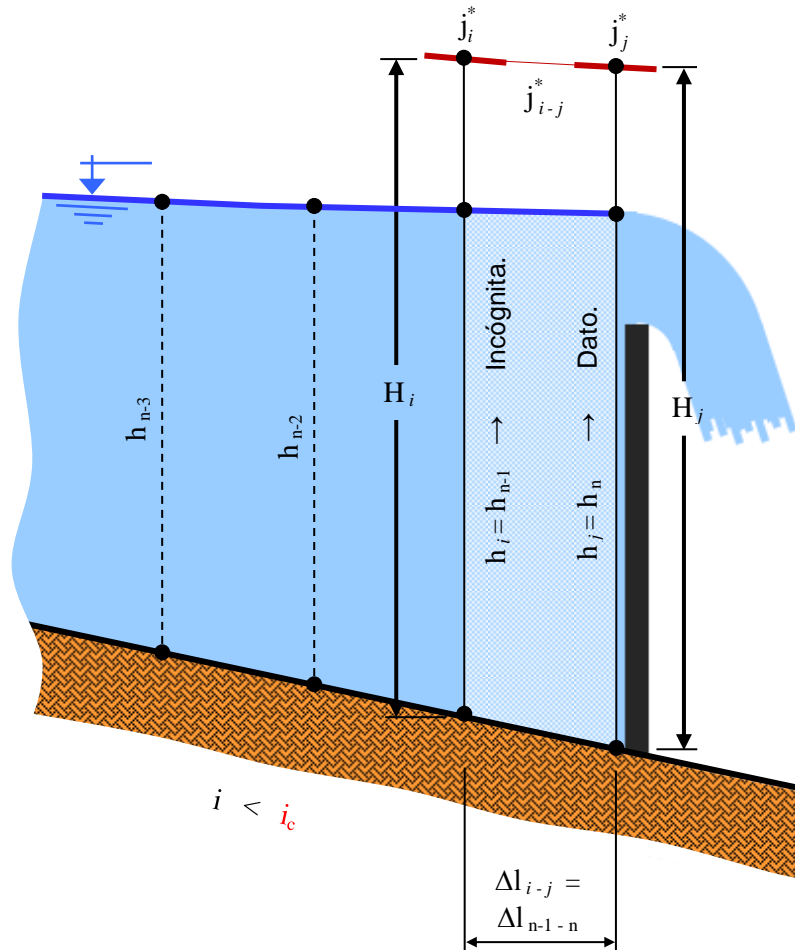
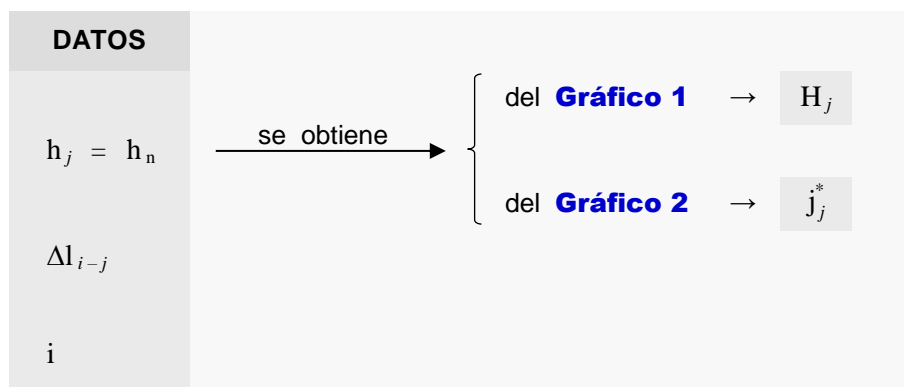


Figura 160 – Primer tramo finito de estudio.

Inicio del cálculo:



Planteando la ecuación (257), se establece una primera aproximación de H_i , que por no ser exacta ni definitiva se la denominará H_i' :

$$\Rightarrow H_i' = H_j - (i - j_j^*) \Delta l_{i-j}$$

Debería ser j_{i-j}^* , pero se desconoce j_i^* , la cual depende de la incógnita del problema h_i . Asumiendo ese pequeño error de considerar $j_j^* = j_{i-j}^*$, se continúa con el proceso de cálculo.

1^{er} tanteo.

* Con la energía propia H_i' (es un valor próximo a H_i):

del **Gráfico 1** se obtiene $\rightarrow h_i'$

* Con el tirante h_i' (su dimensión es cercana a h_i):

del **Gráfico 2** se consigue $\rightarrow j_i^{*'} (es j_i^* \text{ aproximado})$.

Se vuelve a aplicar la ecuación (257), considerando en este caso el criterio de Bélanger y la pérdida de energía unitaria aproximada en la sección Ω_i igual a $j_i^{*'}$.

$$\Rightarrow H_i'' = H_j - \left[i - \frac{j_i^{*'} + j_j^*}{2} \right] \Delta l_{i-j}$$

Verificación:

- Si: $H_i' = H_i'' \Rightarrow h_i'$ es el tirante h_i buscado.
- Si: $H_i' \neq H_i'' \Rightarrow$ se realiza otro tanteo de aproximación.

2^{do} tanteo.

* Con la energía propia H_i'' (valor más próximo a H_i que el anterior H_i'):

del **Gráfico 1** se obtiene $\rightarrow h_i''$

* Con el tirante h_i'' (su altura es más cercana a h_i que h_i').

del **Gráfico 2** se consigue $\rightarrow j_i^{*''} (es j_i^* \text{ más próximo que } j_i^{*'})$.

Se aplica nuevamente la ecuación (257) considerando en este otro intento la pérdida de energía unitaria j_i^* .

$$\Rightarrow H_i''' = H_j - \left[i - \frac{j_i^{*''} + j_j^*}{2} \right] \Delta l_{i-j}$$

Verificación:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{ Si: } H_i'' = H_i''' \Rightarrow h_i'' \text{ es el tirante } h_i \text{ requerido.} \\ - \text{ Si: } H_i' \neq H_i'' \Rightarrow \text{ se continúa con un nuevo tanteo.} \end{array} \right.$$

Otros tanteos.

Con la mecánica descrita en los dos primeros tanteos se prosigue con el procedimiento hasta converger, con la precisión deseada, a la determinación definitiva del tirante h_i , que para esta etapa del cálculo corresponde concretamente al tirante h_{n-1} señalado tanto en la *Figura 156* como en la *160*. De esta forma queda resuelta y definida la magnitud del tirante:

$$h_i = h_{n-1}$$

d – Determinar el siguiente tirante h_{n-2} conociendo el valor del tirante h_{n-1} .

En este paso se parte tomando como dato del problema al tirante h_{n-1} calculado en el punto c- anterior.

Así se continúa con el proceso de cálculo aplicando siempre la plantilla indicada en la *Figura 154*, redefiniéndose para la presente etapa los valores particulares que toman los tirantes denominados de forma genérica h_i y h_j (ver en la *Figura 161* la nueva posición de dicha plantilla de cálculo):

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i = h_{n-2} \quad \rightarrow \text{ Incógnita.} \\ h_j = h_{n-1} \quad \rightarrow \text{ Dato.} \end{array} \right.$$

Con el dato señalado ($h_j = h_{n-1}$), y además los correspondientes a este nuevo tramo finito en estudio $\Delta l_{n-2 - n-1}$ y la pendiente longitudinal i , se resuelve la dimensión del tirante h_{n-2} con ayuda de los **Gráficos 1 y 2**. Dicha resolución se vuelve a realizar por medio del método de las diferencias finitas tal como se explicara y desarrollara en el inciso precedente.

Así, a través de sucesivos tanteos se obtiene la altura del siguiente tirante h_{n-2} de la curva de remanso buscada.

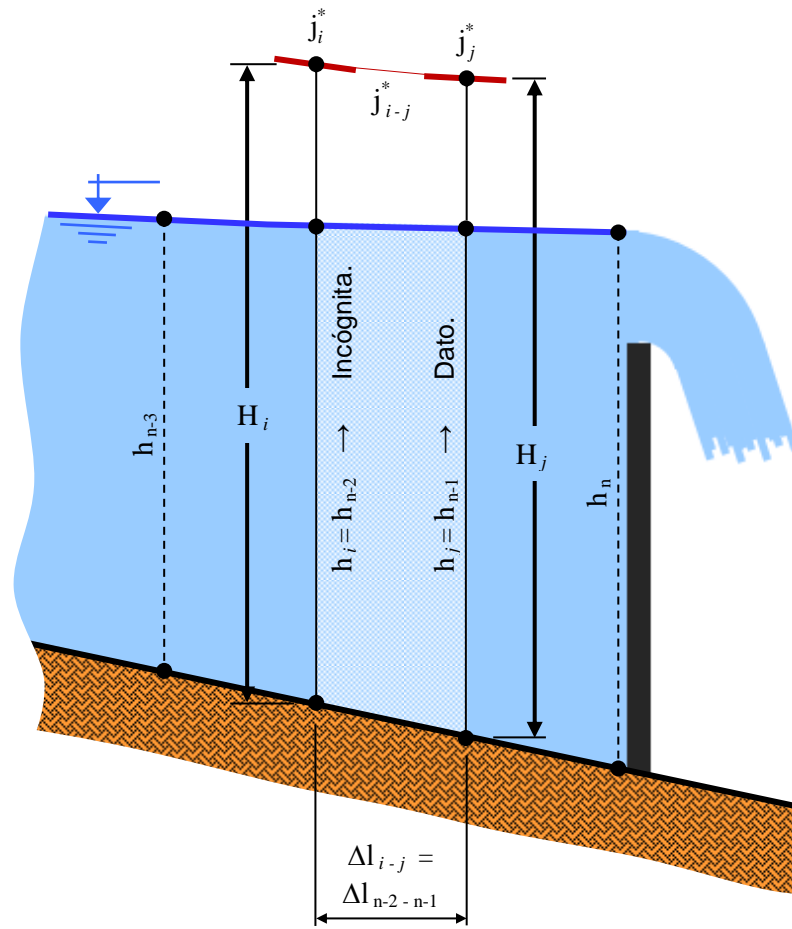


Figura 161 – Segundo tramo finito de estudio.

e – Calcular los tirantes subsiguientes h_i , siguiendo el orden establecido y aplicando la metodología resolutiva señalada en los anteriores pasos.

- 4º) Finalizar el proceso resolutivo en el paso en el cual el resultado del cálculo del tirante h_i coincide con el tirante uniforme (o sea que $h_i = h_u$), designándose al mismo como h_0 para establecer un ordenamiento correlativo y ascendente hacia aguas abajo. En este caso, la curva de remanso corta a la línea correspondiente al tirante uniforme en un punto que indica el lugar donde da comienzo dicha curva de remanso. Ver *Figura 156*.

9.7.2. Procedimiento resolutivo - Alternativa II.

- 1º) Determinar la altura del tirante h_n de la misma manera que la indicada en el apartado 9.7.1. 1º), la cual pasa a ser un dato importante para el inicio de la solución del problema.

De esta forma se tienen perfectamente definidos los dos tirantes extremos entre los que se desarrolla la curva de remanso:

- Tirante inicial: $h_0 = h_u$.
- Tirante final: h_n .

- 2º) Adoptar los valores de los distintos n tirantes en los que se ha dividido la curva de remanso. O sea que se genera una sucesión impuesta por el calculista consistente en

$h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}$ y h_n , de los cuales ya se conocen de antemano tanto h_0 como h_n . La cantidad de tirantes n elegidos se corresponde con la mayor o menor precisión que se desea obtener para determinar la morfología de la curva.

La elección de los tirantes no es azarosa, sino que se realiza criteriosamente a partir del previo conocimiento cualitativo de la curva en estudio y teniendo siempre en cuenta los límites indicados. Para este ejemplo, sabiendo que se trata de una curva de remanso tipo **D**₁, en el primer paso correspondiente al estudio del elemento finito sito entre h_{n-1} y h_n , se deberá elegir un valor de h_{n-1} ligeramente menor al tirante h_n ya conocido.

3°) Calcular las separaciones Δl_{i-j} entre los tirantes que componen la sucesión y así dejar precisada la forma de la curva de remanso en toda su extensión, partiendo del extremo donde se conoce precisamente la ubicación del tirante. Al igual que en la alternativa I, se parte de la sección Ω_n próxima al vertedero procediendo de la siguiente manera:

a – Determinar la longitud Δl_{n-1-n} correspondiente a la separación entre las secciones Ω_{n-1} y Ω_n .

Con el conocimiento de esa distancia, queda perfectamente ubicada la sección Ω_{n-1} correspondiente con el tirante h_{n-1} .

El cálculo se realiza comenzando por la ecuación (256), utilizando en este caso para cuantificar la pérdida de energía unitaria en un pequeño tramo cualquiera $i-j$, la aproximación según el criterio de Bélanger.

$$\Rightarrow \Delta l_{i-j} = \frac{\Delta H}{(i - j_{i-j}^*)} \quad (260)$$

Dónde:

$$\Delta H = H_j - H_i = (h_j - h_i) + \frac{U_j^2 - U_i^2}{2g} =$$

$$\Delta H = (h_j - h_i) + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega_j^2} - \frac{1}{\Omega_i^2} \right)$$

$$j_{i-j}^* = \frac{j_i^* + j_j^*}{2} =$$

$$j_{i-j}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{\Omega_i^2 c_i^2 R_i} + \frac{Q^2}{\Omega_j^2 c_j^2 R_j} \right)$$

Reemplazando los valores de ΔH y j_{i-j}^* en la ecuación (260), se obtiene la separación Δl_{i-j} entre las secciones Ω_i y Ω_j , de modo sencillo y directo, evitando cálculos iterativos como se deben realizar en la metodología descrita como alternativa I. Así se tiene entonces una expresión de tipo general:

$$\Delta l_{i \cdot j} = \frac{(h_j - h_i) + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega_j^2} - \frac{1}{\Omega_i^2} \right)}{i - \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{\Omega_i^2 c_i^2 R_i} + \frac{1}{\Omega_j^2 c_j^2 R_j} \right)} \quad (261)$$

Aplicando la ecuación (261) al ejemplo, se debe considerar para el primer elemento finito en estudio los siguientes valores particulares:

$$\begin{cases} \Omega_i = \Omega_{n-1} \\ \Omega_j = \Omega_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_i = h_{n-1} \\ h_j = h_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = c_{n-1} \\ c_j = c_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_i = R_{n-1} \\ R_j = R_n \end{cases}$$

Introduciendo esos valores se obtiene finalmente la longitud $\Delta l_{n-1 - n}$ buscada, inherente al tramo que representa la separación entre las secciones Ω_{n-1} y Ω_n .

b – Determinar la longitud $\Delta l_{n-2 - n-1}$ relativa a la distancia existente entre las secciones Ω_{n-2} y Ω_{n-1} .

Se vuelve a utilizar la ecuación (261) aplicada al segundo elemento finito a partir del borde del vertedero. Para ello los parámetros generales toman los siguientes valores particulares:

$$\begin{cases} \Omega_i = \Omega_{n-2} \\ \Omega_j = \Omega_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_i = h_{n-2} \\ h_j = h_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = c_{n-2} \\ c_j = c_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_i = R_{n-2} \\ R_j = R_{n-1} \end{cases}$$

Así se consigue cuantificar la magnitud del segundo tramo $\Delta l_{n-2 - n-1}$.

c – Calcular los tramos subsiguientes $\Delta l_{i - j}$, aplicando el orden y sistema resolutivo indicado en los dos pasos anteriores.

- 4°) Finalizar el desarrollo del cálculo en el paso en el cual se hace $h_i = h_u$, y consecuentemente se obtiene la distancia Δl_{i-j} , que en este trámite resulta ser igual a Δl_{0-1} . Así queda definido el punto de inicio de la curva de remanso (Ver Figura 162).

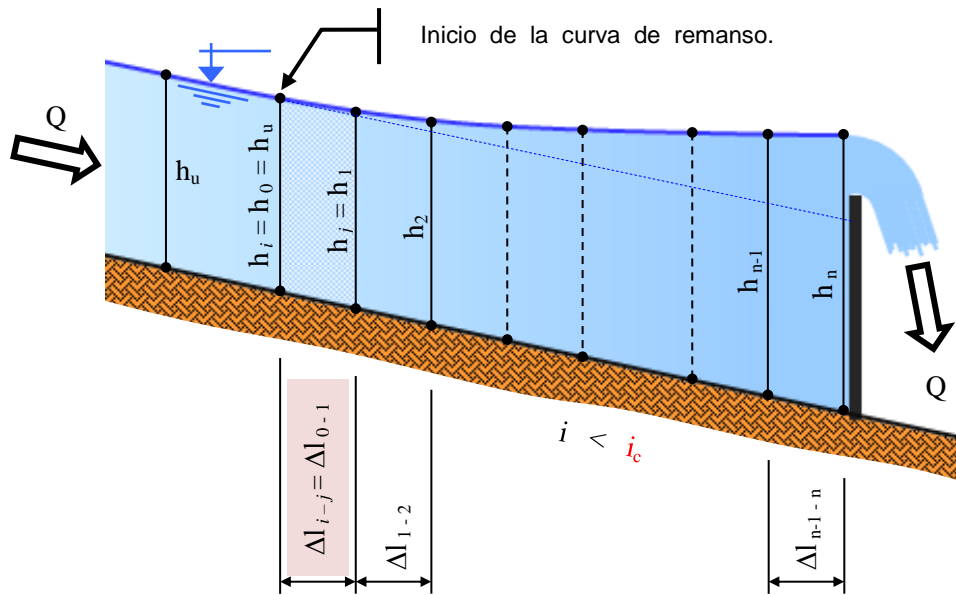


Figura 162 – Punto de comienzo de la curva de remanso.

Comentario: a este proceso de resolución tan simple se le puede objetar que es poco preciso para las curvas de gran desarrollo como las tipo D_1 , puesto que puede arrojar valores de Δl_{i-j} muy grandes para pequeñas diferencias de tirantes Δh_{i-j} , motivo por el cual se desvirtuaría el método de las diferencias finitas.